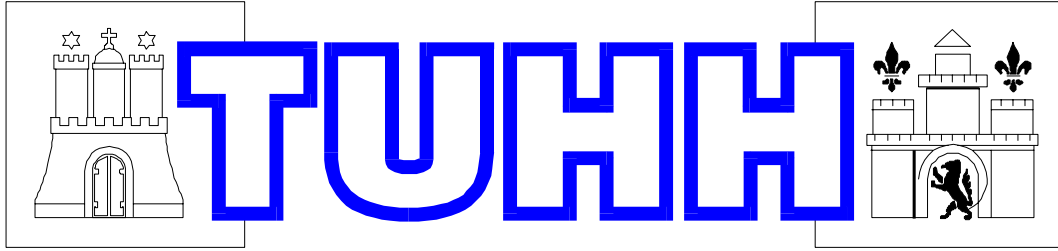


**TECHNISCHE UNIVERSITÄT**



**HAMBURG - HARBURG**

**Arbeitsbereich Mechanik I**

**Prof. Dr.-Ing. U. Weltin**

**Dipl.-Ing. C. Thomas / Dipl.-Ing. T. Steinweger**

**Vorlesungsmitschrift**

**Technische Mechanik I**

# **Statik**

**Stand WS 05/06**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b> .....	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Kraft</b> .....	<b>4</b>
2.1	Kraftvektor.....	4
2.2	Kräfte am Punkt in der Ebene.....	5
2.3	Beispiele (Zentrale Kräftesysteme).....	6
<b>3</b>	<b>Gleichgewicht des starren Körpers</b> .....	<b>11</b>
3.1	Moment.....	11
3.2	Momentenvektor.....	12
3.3	Gleichgewicht des starren Körpers im Raum.....	14
3.4	Beispiele.....	15
<b>4</b>	<b>Schwerpunkt</b> .....	<b>27</b>
4.1	Flächenschwerpunkt.....	31
<b>5</b>	<b>Fachwerke</b> .....	<b>34</b>
5.1	Knotenpunktverfahren.....	34
5.2	Ritter-Schnitt (Ritter'sches Schnittverfahren).....	36
5.3	Nullstäbe.....	37
<b>6</b>	<b>Stabilität von Gleichgewichtslagen</b> .....	<b>38</b>
6.1	Arbeitsbegriff in der Statik.....	38
6.2	Gleichgewichtslagen und deren Stabilität.....	40
6.3	Generalisierte Koordinaten.....	41
<b>7</b>	<b>Virtuelle Arbeit</b> .....	<b>43</b>
7.1	Virtuelle Verschiebung.....	43
7.2	Virtuelle Arbeit.....	43
7.3	Prinzip der virtuellen Verschiebung.....	43
<b>8</b>	<b>Haftung und Reibung</b> .....	<b>48</b>
8.1	Coulombsche Reibung.....	48
8.2	Haftung.....	48
8.3	Seilhaftung / Seilreibung.....	51
<b>9</b>	<b>Schnittgrößen am Balken</b> .....	<b>53</b>
<b>10</b>	<b>Empfohlene Literatur</b> .....	<b>58</b>

## 1 Vorwort

In der Vorlesung Mechanik I (Statik) werden die wichtigsten Grundlagen der Statik erläutert. Hierbei werden exemplarische Beispiele zum Vorlesungsstoff in der Vorlesung vorgerechnet. In der durch Tutoren betreuten Gruppenübung soll der Vorlesungsstoff durch selbständiges Rechnen der Übungsaufgaben vertieft werden.

Ziel der Veranstaltung ist, Studenten in die Lage zu versetzen, selbständig statische Probleme des Ingenieurwesens zu formulieren und zu lösen und damit die fachlichen Voraussetzungen für die Teilnahme an weiterführenden Fachvorlesungen zu erfüllen.

**Der stichwortartige Text der nachfolgenden Vorlesungsmitschrift ist nur zum Gebrauch während der Vorlesung bestimmt und macht weder die Teilnahme an der Vorlesung noch das ergänzende Literaturstudium überflüssig!**

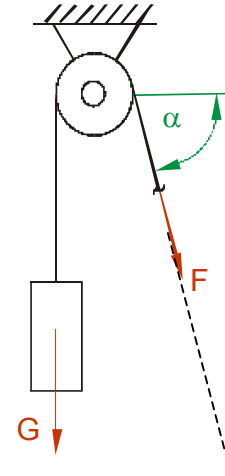
Leider kann trotz eingehender und gründlicher Prüfung nicht ausgeschlossen werden, dass sich Tippfehler eingeschlichen haben. Zur Beseitigung der Mängel bitten wir alle Studierenden diese Fehler den Tutoren der vorlesungsbegleitenden Gruppenübung mitzuteilen, damit diese baldigst korrigiert werden können.

## 2 Kraftbegriff

Eine Kraft ist eine physikalische Grösse die durch:

- Betrag
  - Richtung
  - Angriffspunkt
- } Wirkungslinie

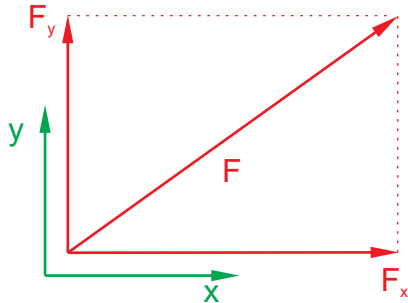
definiert ist.



### 2.1 Kraftvektor

Betrag und Richtung der Kraft können mathematisch als Vektor dargestellt werden

- in der Ebene:



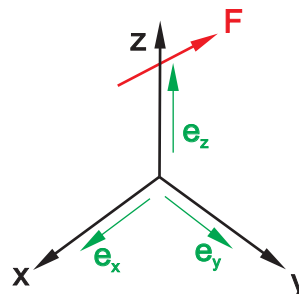
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

→ Richtungsvektoren  
→ Kraftkomponenten

- im Raum:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$



## 2.2 Kräfte am Punkt in der Ebene

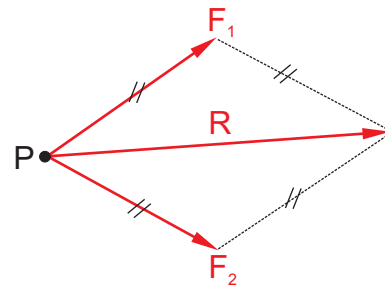
Zwei an einem Punkt P angreifende Kräfte können zu einer Resultierenden  $\vec{R}$  zusammengefasst werden.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix}$$

$$F_{1x} + F_{2x} = R_x$$

$$F_{1y} + F_{2y} = R_y$$



**Beispiel:**

$$\vec{F}_1 = \begin{Bmatrix} 2,2\text{N} \\ 1,5\text{N} \end{Bmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{Bmatrix} 1,5\text{N} \\ -2,9\text{N} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{R} = \begin{Bmatrix} 3,7\text{N} \\ -1,4\text{N} \end{Bmatrix}$$

Betrag der Resultierenden:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \approx 3,96\text{N}$$

### 2.2.1 Gleichgewicht am Punkt

Wenn die Resultierende der Kräfte an einem Punkt gleich Null ist, entsteht an diesem Punkt keine Wirkung (wie z. B. eine Bewegung) und man spricht von Gleichgewicht:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

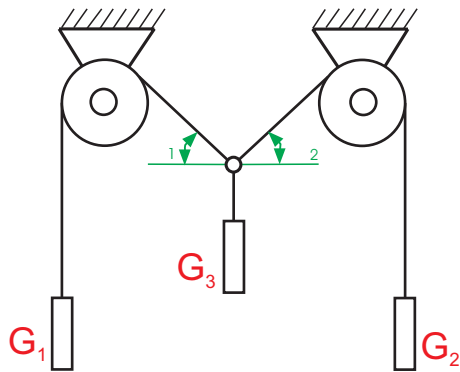
Gleichgewicht in Komponenten:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

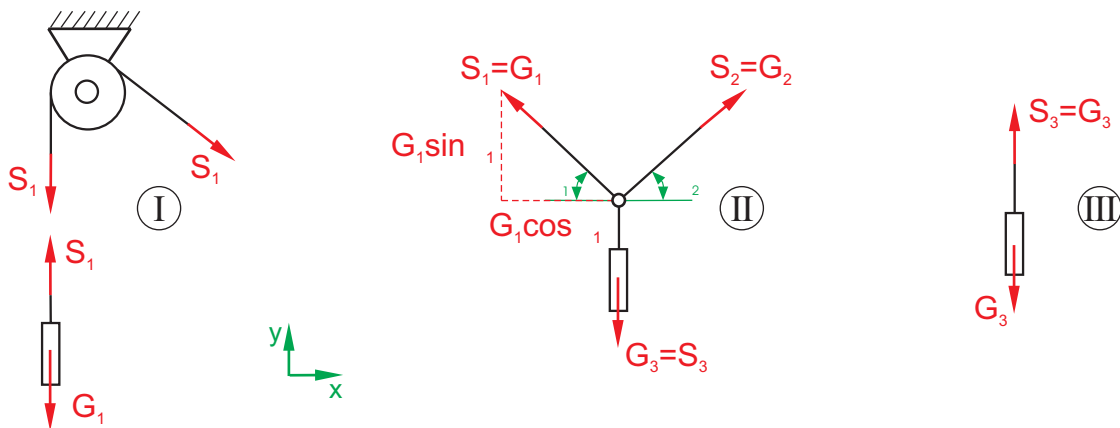
$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (\text{im Raum})$$

2.3 Beispiele (Zentrale Kräftesysteme)



Gegeben sind die Gewichte  $G_1$ ,  $G_2$ , und  $G_3$ , die sich in der gezeichneten Lage im Gleichgewicht befinden.  
Welche Winkel stellen sich an den Verbindungsseilen ein?

