

Fachhochschule Mannheim
Hochschule für Technik und Gestaltung
Fachbereich Verfahrens- und Chemietechnik

Skript

zur Vorlesung

Technische Mechanik

Teil 2 **Festigkeitslehre**

Prof. Dr. Werner Diewald

Inhalt

1	Einleitung	3
2	Zug- und Druckbeanspruchung	6
3	Biegung	16
4	Torsion	21
5	Querkraftschub	25
6	Überlagerte Beanspruchung	26
7	Knickung	29
8	Statisch unbestimmte Systeme	31
	Formelsammlung	34

Das vorliegende Skript soll das Verfolgen der Vorlesung erleichtern. Es gibt ein Gerüst für den Vorlesungsinhalt wieder und erspart einiges an "Kopierarbeit" des Tafelanschriebs.

Das Skript ersetzt keine Mitschrift, da individuell notwendige Erläuterungen und Skizzen fehlen. Es steht auch nicht in Konkurrenz zu den Lehrbüchern der Technischen Mechanik. Dort finden sich ausführlichere Darstellungen und zahlreichere Übungsbeispiele zu den einzelnen Themen.

Anregungen zu Inhalt und Gestaltung senden Sie bitte an:
w.diewald@fh-mannheim.de

1 Einleitung

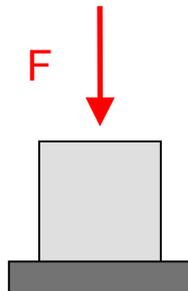
Aufgaben der Festigkeitslehre

- **Verteilung der Schnittlasten**
- **Formänderungen von Bauteilen**
- **Bauteilversagen**

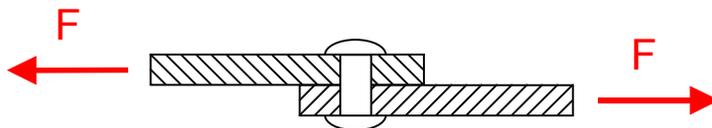
Beanspruchungsarten



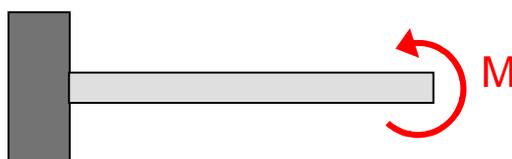
Zug



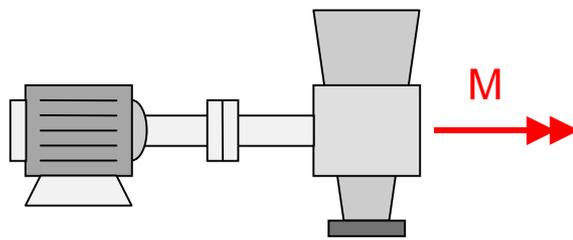
Druck



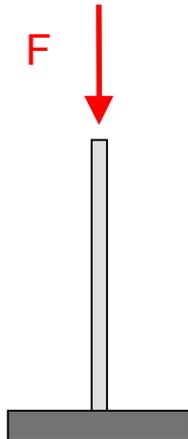
Schub



Biegung



Torsion



Knickung

Schnittlasten

Statik

- F_N Normalkraft
- F_Q Querkraft
- M Biegemoment

Festigkeitslehre

Spannungsvektor $\vec{S} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$

mit den Komponenten :

- σ **Normalspannungen**
 $\Delta \vec{F}$ steht senkrecht auf A
- τ **Schubspannungen**
 $\Delta \vec{F}$ liegt in der Ebene von A

Formänderungen

- elastisches Verhalten
- plastisches Verhalten
- Knickung

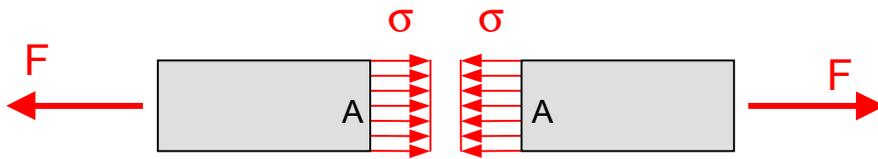
Bauteilversagen

- Werkstoffkennwerte
- Vergleichsspannungen
- Sicherheiten

2 Zug- und Druckbeanspruchung



Zugstab



Spannungen
im Innern

Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Vorzeichenregelung:

$\sigma > 0$ Zug
 $\sigma < 0$ Druck

zulässige Spannung

$$\sigma_{\text{zul}}$$

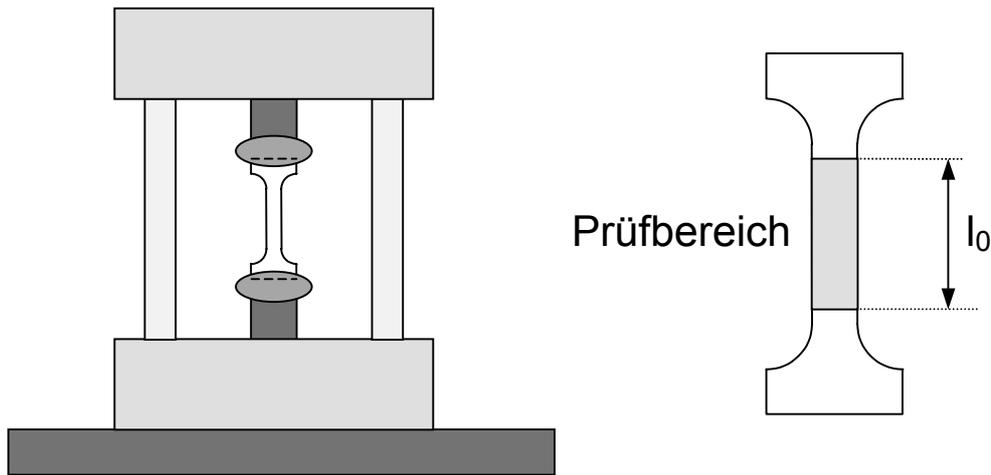
Dimensionierung

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

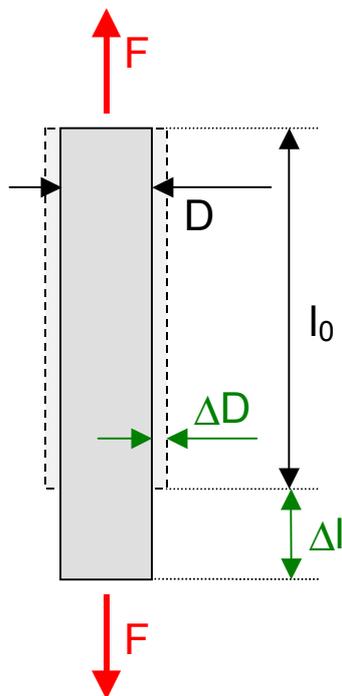
Zugversuch

In einer hydraulischen Prüfeinrichtung wird ein Probekörper mit Zugkräften belastet. Dabei werden die Zugkraft und die Längenänderung der Probe gemessen.

Es gibt viele genormte Versuche zur Ermittlung von Materialkennwerten. In der DIN EN 10002 ist z.B. der Zugversuch für metallische Werkstoffe bei Raumtemperatur beschrieben.