1) Freikörperbild:



2) Gleichgewicht:

Kräftegleichgewicht am Teilsystem II

$$\sum F_{ix} = 0 = -G_1 \cos \alpha_1 + G_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = G_1 \sin \alpha_1 + G_2 \sin \alpha_2 - G_3 \quad (2)$$

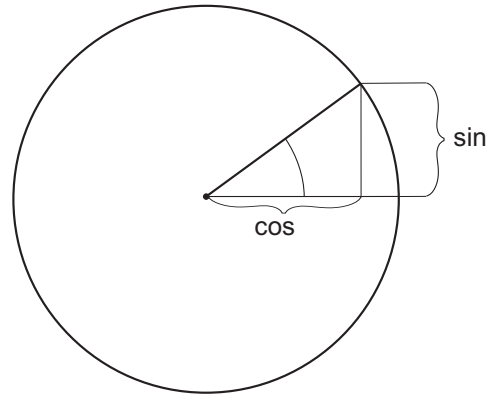
**Einschub:** Einheitskreis

nach Pythagoras:

$$R^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

mit  $R = 1$ :

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$



**3) Auflösung:**

$$\text{aus (1): } G_1^2 \cos^2 \alpha_1 = G_2^2 \cos^2 \alpha_2$$

$$\text{aus (2): } G_1^2 \sin^2 \alpha_1 = (G_3 - G_2 \sin \alpha_2)^2$$

$$(1)+(2): G_1^2 \left( \underbrace{\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1}_1 \right) = G_3^2 - 2G_2G_3 \sin \alpha_2 + G_2^2 \sin^2 \alpha_2 + G_2^2 \cos^2 \alpha_2$$

$$G_1^2 = G_2^2 + G_3^2 - 2G_2G_3 \sin \alpha_2$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{G_2^2 + G_3^2 - G_1^2}{2G_2G_3}$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \frac{G_2^2 + G_3^2 - G_1^2}{2G_2G_3} \right)$$

$$\text{aus (2): } G_1^2 \sin^2 \alpha_1 = \left( G_3 - \frac{G_2^2 + G_3^2 - G_1^2}{2G_3} \right)^2$$

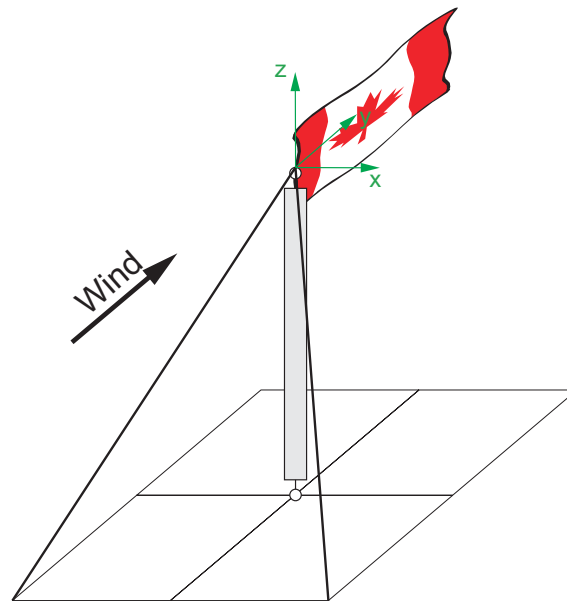
$$\alpha_1 = \arcsin \left( \frac{G_3 - \frac{G_2^2 + G_3^2 - G_1^2}{2G_3}}{G_1} \right)$$

$$= \arcsin \left( \frac{2G_3^2 - G_2^2 - G_3^2 + G_1^2}{2G_1G_3} \right)$$

$$= \arcsin \left( \frac{G_3^2 - G_2^2 + G_1^2}{2G_1G_3} \right)$$

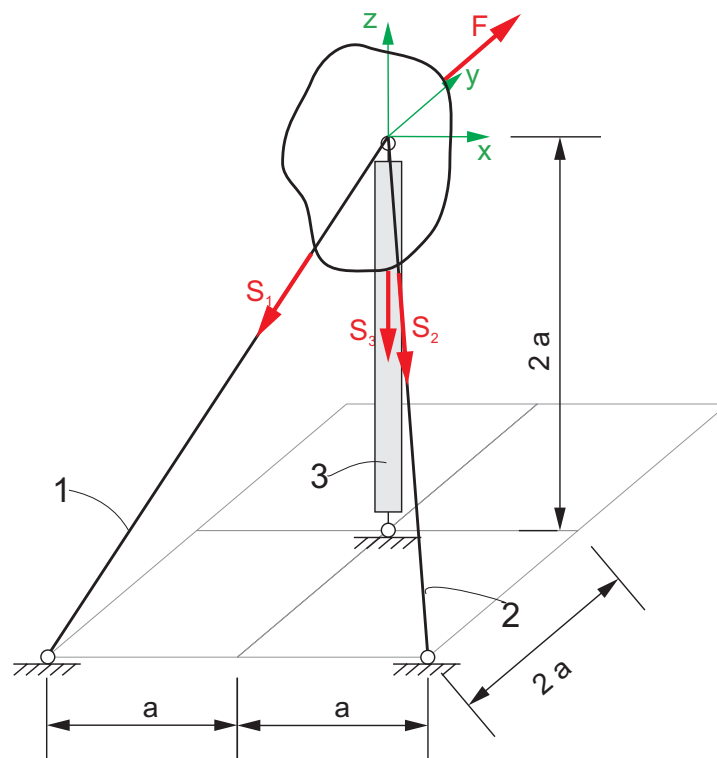
## 2. Beispiel: Zentrale Kräftegruppe im Raum

Gegeben:  
Flaggenmast mit Abmessungen  $a$  und der (Wind-) Kraft  $F$



Gesucht:  
Seilkräfte und Kraft im Flaggenmast

### 1) Freikörperbild:





2) Gleichgewicht (vektorielle Darstellung):

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{F}$$

mit:  $\vec{S}_1 = |\vec{S}_1| \cdot \vec{e}_{S1}$ ,  $\vec{S}_2 = |\vec{S}_2| \cdot \vec{e}_{S2}$ ,  $\vec{S}_3 = |\vec{S}_3| \cdot \vec{e}_{S3}$

dabei ist  $\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_{0P}}{|\vec{r}_{0P}|} = \frac{\text{Ortsvektor}}{\text{Betrag des Ortsvektors}} = \text{Richtungsvektor}$

angewendet auf  $\vec{e}_{S1}$ ,  $\vec{e}_{S2}$  und  $\vec{e}_{S3}$

So ergibt sich für  $\vec{S}_1$  ( $\vec{S}_2$ ,  $\vec{S}_3$  und  $\vec{F}$  entsprechend):

$$\vec{S}_1 = |\vec{S}_1| \cdot \vec{e}_{S1} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_{S1} = \frac{\vec{r}_{0P,S1}}{|\vec{r}_{0P,S1}|},$$

wobei  $\vec{r}_{0P,S1} = \begin{Bmatrix} -a \\ -2a \\ -2a \end{Bmatrix}$  und  $|\vec{r}_{0P,S1}| = \sqrt{(-a)^2 + (-2a)^2 + (-2a)^2} = 3a$  ist

Damit ist der Kraftvektor  $\vec{S}_1$  (mit  $S_1$  als Kurzschreibweise für  $|\vec{S}_1|$ ):

$$\vec{S}_1 = S_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{3a} \begin{Bmatrix} -a \\ -2a \\ -2a \end{Bmatrix}}_{\vec{e}_{S1}} = -\frac{S_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Es folgt:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{F}$$

$$S_1 \begin{Bmatrix} -a \\ -2a \\ -2a \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(-a)^2 + (-2a)^2 + (-2a)^2}} + S_2 \begin{Bmatrix} a \\ -2a \\ -2a \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(a)^2 + (-2a)^2 + (-2a)^2}} + S_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(-2a)^2}} + F \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$S_1 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix} + S_2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix} + S_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = -F \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) Auflösung:

$$\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}}^{(3,3)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}}^{(3,1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}}^{(3,1)} \\ \underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & S_1 = \frac{3}{4}F \\ \Rightarrow & S_2 = \frac{3}{4}F \\ & S_3 = -F \end{aligned}$$