Dehnung



dimensionslose Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

l_0 Ausgangslänge

Δl Längenänderung

Querdehnung

$$\varepsilon_Q = \frac{\Delta D}{D}$$

D Durchmesser

ΔD Durchmesseränderung

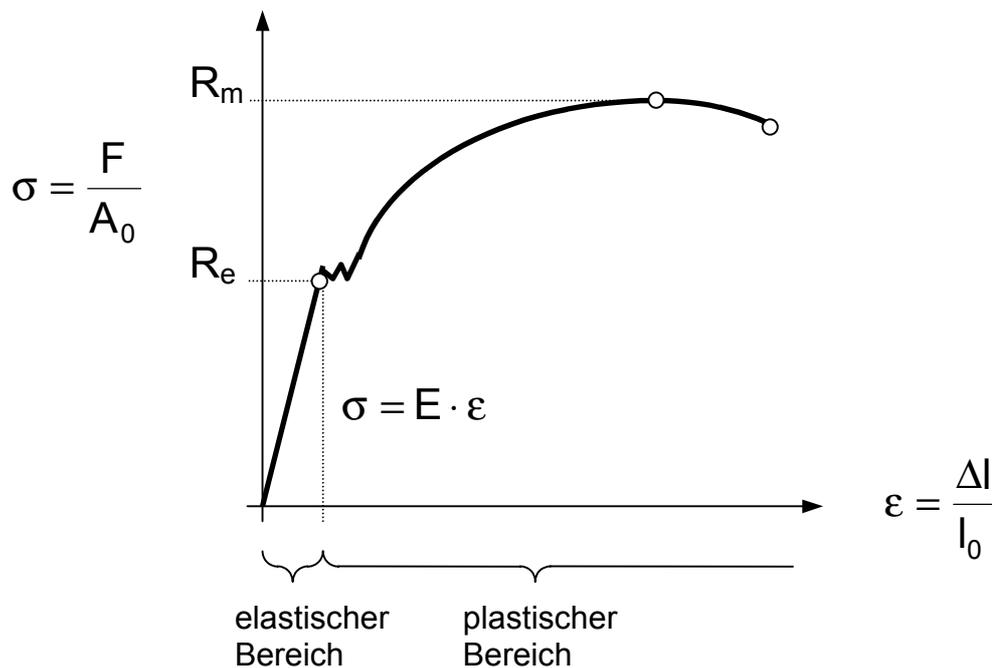
Zusammenhang

$$\nu = \frac{-\varepsilon_Q}{\varepsilon}$$

Querdehnzahl

$\nu = 0,3$ (Stahl)

Versuchsergebnis für unlegierten Stahl



R_m Zugfestigkeit

R_e Elastizitätsgrenze

E Elastizitätsmodul (E-Modul)

Zahlenwerte (Anhaltswerte)

Material	R_m in N/mm ²	R_e in N/mm ²	E in N/mm ²	ρ in kg/m ³
unlegierte Stähle	340 - 570	235 - 335	210.000	7.850
rostfreie Stähle	460 - 730	180 - 210	210.000	7.850
Einsatzstähle	700 - 1100	400 - 800	210.000	8.100
Messing	400	200	100.000	8.500
Kupfer	220	100	120.000	8.740
Aluminiumlegierung	140 - 440	110 - 290	65.000	2.750
Titanlegierung	900 - 1.100	800 - 1.000	110.000	4.430
PP	30	15	1000	1.100
PVC	60	50	3.000	1.400
GFK	90	-	75.000	1.450
CFK	750	-	140.000	1.450
Holz	40 - 240	-	10.000	500
Beton	50 (nur für Druck)	-	30.000	2.380
Glas	80	-	80.000	3.000

Zulässige Beanspruchung

Alle Unsicherheiten werden in einem Faktor für die **Sicherheit S** berücksichtigt.

Dimensionierung gegen **Bruch**

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S}$$

S = 2 ... 4

Dimensionierung gegen **Verformung**

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S}$$

S = 1,3 bis 3

Elastisches Verhalten

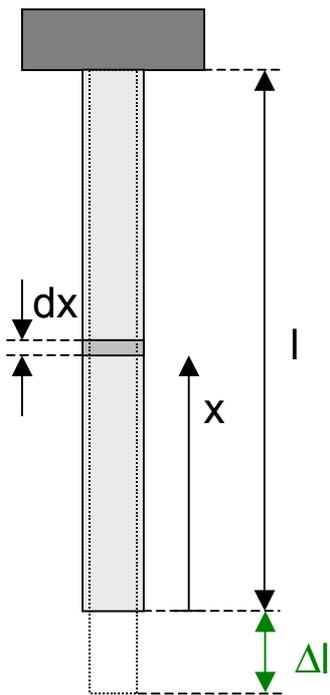
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

HOOKEsches Gesetz

$$F = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l$$

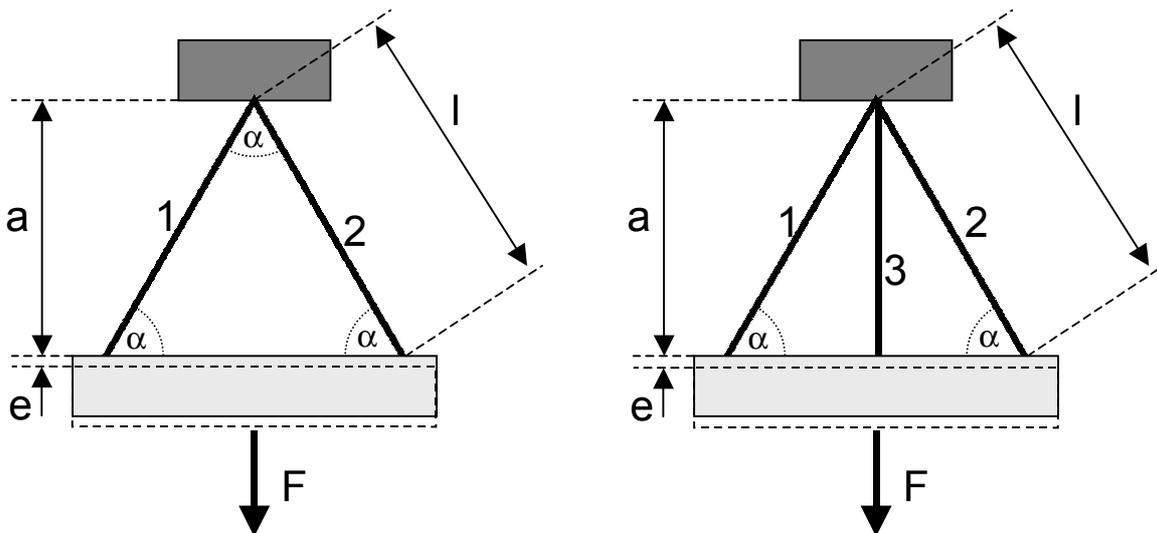
Formänderung eines Zugstabes ("Federgesetz")

Beispiel: Längenänderung unter Eigengewicht



$$\Delta l = \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{2 \cdot E}$$

Beispiel: statisch unbestimmtes System



Statisches Kräftegleichgewicht:

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = 0,58 F$$

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F - 2 F_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_1 = F_2 = \frac{F \cdot (\sin \alpha)^2}{2 \cdot (\sin \alpha)^3 + 1} = 0,33 F$$

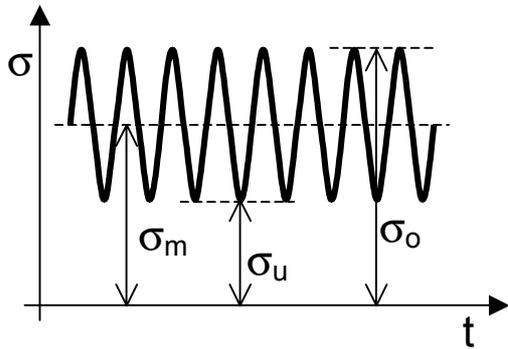
$$F_3 = \frac{F}{2 \cdot (\sin \alpha)^3 + 1} = 0,43 F$$

Verformung:

$$e = \frac{F \cdot a}{2 \cdot E \cdot A \cdot (\sin \alpha)^3}$$

$$e = \frac{F \cdot a}{E \cdot A \cdot (2 \cdot (\sin \alpha)^3 + 1)}$$

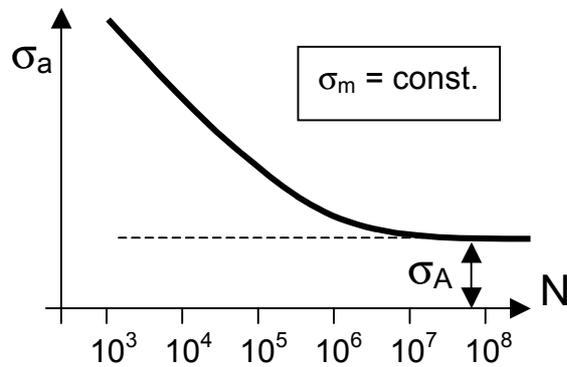
Wechselfestigkeit



Mittelspannung σ_m

Spannungsamplitude $\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$

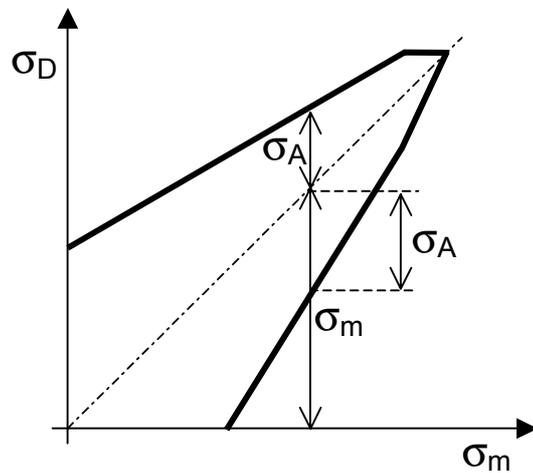
Wöhlerdiagramm



Ausschlagfestigkeit σ_A

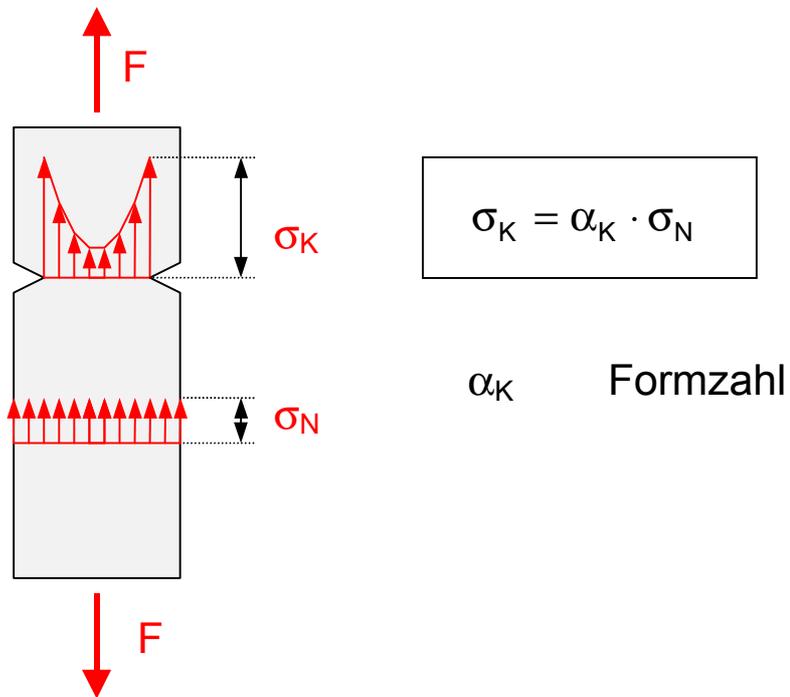
Dauerfestigkeitsschaubild

Dauerfestigkeit σ_D



Kerbwirkung

Durch die Geometrie von Bauteilen können die mechanischen Spannungen lokal erhöht werden.

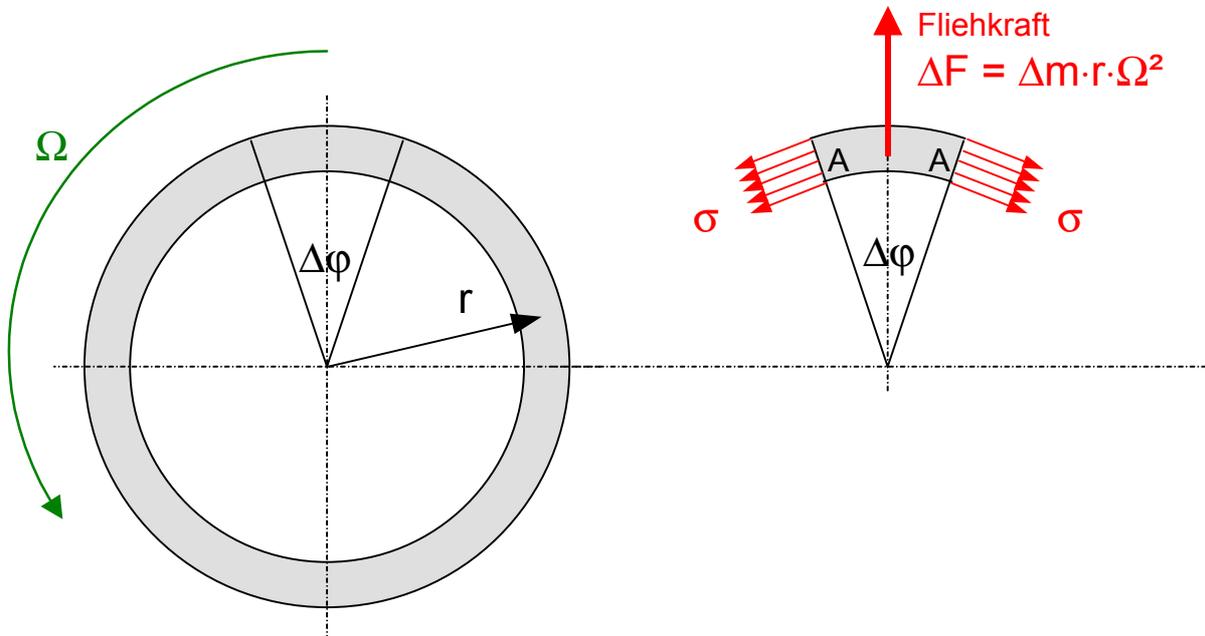


Druckbelastung

- Im elastischen Bereich Analogie zur Zugbelastung
- Bei schlanken Bauteilen zusätzlich Berechnung auf Knickung erforderlich

Zugspannungen durch Fliehkräfte

Beispiel rotierender dünner Ring

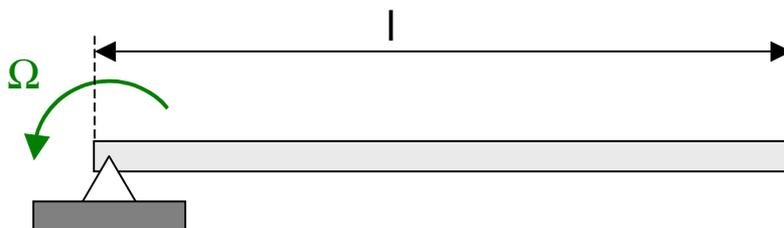


Zugspannung

$$\sigma = \rho \cdot r^2 \cdot \Omega^2$$

unabhängig von der konstruktiven Gestaltung

Beispiel rotierender Stab



Zugspannung

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot l^2 \cdot \Omega^2$$

Wärmespannungen

Wenn sich die Temperatur erhöht, dehnen sich Bauteile aus.

Wird diese Ausdehnung behindert, ergeben sich große Kräfte und sehr hohe Spannungen.

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$$

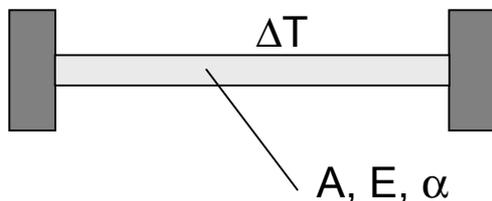
Dehnung infolge einer Temperaturdifferenz ΔT

α Wärmeausdehnungskoeffizient

Zahlenwerte: (Anhaltswerte)

Material	α in 10^{-6} K^{-1}
unlegierter Stahl	12
Edelstahl	16
Aluminium	24
Kupfer	17
Messing	20
PP	180
PVC	70
Glas	5
Quarzglas	0,5
Beton	10
Holz	4