**Einschub:** Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

- Vektor der rechten Seite (gegebene Belastung)
- Vektor der unbekannt (gesuchten) Seil und Stabkräfte  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$
- Koeffizienten- oder Systemmatrix (Systemstruktur)

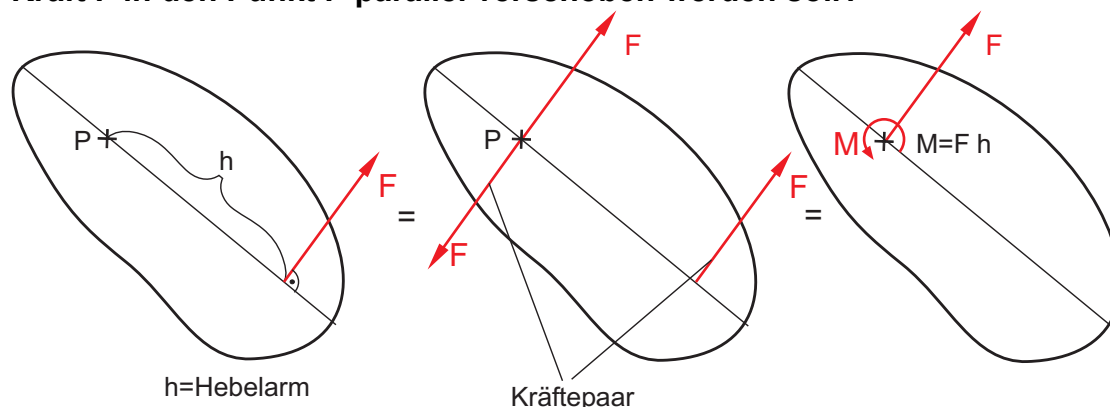
Lösung z.B. über Gauß-Algorithmus

### 3 Gleichgewicht des starren Körpers

#### 3.1 Moment

**Definition Kräftepaar:** 2 gleichgroße, entgegengesetzt wirkende Kräfte auf parallelen Wirkungslinien

**Beispiel:** Was muss im Sinne gleicher Wirkung beachtet werden, wenn die Kraft  $F$  in den Punkt  $P$  parallel verschoben werden soll?



Die Einzelkraft  $F$  hat in Bezug zum Punkt  $P$  eine linksdrehende Wirkung (erstes Bild). Das Hinzufügen zweier entgegengesetzter, gleichgroßer Kräfte am Punkt  $P$  ändert an der Wirkung nichts, die Summe aller Kräfte ist unverändert. Die Einzelkraft und eine der, im Abstand  $h$  hinzugefügten Kräfte bilden ein Kräftepaar, das die Drehwirkung der Kraft  $F$  abbildet (mittleres Bild). Die Drehwirkung des Kräftepaares wird als Moment  $M$  abgebildet (rechtes Bild).

Es gilt:

$$M = h \cdot F \quad \text{mit} \quad F : \text{Kraftbetrag} \\ h : \text{Hebelarm des Kräftepaares}$$

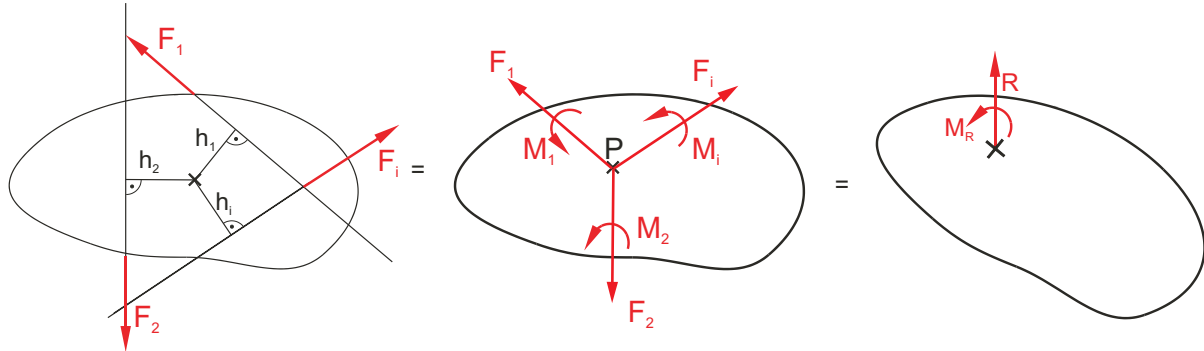
Definition des Momentes:

Ein **Moment  $M$**  hat:

- einen Betrag
- einen Drehsinn
- keine Wirkungslinie (d.h. das Kräftepaar kann ohne Änderung der Wirkung an beliebigen Stellen am Körper angreifen)

Einheit des Moments:  $\text{Nm} = \text{Newton-Meter}$

Genauso wie man mehrere Kräfte an einem Punkt P zu einer Resultierenden zusammenfassen kann, kann man deren Momente zu einem resultierenden Moment  $M_R$  zusammenfassen:



$h_i$ : jeweils das Lot der Wirkungslinie einer Kraft  $\vec{F}$  zum Punkt P bzw. Hebelarm der Kraft F.

Drehwirkung der Kräfte bezüglich des Punktes P

$$M_1 = h_1 \cdot F_1$$

$$M_2 = h_2 \cdot F_2$$

$$M_i = h_i \cdot F_i$$

Resultierenden Größen

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$M_R = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n h_i \cdot F_i$$

**Merke:** Eine Kraft hat keine Drehwirkung bzw. Moment bez. einer Drehachse, wenn

- die Wirkungslinie der Kraft durch die Drehachse zeigt
- oder die Kraft parallel zur Drehachse ist

### 3.2 Momentenvektor

Für räumliche Probleme kann das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes P mit Hilfe des Kreuzproduktes aufgestellt werden:

$$\vec{M}_i^{(P)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

mit  $\vec{M}_i^{(P)}$  : Momentenvektor bzgl. des Punktes P

$\vec{F}_i$  : Kraft

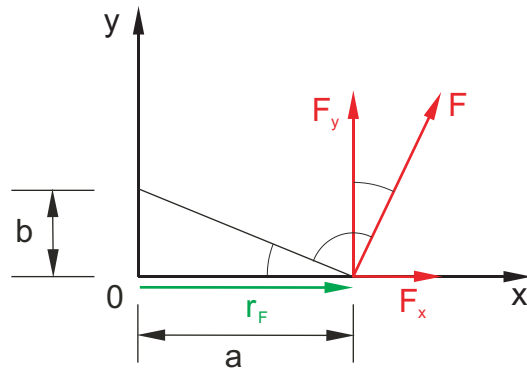
$\vec{r}_i$  : Ortsvektor vom Punkt P zur Wirkungslinie der Kraft  $\vec{F}_i$

Wie zuvor lassen sich einzelne Momentenvektoren zu einem resultierenden Moment zusammenfassen:

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

### Beispiel: Momentenvektor einer Kraft $F$ bezüglich des Koordinatenursprungs

Gesucht: Resultierendes Moment  $\vec{M}_R^{(0)}$



$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

als Komponente:  $M_R^{(0)} = F_y \cdot a = F \cdot \cos \alpha \cdot a = F \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\vec{M}_R^{(0)} = |\vec{r}_F| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_z$$

mir  $\varphi$  als einschließendem Winkel von Ortsvektor  $\vec{r}_F$  und Kraft  $\vec{F}$

Kreuzprodukt:  $\vec{M}_R = \vec{r}_F \times \vec{F}$

$$\vec{r}_F = a \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F$$

$$\vec{r}_F \times \vec{F} = \begin{pmatrix} r_{Fy} \cdot F_z - r_{Fz} \cdot F_y \\ -r_{Fx} \cdot F_z + r_{Fz} \cdot F_x \\ r_{Fx} \cdot F_y - r_{Fy} \cdot F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{Fx} \cdot F_y \end{pmatrix} \quad \text{hier im Beispiel:}$$

$F_x, F_y, r_{Fx} \neq 0$   
 $r_{Fy}, r_{Fz}, F_z = 0$

$$\Rightarrow |\vec{r}_F \times \vec{F}| = r_{Fx} \cdot F_y = a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot F$$

### 3.3 Gleichgewicht des starren Körpers im Raum

Ein nicht gebundener starrer Körper hat 6 Bewegungsmöglichkeiten bzw. Freiheitsgrade im Raum:

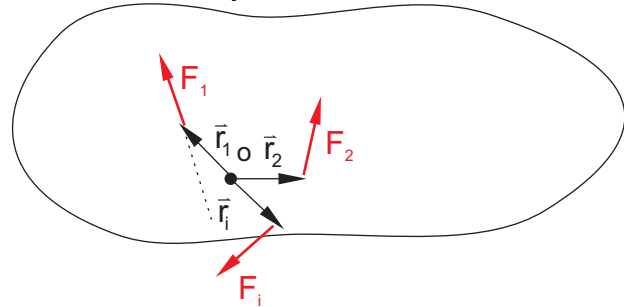
- 3 translatorische Freiheitsgrade entlang der Achsen x-, y- und z-
- 3 rotatorische Freiheitsgrade um die Achsen x-, y- und z-

Damit Gleichgewicht möglich ist, sind 6 Bindungen erforderlich. Diese Bindungen lassen sich mit den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{(0)} = \vec{0}$$

oder in Komponenten:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, & \sum M_{ix}^{(0)} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0, & \sum M_{iy}^{(0)} &= 0 \\ \sum F_{iz} &= 0, & \sum M_{iz}^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$



Berechnen: Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller angreifenden Kräfte und die Summe aller angreifenden Momente gleich Null ist!

Für ebene Probleme reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers auf 3 (2 Translationen + 1 Rotation). Dementsprechend stehen 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der drei Bindungen Verfügung:


$$\sum F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum F_{iy} = 0 \quad , \quad \sum M_{iz}^{(0)} = 0$$

### 3.4 Beispiele

Vorbereitung für die folgenden Aufgaben:


Lagersymbole:

Festlager: zweiwertiges Lager, d.h. es kann 2 Reaktionen übertragen. Es lässt eine Drehung, aber keine Verschiebung zu.

Symbol: 

Reaktionen: 

Loslager: einwertiges Lager, d.h. es kann nur 1 Reaktion übertragen. Es lässt sowohl eine Drehung als auch eine Verschiebung zu (hier horizontal, aber auch vertikal oder beliebige Anstellungen möglich).

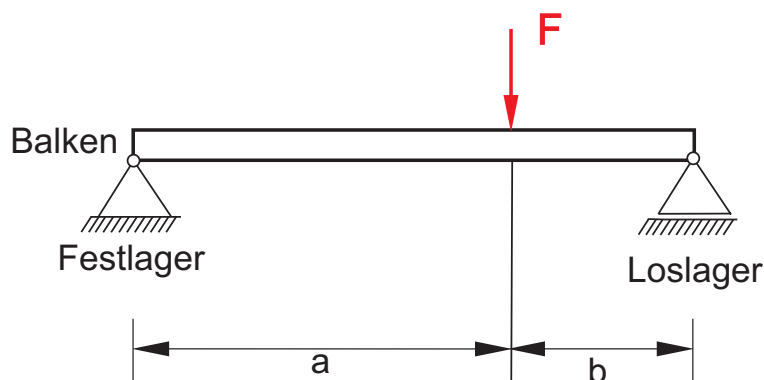
Symbol: 

Reaktion: 

### Beispiel: Träger auf zwei Lagern

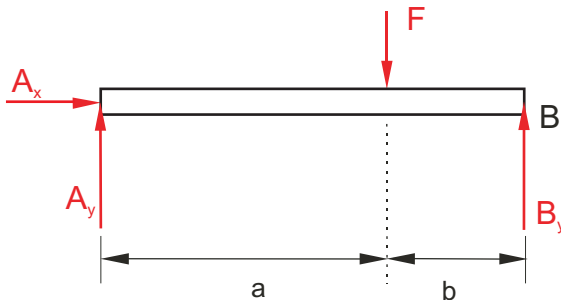
Gegeben ist ein durch eine Kraft  $F$  belasteter Balken, der mit einem Fest- und einem Loslager abgestützt wird.

#### Mechanisches Modell



Gesucht: Kräfte in den Lagern

### 1) Freikörperbild:



### 2) Gleichgewicht:

$$\sum F_{ix} = 0 = \underline{\underline{A_x}} \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = A_y + B_y - F \quad (2)$$

$$\sum M_i^{(A)} = 0 = \underbrace{(a+b)}_{=h_{B_y}} \cdot B_y - \underbrace{a}_{=h_F} \cdot F \quad (3)$$

$M^{(A)}$ : Moment um Punkt A

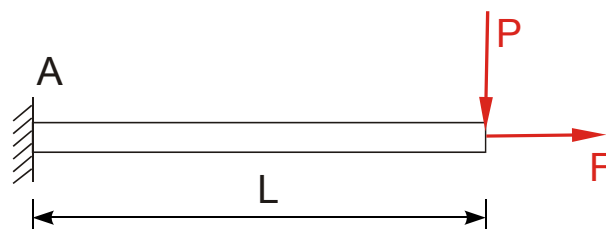
$h_{B_y}$  und  $h_F$ : Hebelarme der Kräfte  $B_y$  und  $F$  zum Punkt A

### 3) Auflösen:

aus (3) 
$$\underline{\underline{B_y = \frac{a}{a+b} F}}$$

aus (2) 
$$A_y = -B_y + F = -\frac{a}{a+b} F + F = \frac{-a+a+b}{a+b} \cdot F = \underline{\underline{\frac{b}{a+b} \cdot F}}$$

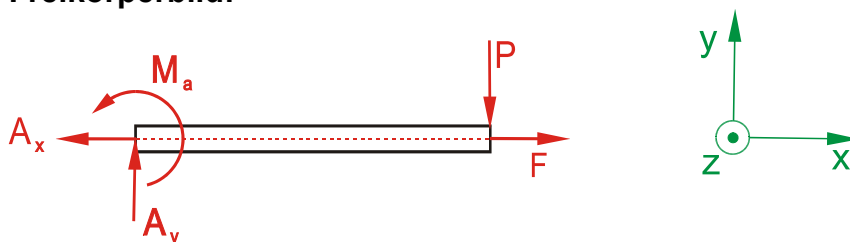
### Beispiel: Träger mit fester Einspannung



Gegeben:  $\vec{P}, \vec{F}$

Gesucht: Kräfte in A

### 1) Freikörperbild:





### 2) Gleichgewicht:

$$\sum F_{ix} = 0 = -A_x + F \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = A_y - P \quad (2)$$

$$\sum M_i^{(A)} = 0 = M_a - P \cdot L \quad (3)$$

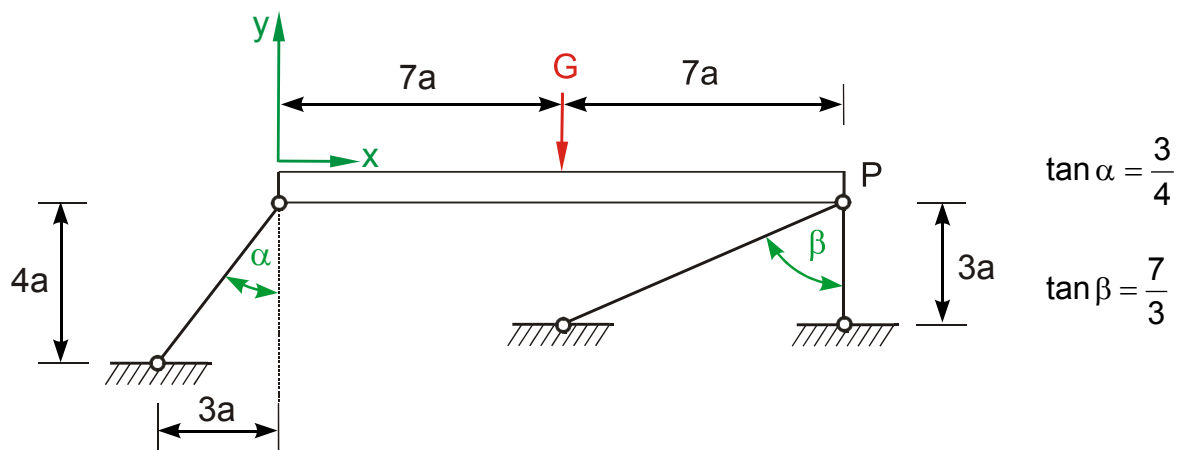
### 3) Auflösen:

aus (1):  $\underline{\underline{A_x = F}}$

aus (2):  $\underline{\underline{A_y = P}}$

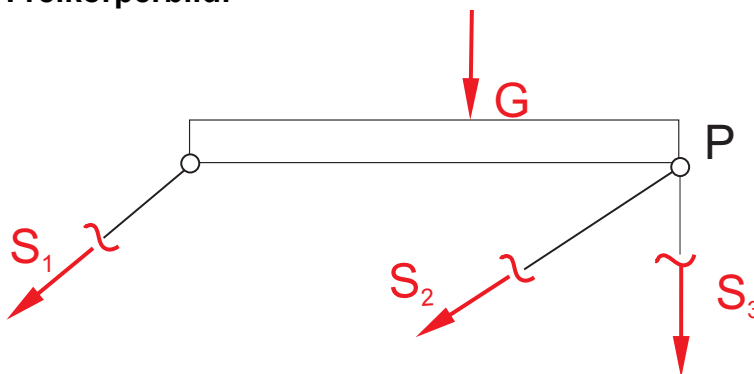
aus (3):  $\underline{\underline{M_a = P \cdot L}}$

### Beispiel (2D): Balken auf 3 Stützen



Wie groß sind die Kräfte in den Stützen?