Behinderte Wärmedehnung



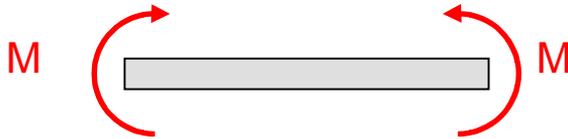
$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

unabhängig von der Bauteilgeometrie

$$F = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

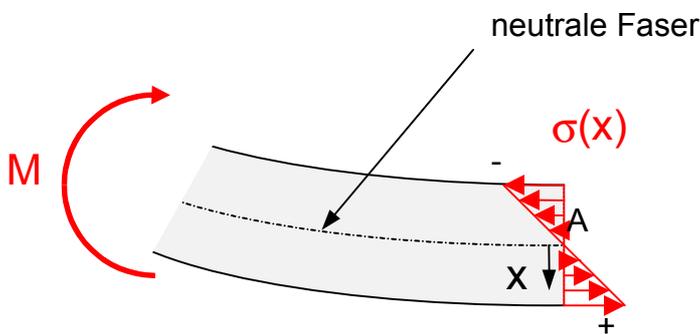
unabhängig von der Länge des Bauteils

3 Biegung



Balken unter Biegebelastung

Spannungsverteilung



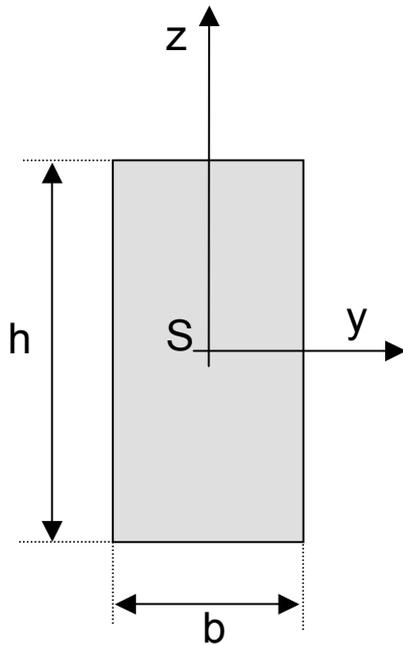
- $\sigma(x) = C \cdot x$ Annahme: lineare Verteilung der Spannungen
- $\int_A \sigma \cdot dA = 0$ keine axialen Belastungen des Balkens
- $\int_A \sigma \cdot x \cdot dA = M$ resultierendes Biegemoment als Schnittgröße

→ $\sigma(x) = \frac{M}{I} \cdot x$ mit $I = \int_A x^2 \cdot dA$ **Flächenmoment**

Dimensionierung

$\sigma = \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}$ mit $W = \frac{I}{x_{max}}$ **Widerstandsmoment**

Beispiel: Rechteck



$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

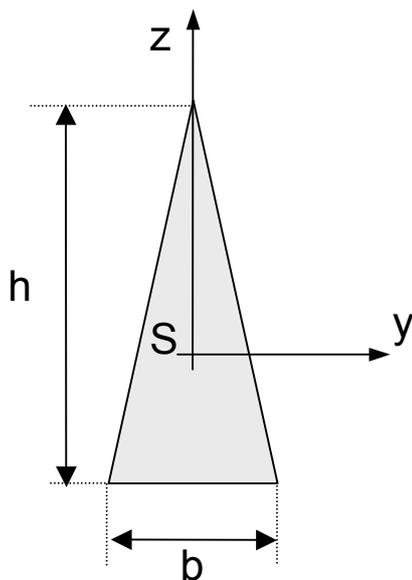
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W_z = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$

Beispiel: Dreieck



$$I_y = \int_A z^2 dA$$

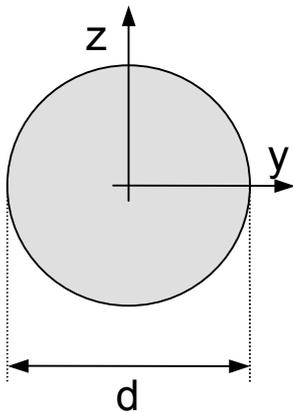
$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{48}$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$$

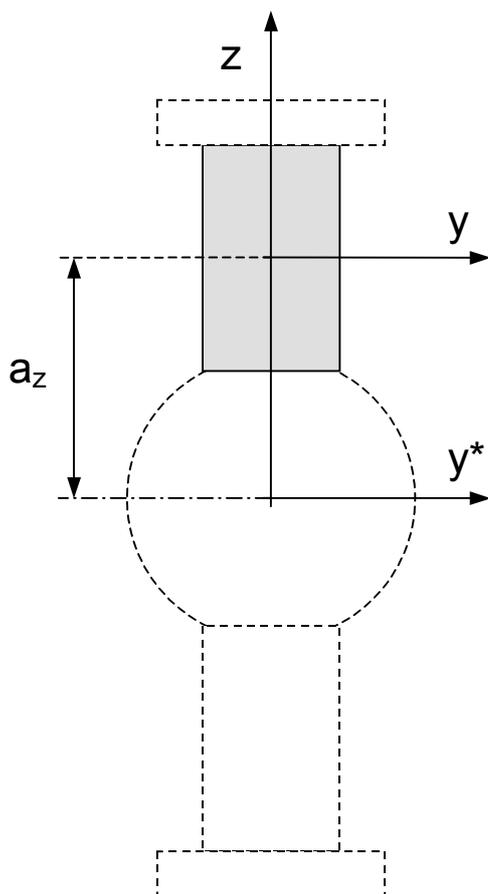
Beispiel: **Kreis**



$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$$

Verschiebung des Koordinatensystems



$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

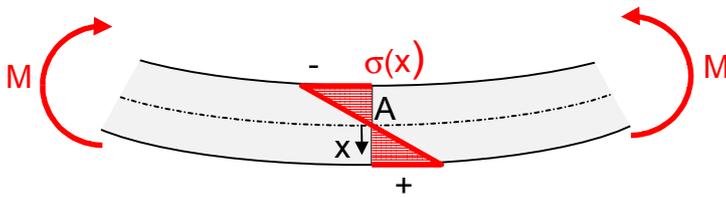
$$I_{y^*} = \int_A (z + a_z)^2 \cdot dA$$

$$I_{y^*} = I_y + a_z^2 \cdot A$$

Verschiebungssatz
nach STEINER

*"Flächenmomente um Schwerpunktsachsen
sind immer Minimalwerte"*

Durchbiegung von Balken



$$\sigma(x) = \frac{M}{I} \cdot x \quad \text{Spannungsverteilung}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{HOOKEsches Gesetz}$$

$$\frac{\varepsilon}{x} = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$\boxed{-\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{M}{E \cdot I}}$$

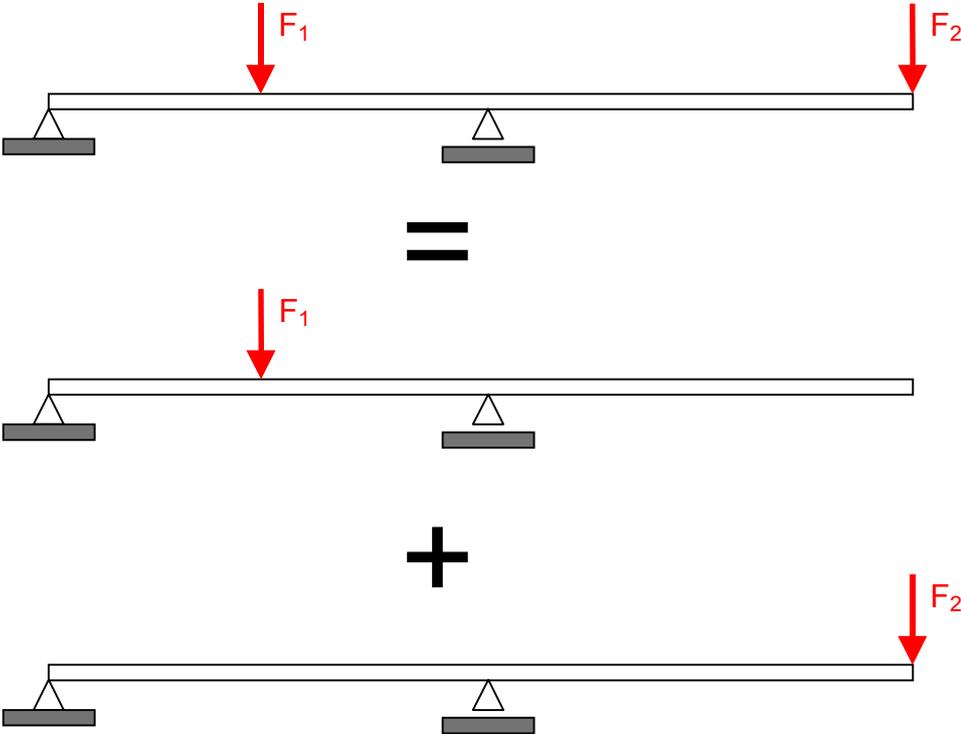
Differentialgleichung der Biegelinie

Beispiel für eine Randbedingung:



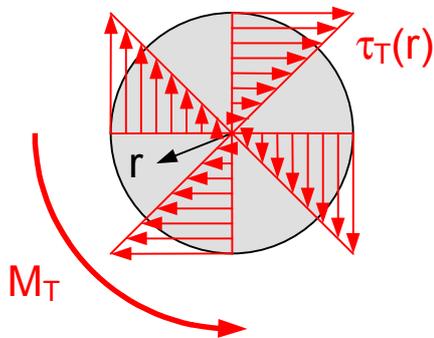
Superposition

Die Gleichungen für die Biegelinien von Balken sind lineare Gleichungen und erlauben somit die Überlagerung von Lösungen.