### 1) Freikörperbild:



### 2) Gleichgewicht:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{G}$$

$$\vec{S}_1 = S_1 \frac{1}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} \begin{Bmatrix} -3a \\ -4a \end{Bmatrix} = S_1 \begin{Bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{S}_2 = S_2 \frac{1}{\sqrt{(7a)^2 + (3a)^2}} \begin{Bmatrix} -7a \\ -3a \end{Bmatrix} = S_2 \begin{Bmatrix} -7/\sqrt{58} \\ -3/\sqrt{58} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{S}_3 = S_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{G} = G \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Bezugspunkt für Momentengleichgewicht so wählen, dass möglichst die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  zu den Wirkungslinien der Kräfte  $\vec{F}_i$  zu Nullvektoren werden.

Hier:  $\vec{r}_2, \vec{r}_3 = \vec{0}$ , wenn P als Bezugspunkt gewählt wird.

$$\sum M_i^{(P)} = \vec{0} = \vec{r}_1 \times \vec{S}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{S}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{S}_3 + \vec{r}_g \times \vec{G}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{Bmatrix} -14a \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{r}_g = \begin{Bmatrix} -7a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 3) Auflösen:

$$\sum M_i^{(P)} = \vec{0} = \vec{r}_1 \times \vec{S}_1 + \vec{r}_g \times \vec{G}$$

$$\vec{r}_g \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -7a & 0 & 0 \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ -7a & 0 \\ 0 & -G \end{vmatrix} = 7aG\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -14a & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5}S_1 & -\frac{4}{5}S_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ -14a & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5}S_1 \end{vmatrix} = \frac{56}{5}aS_1\vec{e}_z$$

$$\sum M_z = 0 = \frac{56}{5}aS_1 + 7aG$$

$$\sum F_{ix} = 0 = -\frac{3}{5}S_1 - \frac{7}{\sqrt{58}}S_2$$

3 Gleichungen  $\rightarrow$  3 Unbekannte!

$$\sum F_{iy} = 0 = -\frac{4}{5}S_1 - \frac{3}{\sqrt{58}}S_2 - G - S_3$$

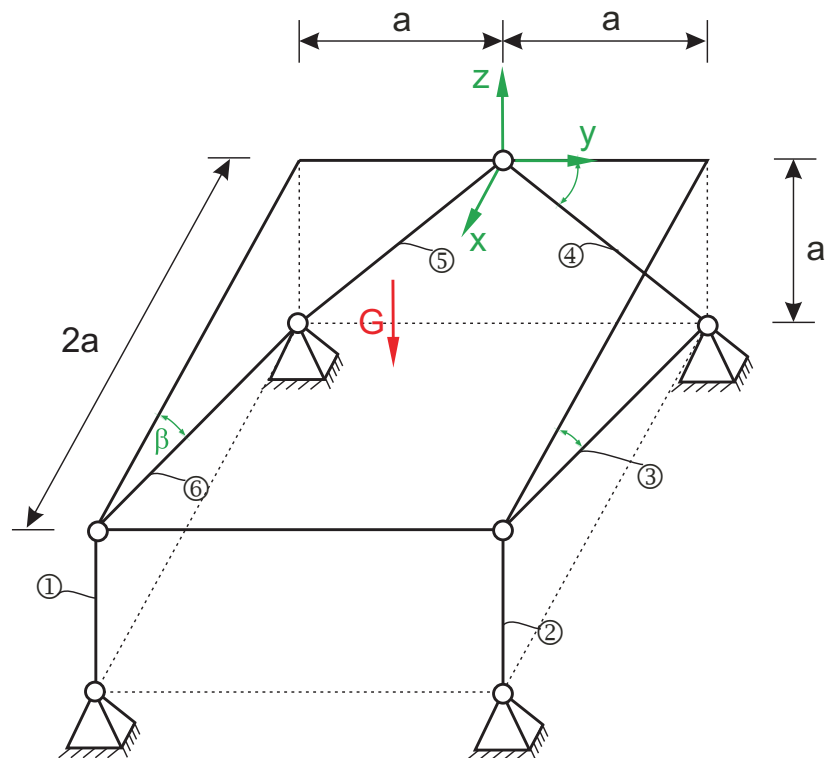
### Beispiel (3D): Tisch auf 6 Stützen

Ein Tisch auf 6 Stützen wird durch das Eigengewicht der Tischplatte belastet.

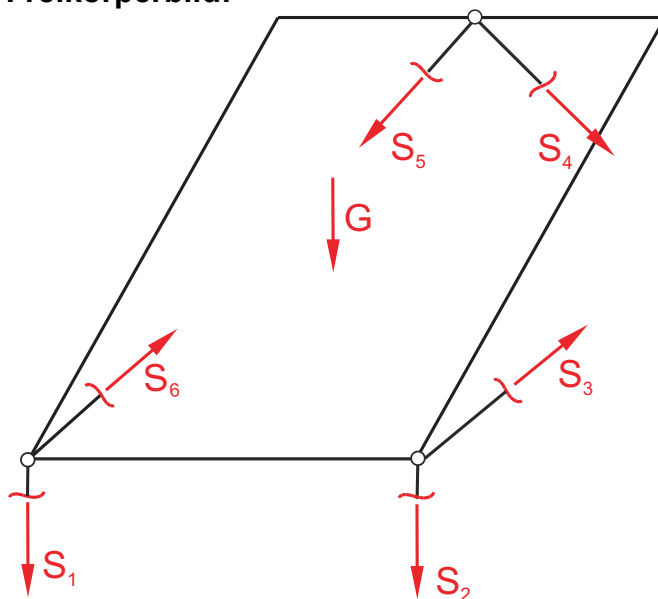
Gesucht:  $S_1, \dots, S_6$

Vorgehen (allgemein):

- 1) Freikörperbild
- 2) Gleichgewicht
- 3) Auflösen



#### 1) Freikörperbild:



a) ohne Symmetrie:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 + \vec{G} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M}_i = \vec{0} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_1 \times \vec{S}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{S}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{S}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{S}_4 + \vec{r}_5 \times \vec{S}_5 + \vec{r}_6 \times \vec{S}_6 + \vec{r}_g \times \vec{G} \quad (2)$$

Gewichtskraft und Stabkräfte:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_1 = S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_2 = S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_3 = S_3 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{S}_4 = S_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_5 = S_5 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_6 = S_6 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Momentenvektoren werden die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  bzgl. des Drehpunktes (hier Ursprung) benötigt:

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_6 = \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_g = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich die Momentenvektoren  $\vec{r}_i \times \vec{S}_i$  bestimmen:

$$\vec{r}_1 \times \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-0 \\ 2a-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} S_1 \cdot a$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-0 \\ 2a-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} S_2 \cdot a$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{S_3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-0 \\ 2a-0 \\ 0+2a \end{pmatrix} \frac{S_3}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{S_3 \cdot a}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{S}_4 = \vec{r}_5 \times \vec{S}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_6 \times \vec{S}_6 = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{S_6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{S_6 \cdot a}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{r}_g \times \vec{S}_G = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} G \cdot a$$

damit ergeben sich aus (1):

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} S_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{S_3}{\sqrt{5}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{S_4}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{S_6}{\sqrt{5}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} G$$

und aus (2):

$$\sum M_i = \vec{0} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} S_1 \cdot a + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} S_2 \cdot a + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{S_3 \cdot a}{\sqrt{5}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{S_6 \cdot a}{\sqrt{5}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} G \cdot a$$