4 Torsion

Schubspannungsverteilung bei Kreisquerschnitten



- $\tau(r) = C \cdot r$ Annahme: lineare Verteilung der Spannungen
- $\int_A \tau \cdot dA = 0$ keine Querkräfte in der Welle
- $\int_A \tau \cdot r \cdot dA = M_T$ resultierendes Torsionsmoment als Schnittgröße

$$\rightarrow \tau(r) = \frac{M_T}{I_p} \cdot r$$

mit

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA$$

polares Flächenmoment

Dimensionierung

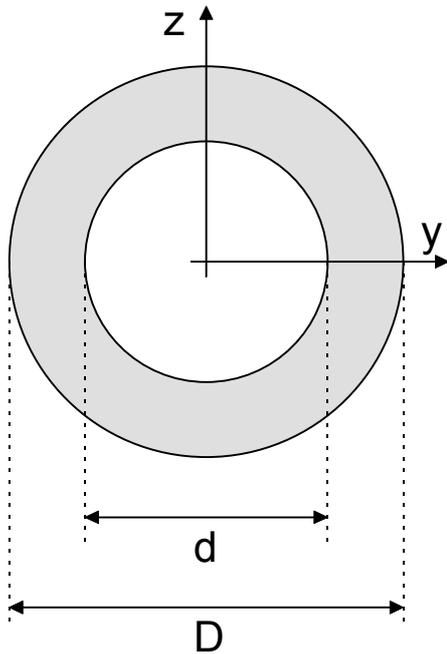
$$\tau = \frac{M_T}{W_p} \leq \tau_{zul}$$

mit

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}}$$

polares Widerstandsmoment

Beispiel: **Kreisringquerschnitt**



$$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

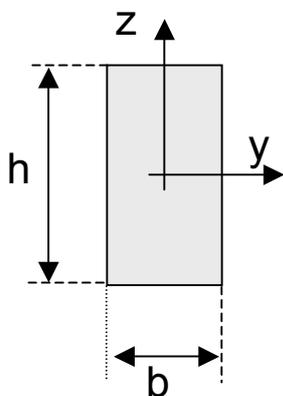
$$W_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Andere Querschnitte

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} \leq \tau_a$$

mit I_T **Torsionsflächenmoment**
 W_T **Torsionswiderstandsmoment**

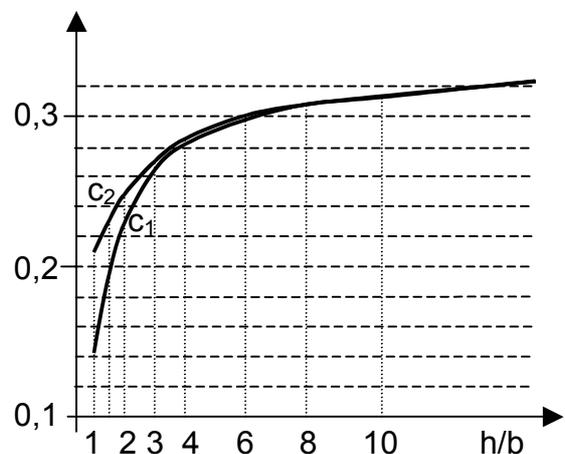
Beispiel: **Rechteckquerschnitt**



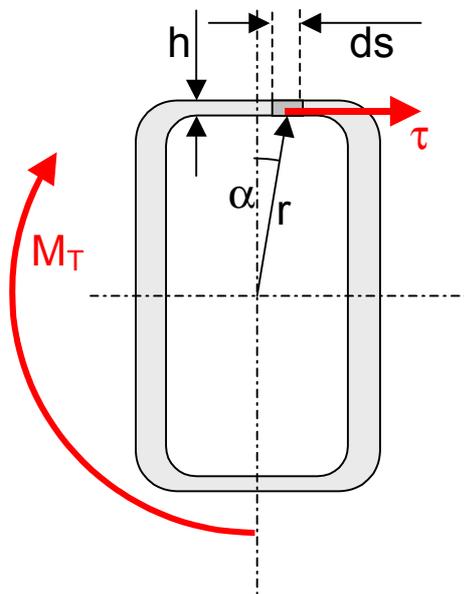
$$I_T = c_1 \cdot h \cdot b^3$$

$$W_T = c_2 \cdot h \cdot b^2$$

für $h \geq b$



Beispiel: **Hohlprofil** (kleine Wanddicken)



$$M_T = \int (r \cdot \cos \alpha) \cdot (\tau \cdot h \cdot ds)$$

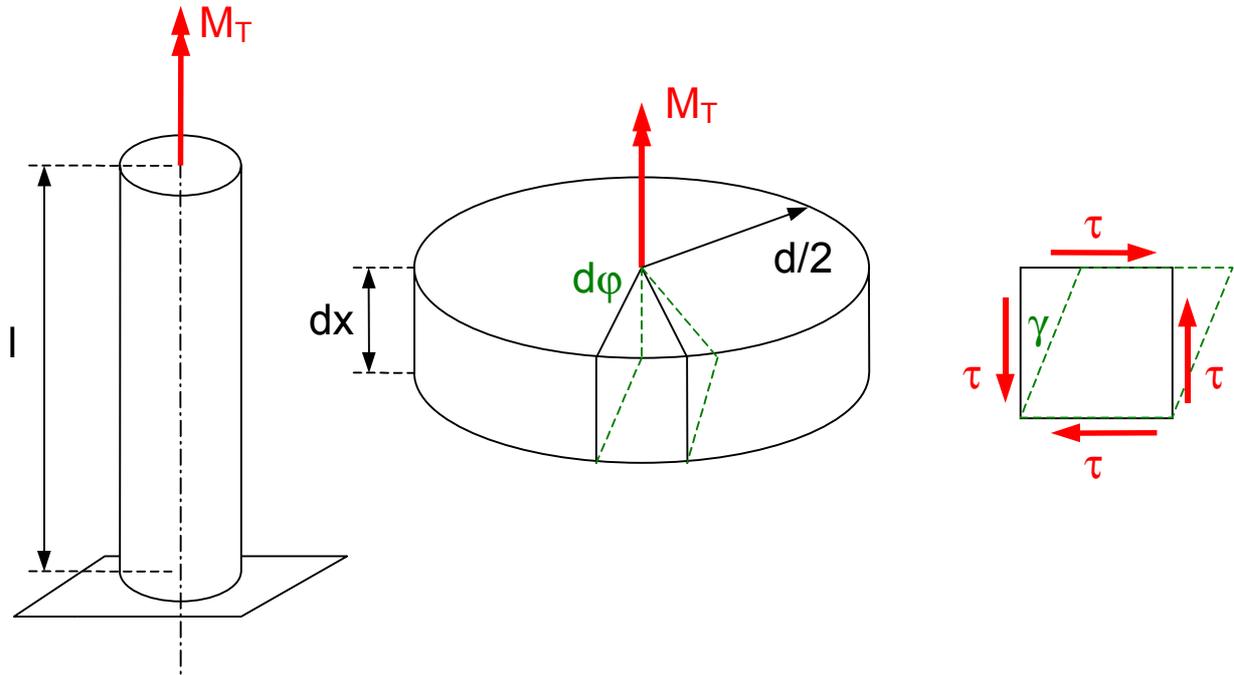
$$M_T = 2 \cdot \tau \cdot h \cdot A \quad A = \frac{1}{2} (A_a + A_i)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{2 \cdot A \cdot h_{\min}}$$

$$W_T = 2 \cdot h_{\min} \cdot A$$

$$I_T = \frac{4 \cdot A^2}{\sum \frac{ds}{h}}$$

Verdrehung bei Torsion



$$\tau = G \cdot \gamma$$

Werkstoffgesetz bei Schubbelastung
G Schubmodul

Zahlenwerte:	Stahl	$G = 80.000 \text{ N/mm}^2$
	Aluminium	$G = 30.000 \text{ N/mm}^2$
	Kupfer	$G = 50.000 \text{ N/mm}^2$

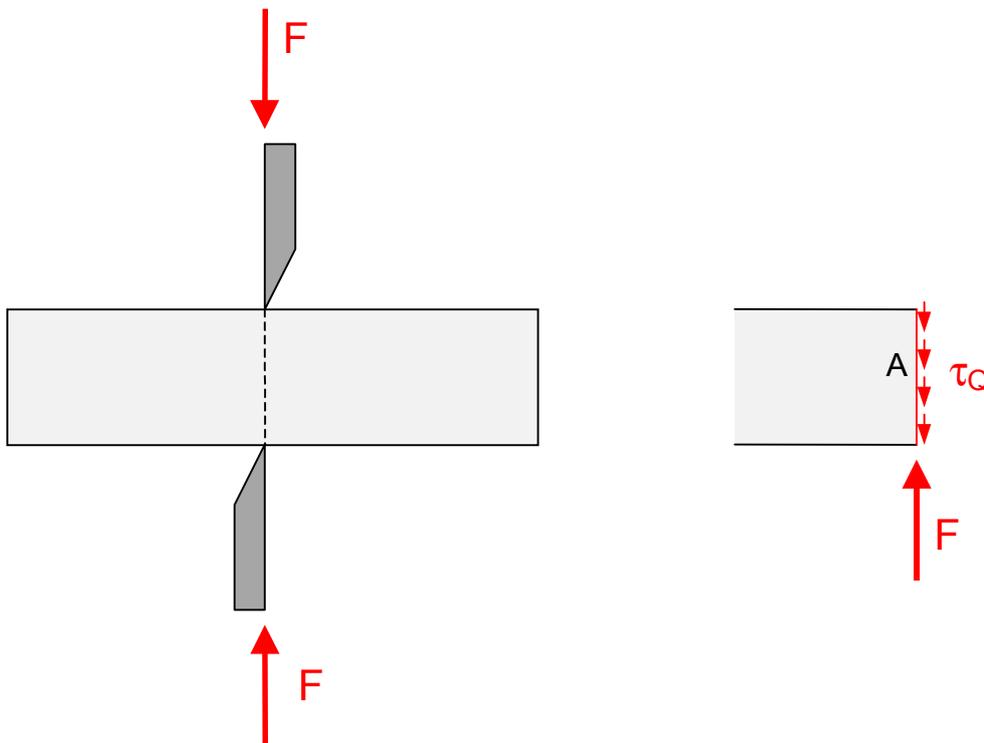
$$\rightarrow \varphi = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_T}$$

φ Torsionswinkel

$G \cdot I_T$ Torsionssteifigkeit

$I_T = I_P$ bei Kreisringquerschnitten

5 Querkraftschub



Dimensionierung

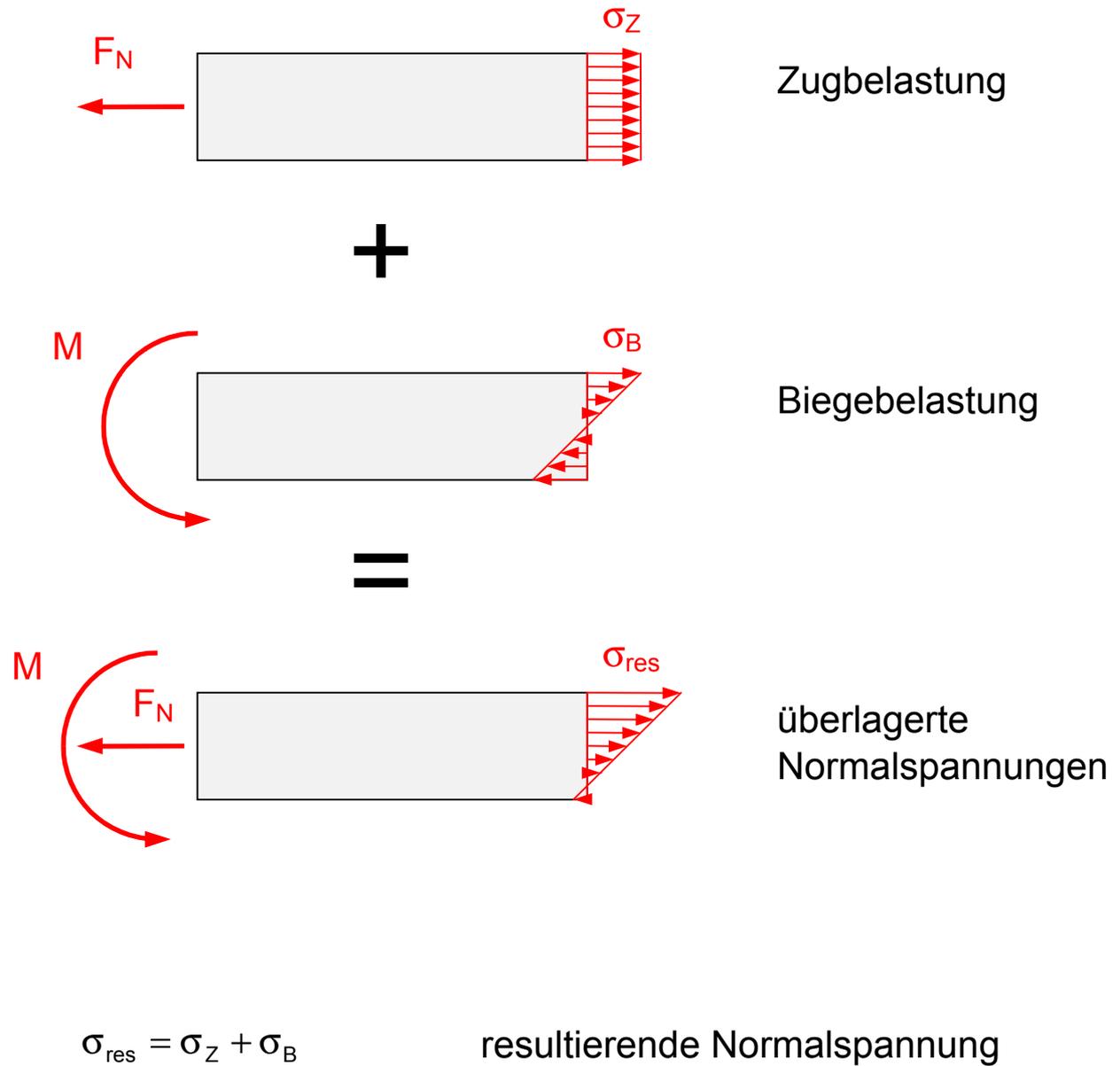
$$\tau_Q = \frac{F}{A} \leq \tau_{zul}$$

Annahme: gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen über die Fläche A

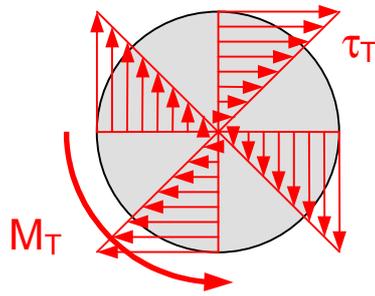
"Verformungen durch Querkraftschub sind vernachlässigbar"

6 Überlagerte Beanspruchung

Normalspannungen

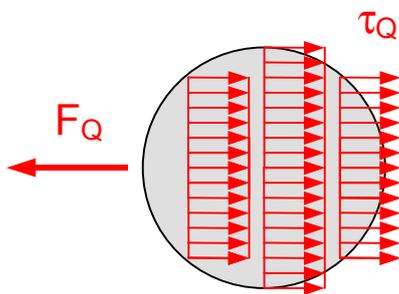


Schubspannungen



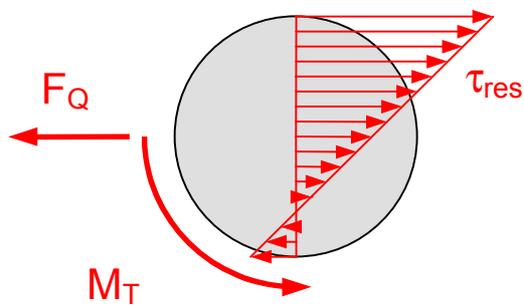
Torsionsbelastung

+



Querkraftbelastung

=



überlagerte
Schubspannungen

$$\tau_{\text{res}} = \tau_T + \tau_Q$$

resultierende Schubspannung

Normal- und Schubspannungen

In der Regel sind Bauteile gleichzeitig durch mehrere Belastungsarten beansprucht. Es treten in der Summe Normal- und Schubspannungen in unterschiedlichen Kombinationen auf.