Durch Übertragen in Matrixschreibweise ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & \frac{S_3}{\sqrt{5}} & \frac{S_4}{\sqrt{2}} & \frac{S_5}{\sqrt{2}} & \frac{S_6}{\sqrt{5}} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \frac{S_3}{\sqrt{5}} \\ \frac{S_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{S_5}{\sqrt{2}} \\ \frac{S_6}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \\ 0 \\ -G \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2) Auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & G \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & -G \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{matrix} S_3 = -S_6 \\ S_4 = S_5 \\ S_1 = S_2 \\ S_3 = S_6 \end{matrix}$$

aus (3) und (8):  $S_3 = S_6 = 0$  (9)

aus (7) mit (9) und (6):  $2S_1 + 2S_2 = -G$

$$S_1 = S_2 = -\frac{G}{4}$$
 (10)

aus (5) mit (10) und (4):

$$\frac{G}{4} + \frac{G}{4} - \frac{S_4}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} = G$$

$$-\frac{2 \cdot S_4}{\sqrt{2}} = \frac{G}{2}$$

$$S_4 = S_5 = -\frac{\sqrt{2} G}{4} = -\frac{G}{2\sqrt{2}}$$

b) unter Beachtung der Symmetrie:

$$S_5 = S_4$$

$$S_1 = S_2$$

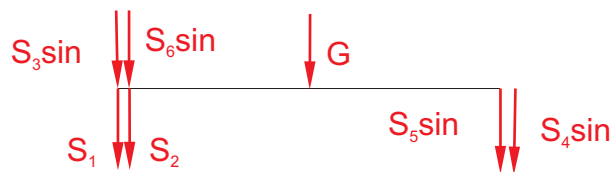
$$S_3 = S_6$$

$$\sum F_{ix} = 0 = -S_6 \cos \beta - S_3 \cos \beta$$

$$\rightarrow -S_6 = S_3 \Rightarrow$$

$$\boxed{S_3 = S_6 = 0}$$

Seitenansicht:



$$S_1 = S_2 = S_5 \sin \alpha = S_4 \sin \alpha$$

$$\sum F_{iz} = 0 = -S_1 - S_2 - S_5 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha - G$$

$$\rightarrow S_1 = S_2 = S_5 \sin \alpha = S_4 \sin \alpha = -\frac{G}{4}$$

$$\rightarrow S_4 = S_5 = -\frac{G}{4 \sin \alpha}$$

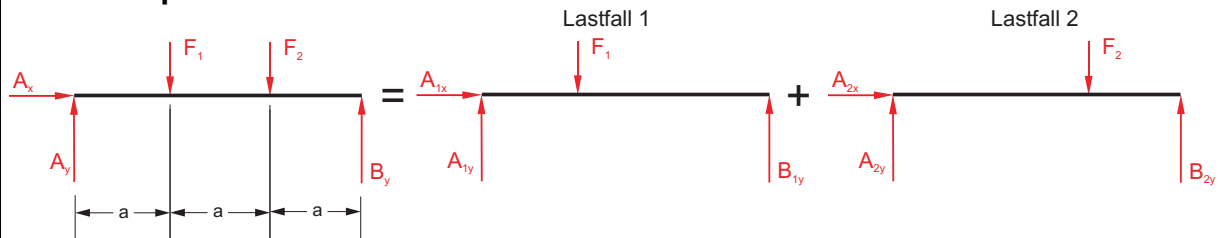
$$\text{mit } \alpha = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\boxed{S_4 = S_5 = -\frac{G}{2\sqrt{2}}}$$

### **Einschub:** Superposition

Superposition ist die Zusammensetzung einzelner (in der Regel einfacher) Lastfälle zum Gesamt- Lastsystem:

### **Beispiel:**



Die Lagerreaktion des Gesamtsystems ergibt sich aus der Summe der Lagerreaktionen der einzelnen Lastfälle:

$$A_y = A_{1y} + A_{2y}$$

$$A_x = A_{1x} + A_{2x}$$

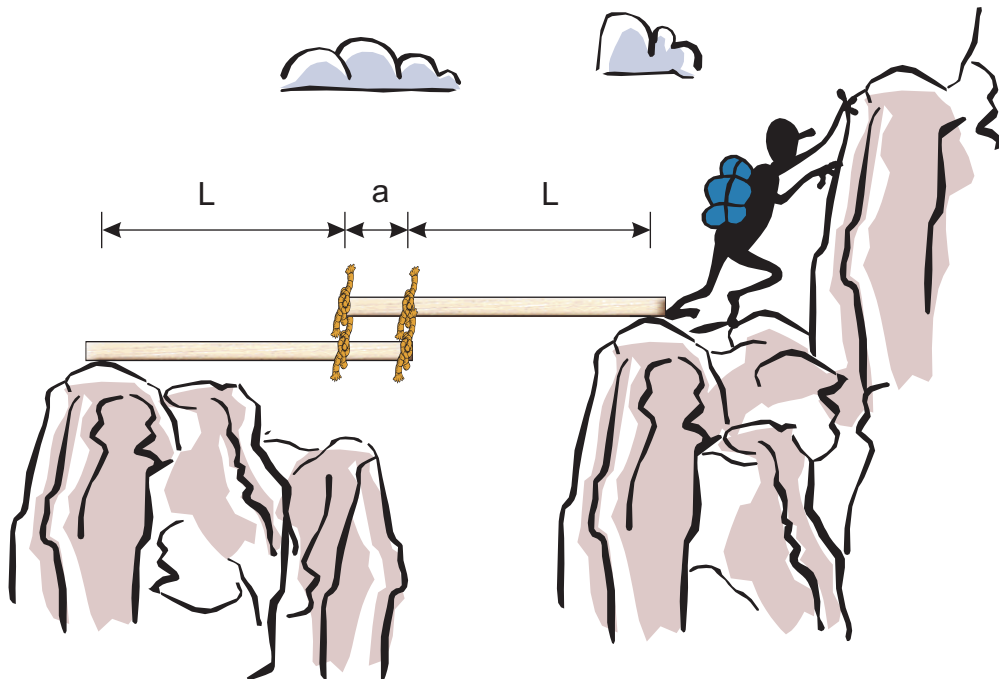
$$B_y = B_{1y} + B_{2y}$$

**Achtung!** Das Superpositionsprinzip gilt nur für lineare Systeme.  
(In der Vorlesung TM I werden fast nur lineare Systeme betrachtet.)

### **Beispiel:**

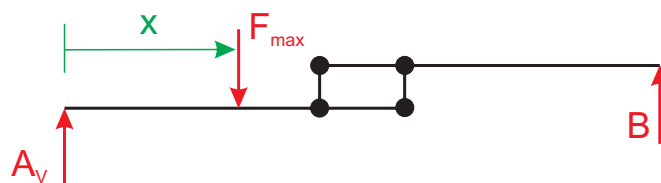
Eine Gruppe Wanderer möchte trockenen Fußes einen Bach überqueren. Dazu verbinden sie zwei zufällig dort liegende Äste mit den Strümpfen eines Gruppenmitglieds. Sie kneten die Fußenden von Socke 1 und 2 im Abstand  $a$  zueinander an Ast I und die anderen Enden der Socken an Ast II und legen diese Konstruktion ( $L = 4\text{m}$ ,  $a = 1\text{m}$ ) über den Bach. Freundlicherweise steht im Wäscheschild der Strümpfe deren zulässige Zugkraft  $F_{zul} = 500\text{N}$ . Der schwerste Wanderer wiegt  $90\text{kg}$ .

Können die Wanderer den Bach trocken überqueren? (Gesucht ist also die maximale in den Strümpfen auftretende Zugkraft.)



**Schritt 1:** Berechnung der Lagerreaktionen

1) Freikörperbild:



2) Gleichgewicht und Auflösen:

$$\sum M^B = 0 = A_v(2L + a) - F_{\max}(2L + a - x)$$

$$A_v = F_{\max} \frac{2L + a - x}{2L + a}$$

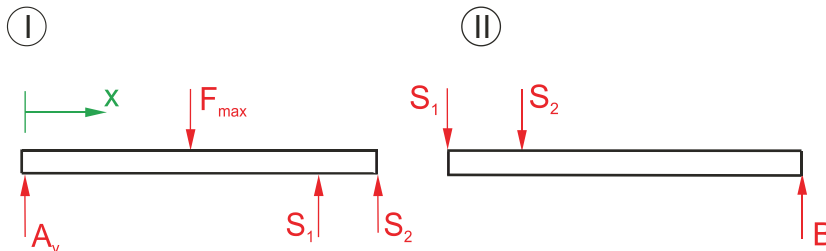
$$\sum M^{A_v} = 0 = F_{\max} \cdot x - B(2L + a)$$

$$B_v = F_{\max} \frac{x}{2L + a}$$

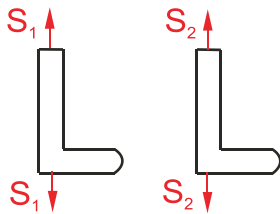


### Schritt 2: Berechnung der Kräfte in den Strümpfen

#### 1) Freikörperbild:



Freikörperbild der Strümpfe:



#### 2) Gleichgewicht und Auflösen:

$$\sum M_i^{(S_1)} = 0 = A_v \cdot L - F_{\max} (L - x) - S_2 \cdot a$$

$$\Rightarrow S_2 = A_v \cdot \frac{L}{a} - F_{\max} \frac{L - x}{a} = F_{\max} \frac{2L + a - x}{2L + a} \cdot \frac{L}{a} - F_{\max} \frac{(L - x)}{a}$$

$$\sum M_i^{(S_2)} = 0 = A_v (L + a) - F_{\max} (L + a - x) + S_1 \cdot a$$

$$\Rightarrow S_1 = F_{\max} \frac{(L + a - x)}{a} - A_v \frac{L + a}{a} = F_{\max} \frac{(L + a - x)}{a} - F_{\max} \frac{2L + a - x}{2L + a} \cdot \frac{L + a}{a}$$

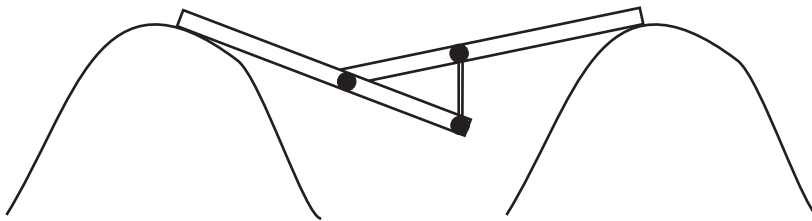
Wie groß ist die Kraft  $S_1$ , wenn der dickste Wanderer auf dem ersten Strumpf steht?

$$S_1(x = L) = F_{\max} - F_{\max} \frac{(L + a)^2}{(2L + a) \cdot a} = F_{\max} \frac{(2L + a) \cdot a - (L + a)^2}{(2L + a) \cdot a} = F_{\max} \frac{-L^2}{(2L + a) \cdot a} < 0$$

Hat die Wanderergruppe eine Konstruktion gewählt, die die zulässige Zugkraft der Strümpfe maximal ausnutzt?