Es ist nicht möglich, für alle diese Belastungen experimentelle Festigkeitskennwerte zu ermitteln.

Daher werden an dieser Stelle **Hypothesen** verwendet, um einen kombinierten Belastungsfall mit dem Zugversuch vergleichen zu können.

Die Hypothesen basieren auf der Annahme von unterschiedlichen Versagensmechanismen.

Als Ergebnis liefern alle Hypothesen eine **Vergleichsspannung** σ_V .

2 Beispiele:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{\text{res}}^2 + 4 \cdot \tau_{\text{res}}^2}$$

Schubspannungshypothese

Das Bauteilversagen wird durch die größte Schubspannung bestimmt.

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{\text{res}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{res}}^2}$$

Gestaltänderungsenergiehypothese

(GE-Hypothese)

Die Formänderung eines Bauteils bestimmt das Bauteilversagen.

7 Knickung

Bei schlanken Bauteilen können Druckkräfte zum plötzlichen Ausknicken führen.



$$-\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{M(y)}{E \cdot I} \quad \text{Differentialgleichung der Biegelinie}$$

$$M(y) = F \cdot w(y) \quad \text{Biegemoment im geknickten Zustand}$$

Die kleinste mögliche Kraft F , die diese Differentialgleichung erfüllt, wird Knickkraft genannt.

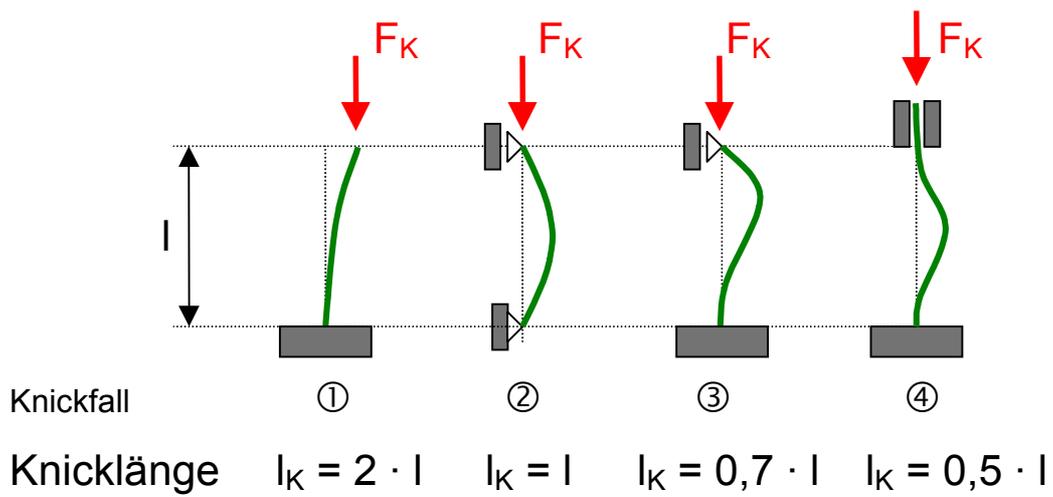
$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2}$$

Knickkraft

gilt nur für den elastischen Bereich: $\sigma_K = \frac{F_K}{A} \leq R_e$

Mit der Knicklänge l_K werden unterschiedliche Randbedingungen berücksichtigt.

Knickfälle (nach EULER)



Knicksicherheit

$$S_K = \frac{F_K}{F}$$

im Maschinenbau übliche Werte: $S_K = 3$ bis 10

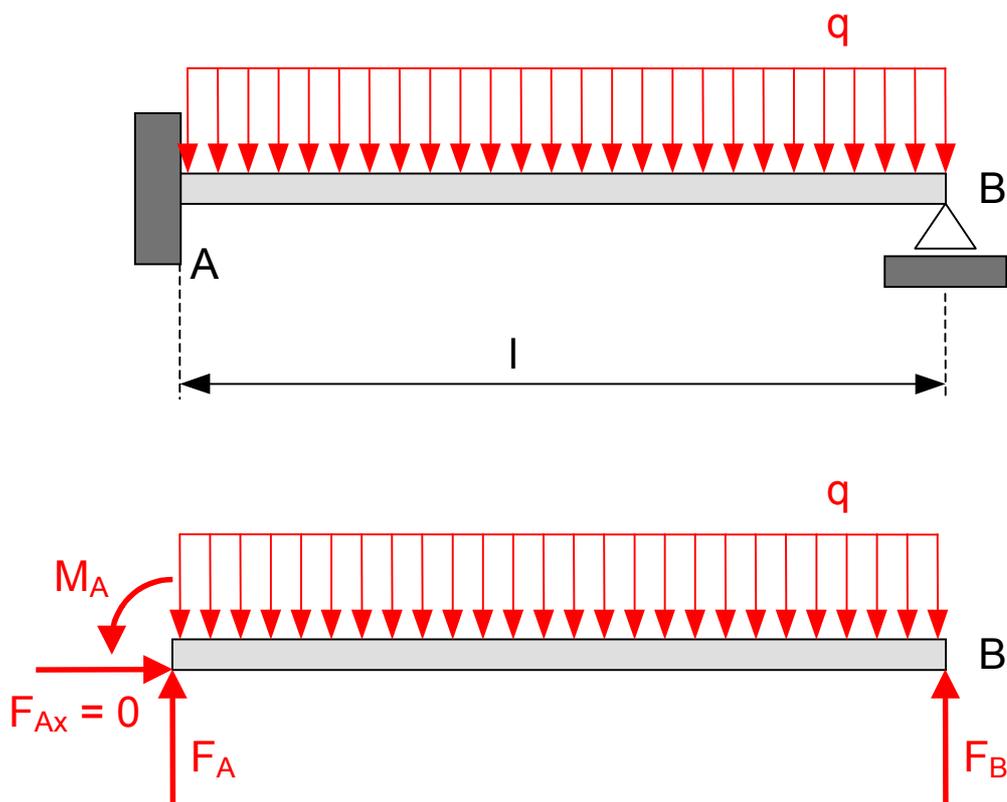
8 Statisch unbestimmte Systeme

Nach den Aussagen der Statik gibt es beim allgemeinen ebenen Kräftesystem 3 Gleichgewichtsbedingungen, mit denen 3 unbekannte Größen ermittelt werden können.

Wenn mehr Unbekannte vorliegen, z.B. 4 Lagerkräfte, liegt ein statisch unbestimmtes System vor.

Zur Lösung muss die Elastizität des Bauteils mit berücksichtigt werden.

Beispiel **statisch unbestimmt gelagerter Balken** Belastung z.B. durch das Eigengewicht



Selbst ohne die Berücksichtigung des horizontalen Kräftegleichgewichts bleiben 2 Gleichungen für 3 Unbekannte.

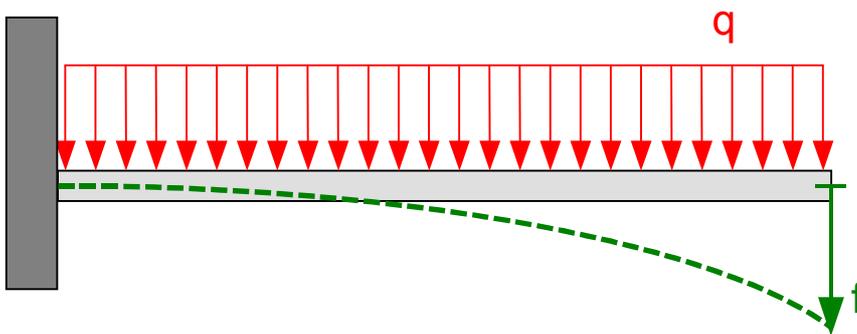
Damit ist der Balken statisch unbestimmt gelagert.

Lösungsmöglichkeiten

- Lösung der Differentialgleichung mit den gegebenen Randbedingungen
-
- **Überlagerungsmethode**
 - Energiemethode

Überlagerungsmethode

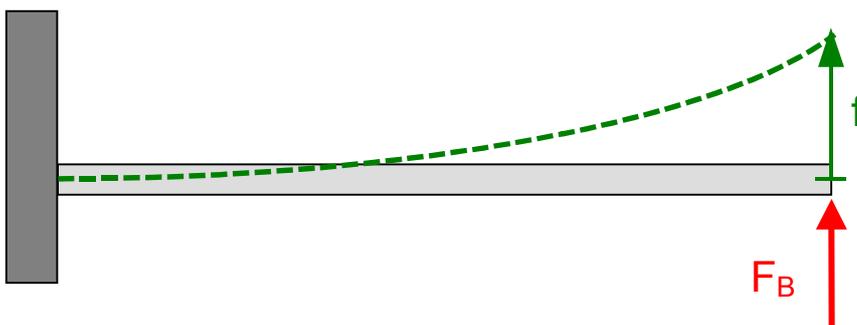
Durch "Weglassen" einer Lagerkraft wird ein statisch bestimmtes System gewonnen:



Die in Wirklichkeit nicht vorhandene Auslenkung beträgt:

$$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

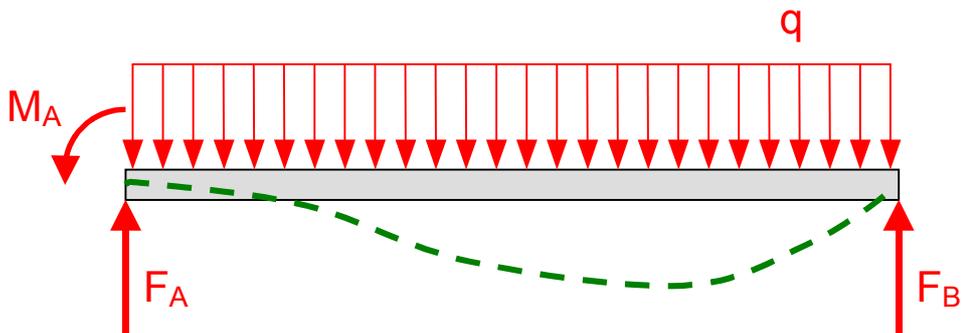
Die noch unbekannte Lagerkraft F_B führt dazu, dass die Auslenkung f verschwindet.



$$F_B = f \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3} \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$F_B = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8}$$

Jetzt können F_A und M_A berechnet werden.



$$\uparrow \quad F_A = q \cdot l - F_B = \frac{5 \cdot q \cdot l}{8}$$

$$\curvearrow + \quad M_A = \frac{q \cdot l^2}{2} - F_B \cdot l = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Formelsammlung

Zug / Druck	Dimensionierung	$\sigma = \frac{F_N}{A} \leq \sigma_{zul}$		
	Werkstoffgesetz	$\sigma = E \cdot \varepsilon$	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	
	Formänderung	$F_N = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l$		
	Wärmedehnung	$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$		
Biegung	Spannungsverlauf	$\sigma(x) = \frac{M_B}{I} \cdot x$		
	Dimensionierung	$\sigma_{max} = \frac{M_B}{W} \leq \sigma_{zul}$		
	Flächenmoment	$I_y = \int z^2 dA$	Rechteck	$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$
			Kreis	$I = \frac{\pi}{64} \cdot D^4$
			Dreieck	siehe Skript
	Verschiebungssatz	$I_{y^*} = I_y + a_z^2 \cdot A$		
	Widerstandsmoment	$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$	Rechteck	$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$
Kreis			$W = \frac{\pi}{32} \cdot D^3$	
Dreieck			siehe Skript	
Formänderung	$-\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{M}{E \cdot I}$	Lösungen siehe Tabelle		

Torsion Spannungsverlauf $\tau(r) = \frac{M_T}{I_p} \cdot r$ (für Kreisringquerschnitt)

Dimensionierung $\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} \leq \tau_{\text{zul}}$

Flächenmoment für Kreisringquerschnitt

$$I_T = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot D^4$$

(Rechteck und Hohlprofil siehe Skript)

Widerstandsmoment für Kreisringquerschnitt

$$W_T = W_p = \frac{\pi}{16} \cdot D^3$$

(Rechteck und Hohlprofil siehe Skript)

Formänderung $\frac{\varphi}{l} = \frac{M_T}{G \cdot I_T}$

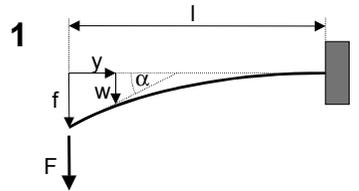
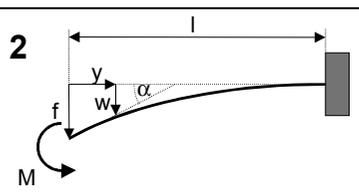
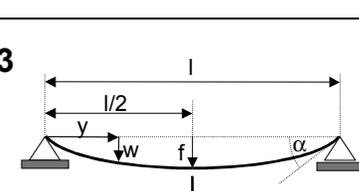
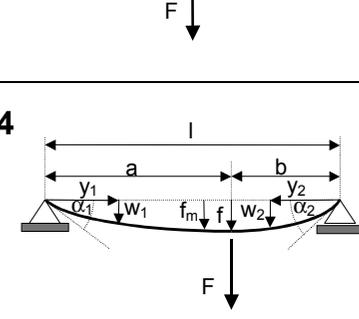
Schub Dimensionierung $\tau = \frac{F_Q}{A} \leq \tau_{\text{zul}}$

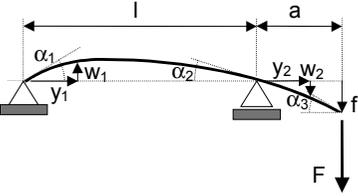
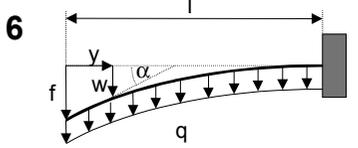
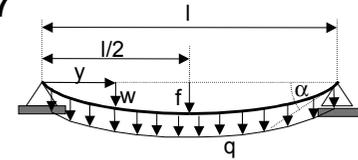
Vergleichsspannung

GE-Hypothese $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$

Knickung Knickkraft $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2}$ (Knickfälle siehe Skript)

Biegelinien von Balken

Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie	Durchbiegung	Neigung
	$w(y) = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{l} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{l} \right)^3 \right)$	$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$	$\tan(\alpha) = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$
	$w(y) = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{y}{l} - 1 \right)^2$	$f = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$	$\tan(\alpha) = \frac{M \cdot l}{E \cdot I}$
	$w(y) = \frac{F \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{y}{l} \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right) \quad \text{für } y \leq \frac{l}{2}$	$f = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$	$\tan(\alpha) = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I}$
	$w_1(y_1) = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \cdot \frac{y_1}{l} \cdot \left(1 + \frac{l}{b} - \frac{y_1^2}{a \cdot b} \right) \quad \text{für } y_1 \leq a$ $w_2(y_2) = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{b}{l} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot \frac{y_2}{l} \cdot \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{y_2^2}{a \cdot b} \right) \quad \text{für } y_2 \leq b$	$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2$ $f_m = f \cdot \frac{l+b}{3 \cdot b} \cdot \sqrt{\frac{l+b}{3 \cdot a}}$	$\tan(\alpha_1) = f \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left(1 + \frac{l}{b} \right)$ $\tan(\alpha_2) = f \cdot \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left(1 + \frac{l}{a} \right)$

<p>5</p> 	$w_1(y_1) = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{y_1}{l} \cdot \left(1 - \left(\frac{y_1}{l} \right)^2 \right) \quad \text{für } y_1 \leq l$ $w_2(y_2) = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{y_2}{l} \cdot \left(\frac{2 \cdot a}{l} + \frac{3 \cdot a}{l} \cdot \frac{y_2}{l} - \left(\frac{y_2}{l} \right)^2 \right) \quad \text{für } y_2 \leq a$	$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{a}{l} \right)$	$\tan(\alpha_1) = \frac{F \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{a}{l}$ $\tan(\alpha_2) = 2 \cdot \tan(\alpha_1)$ $\tan(\alpha_3) = \frac{F l^2}{6 E I} \cdot \frac{a}{l} \left(2 + 3 \frac{a}{l} \right)$
<p>6</p> 	$w(y) = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{y}{l} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{y}{l} \right)^4 \right)$	$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$	$\tan(\alpha) = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}$
<p>7</p> 	$w(y) = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{y}{l} \cdot \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{y}{l} \right)^2 + \left(\frac{y}{l} \right)^3 \right)$	$f = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$	$\tan(\alpha) = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$