Nein!

Strumpf 1 wird nur durch Druckkräfte beansprucht. Da die Strümpfe keine Druckkräfte aufnehmen können, ist Position 1 kein sinnvoller Ort. Die Äste stützen sich an dieser Stelle gegenseitig ab, ohne dass Strumpf 1 belastet wird. Geeigneter ist die Anordnung beider Strümpfe an Punkt 2 (siehe Skizze).



Damit die Konstruktion in dieser Anordnung die Wanderer sicher trägt, muss  $S_2 < 2 \cdot F_{zul}$  sein.

$$S_2 = F_{\max} \frac{2L + a - x}{2L + a} \cdot \frac{L}{a} - F_{\max} \frac{(L - x)}{a} < 2 \cdot F_{zul}$$

$$F_{\max} \frac{L + a}{2L + a} \cdot \frac{x}{a} < 2 \cdot F_{zul}$$

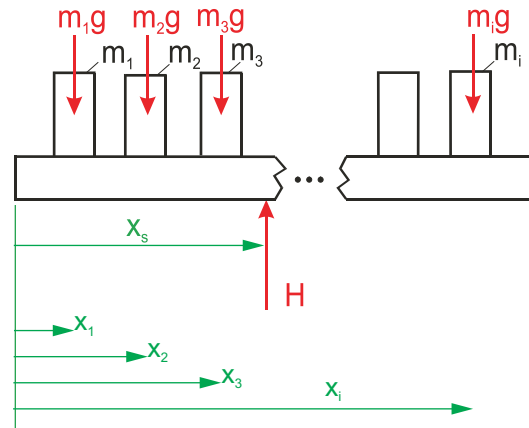
Die Strümpfe reißen also bei

$$x \geq \frac{2 \cdot F_{zul}}{F_{\max}} \cdot \frac{(2L + a) \cdot a}{L + a} = \frac{2 \cdot 500}{90 \cdot 9,81} \cdot \frac{(8 + 1) \cdot 1}{4 + 1} \approx 2\text{m}$$

Auch diese Konstruktion sollte der schwerste Wanderer nicht betreten!

## 4 Schwerpunkt

An welcher Stelle und mit welcher Kraft  $H$  muss das gewichtslose Brett unterstützt werden, damit es sich im Gleichgewicht befindet?



**Gleichgewicht:**

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{iv} = 0 &= H - \sum_{i=1}^n m_i g & \Rightarrow & H = \sum_{i=1}^n m_i g \\ \sum M_i^{(0)} = 0 &= H \cdot x_s - \sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i g & \Rightarrow & x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i g}{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}}$$

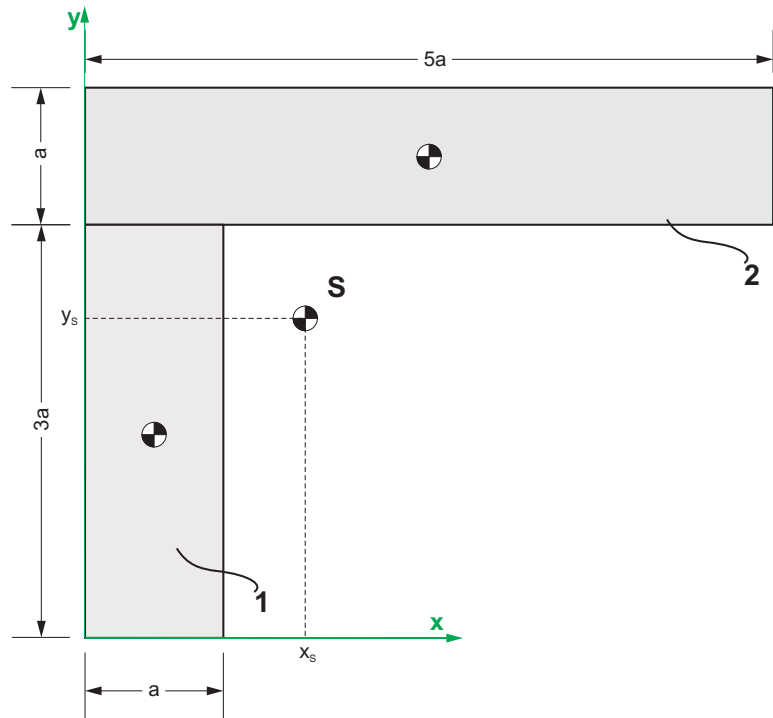
Entsprechend gilt für die anderen Koordinatenrichtungen:

$$\boxed{y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}}$$

$$\boxed{z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}}$$

### Beispiel: Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen

Gesucht:  
Koordinaten  $x_S$ ,  $y_S$  des  
Gesamtschwerpunkts



Schwerpunktstabelle:

Körper i	$x_i$	$y_i$	$m_i$	Statische Momente	
				$x_i \cdot m_i$	$y_i \cdot m_i$
1	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$A_1 \cdot t_1 \cdot \rho_1 \hat{=} 3a^2$	$\frac{3}{2}a^3$	$\frac{9}{2}a^3$
2	$\frac{5a}{2}$	$\frac{7a}{2}$	$A_2 \cdot t_2 \cdot \rho_2 \hat{=} 5a^2$	$\frac{25}{2}a^3$	$\frac{35}{2}a^3$
$\Sigma =$			$8a^2$	$\frac{28}{2}a^3$	$\frac{44}{2}a^3$

Damit ergibt sich:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\frac{28}{2}a^3}{8a^2} = \frac{14}{8}a = \frac{7}{4}a$$

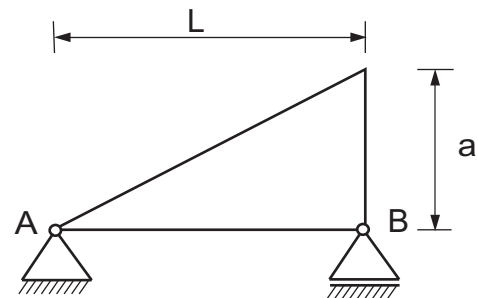
$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\frac{44}{2}a^3}{8a^2} = \frac{22}{8}a = \frac{11}{4}a$$

### Beispiel: Dreieckslast

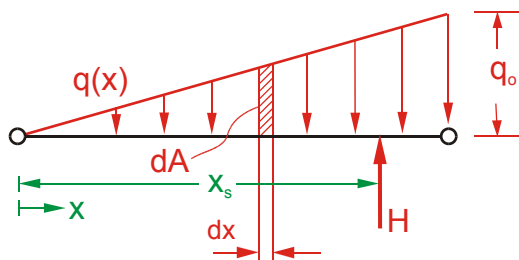
Gesucht: Kräfte in A und B

Gegeben: Dreiecksförmige Platte

- 1)  $a = 2\text{m}$
- 2)  $L = 4\text{m}$
- 3)  $t = 20\text{cm}$  (Dicke)
- 4)  $\rho = 7810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  (Dichte)



### Gleichgewicht mit Ersatzkraft:



Mit:

$$q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{L} \quad [\text{N/m}]$$

$$dA = q(x) \cdot dx$$

$$\sum F_{iv} = 0 = H - \int_0^L q(x) dx \quad \Rightarrow \quad H = \int_0^L q(x) dx = \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{q_0}{2} L$$

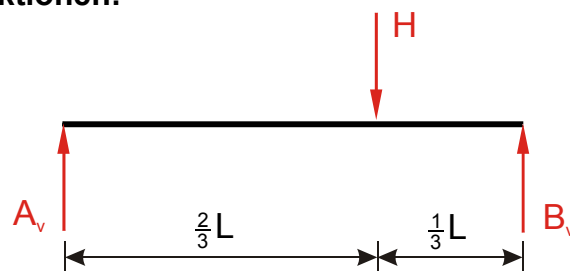
$$\sum M_i^{(0)} = 0 = \int_0^L x \cdot q(x) dx - H \cdot x_s \quad \Rightarrow \quad H \cdot x_s = \int_0^L x \cdot q(x) dx = \int_0^L x \cdot q_0 \cdot \frac{x}{L} dx = \frac{q_0}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$H \cdot x_s = \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = q_0 \frac{L^2}{3}$$

Damit ergibt sich:

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot q(x) dx}{\int_0^L q(x) dx} = \frac{q_0 \frac{L^2}{3}}{q_0 \frac{L}{2}} = \frac{2}{3} L$$

### Lagerreaktionen:



$$A_v = \frac{1}{3} H$$

$$B_v = \frac{2}{3} H$$

### Alternative Lösung:

Bestimmung der Flächenlast  $q$  (äquivalente Dreiecksfläche), die das Gewicht des Dreiecks repräsentiert. Dazu wird zunächst die Gewichtskraft  $G$  aus dem Gesamtgewicht ermittelt:

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot \frac{L \cdot a}{2} \cdot t \cdot g$$

$$\begin{aligned} \text{Dreiecksfläche: } G &\triangleq \frac{1}{2} q_0 L & \Leftrightarrow & \quad q_0 = 2 \cdot \frac{G}{L} \\ & \rightarrow q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{L} = 2 \cdot \frac{G}{L} \cdot \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Bestimmung des Schwerpunktsabstands  $x_s$ :

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\int x \cdot q(x) dx}{\int q(x) dx} \\ \int_0^L x \cdot q(x) dx &= \int_0^L 2 \frac{G}{L^2} x^2 dx = \frac{2 G}{3 L^2} x^3 \Big|_0^L = \frac{2}{3} GL \\ \int_0^L q(x) dx &= 2 \frac{G}{L^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = G \\ \Rightarrow x_s &= \frac{\frac{2}{3} GL}{G} = \frac{2}{3} L \end{aligned}$$

### 4.1 Flächenschwerpunkt

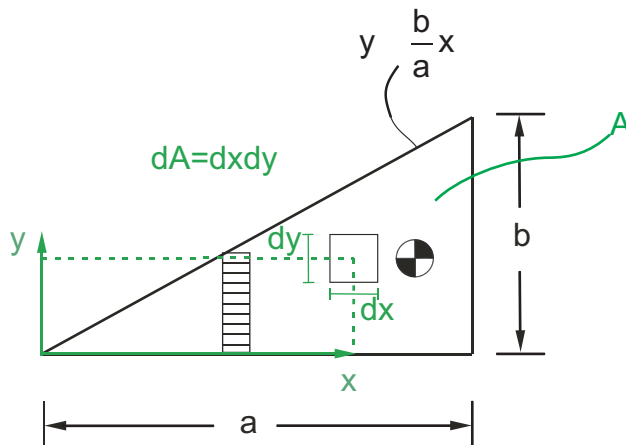
$$x_s = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Formal:

$A = \int dA = \int \left( \int dy \right) dx \Rightarrow$  Summation an über  $y$  einer beliebigen Stelle  $x$

$A = \int dA = \int \left( \int dx \right) dy \Rightarrow$  Summation über  $x$  an einer beliebigen Stelle  $y$

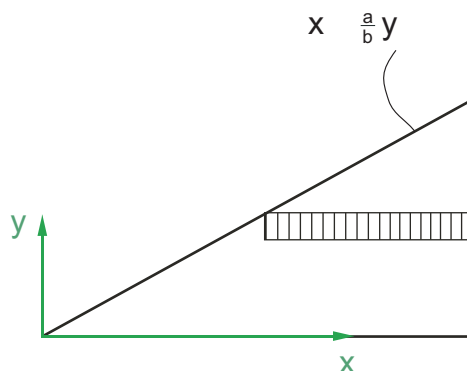
a) Summation zunächst über  $y$ :



$$A = \int_0^a \left( \int_0^{y=\frac{b}{a}x} dy \right) dx = \int_0^a \left( y \Big|_0^{\frac{b}{a}x} \right) dx = \int_0^a \frac{b}{a} x dx$$

$$= \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^a \right) = \frac{b}{a} \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} ab$$

b) Summation zunächst über  $x$



$$A = \int_0^b \left( \int_{\frac{a}{b}y}^a dx \right) dy = \int_0^b \left( x \Big|_{\frac{a}{b}y}^a \right) dy$$

$$= \int_0^b \left( a - \frac{a}{b} y \right) dy = a \cdot y - \frac{a}{2b} \cdot y^2 \Big|_0^b$$

$$= ab - \frac{a}{2b} b^2 = ab - \frac{a}{2} b = \frac{1}{2} ab$$

Zur Schwerpunktsberechnung fehlt noch das „statische Moment“  $\Rightarrow \int x dA$ :

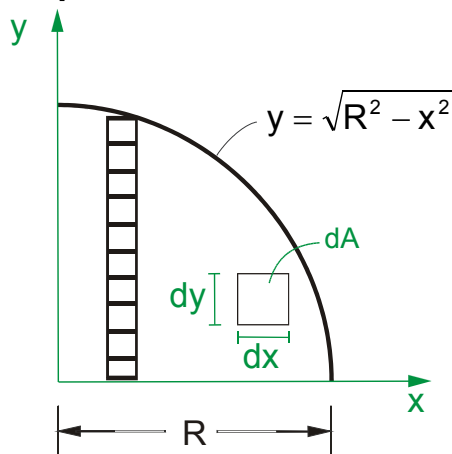
$$\int x dA = \int_0^a \left( \int_0^{\frac{b}{a}x} x dy \right) dx = \int_0^a x \cdot \left( \int_0^{\frac{b}{a}x} dy \right) dx = \int_0^a x \cdot \left( \frac{b}{a} x \right) dx = \int_0^a \frac{b}{a} x^2 dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot a^2$$

oder alternativ:

$$\begin{aligned} \int x dA &= \int_0^b \left( \int_{\frac{a}{b}y}^a x dx \right) dy = \int_0^b \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} y^2 \right) dy \\ &= \left( \frac{1}{2} a^2 y - \frac{1}{6} \frac{a^2}{b^2} y^3 \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2} a^2 b - \frac{1}{6} a^2 b = \frac{1}{3} a^2 b \end{aligned}$$

Damit: 
$$x_s = \frac{\frac{1}{3} a^2 b}{\frac{1}{2} ab} = \frac{2}{3} a$$

### Beispiel: Kreis in kartesischen Koordinaten



Kreisgleichung:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$dA = dx \cdot dy$$

$$A = \int_A dA = \int_0^R \left( \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right) \Big|_0^R$$

Lösung aus Integraltafel (z.B. Bronstein)

$$= \frac{1}{2} \left( \left( R \sqrt{R^2 - R^2} - 0 \sqrt{R^2 - 0^2} \right) + R^2 \left( \arcsin \frac{R}{R} - \arcsin \frac{0}{R} \right) \right) = \frac{R^2}{2} \arcsin(1) = \frac{R^2 \pi}{4}$$



### Statisches Moment:

$$\int x dA = \int_0^R x \cdot \left( \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^R x \cdot \sqrt{R^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} \underbrace{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R}_{\text{Lösung aus Integraltafel}} = \frac{1}{3} R^3$$

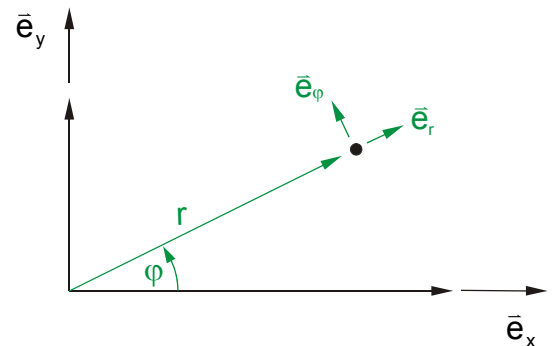
### Schwerpunkt:

$$x_s = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{3} R^3}{\frac{R^2 \pi}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

### Beispiel: Kreis in Polarkoordinaten

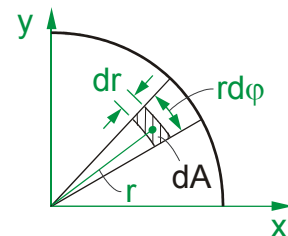
Dabei gilt folgender Zusammenhang zwischen Kart. Koordinaten  $(\bar{e}_x, \bar{e}_y)$  und Polarkoordinaten  $(\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi)$ :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi &= r^2 \end{aligned}$$



$$dA = r \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$A = \int_A dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{R^2}{2} \right) d\varphi = \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{R^2 \pi}{4}$$



### Statisches Moment:

$$\int x \cdot dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{R^3}{3} \right) \cos \varphi d\varphi = \left( \frac{R^3}{3} \right) \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3}$$

### Schwerpunkt:

$$x_s = \frac{4R}{3\pi}$$

Aus Symmetriegründen gilt:  $y_s = x_s$

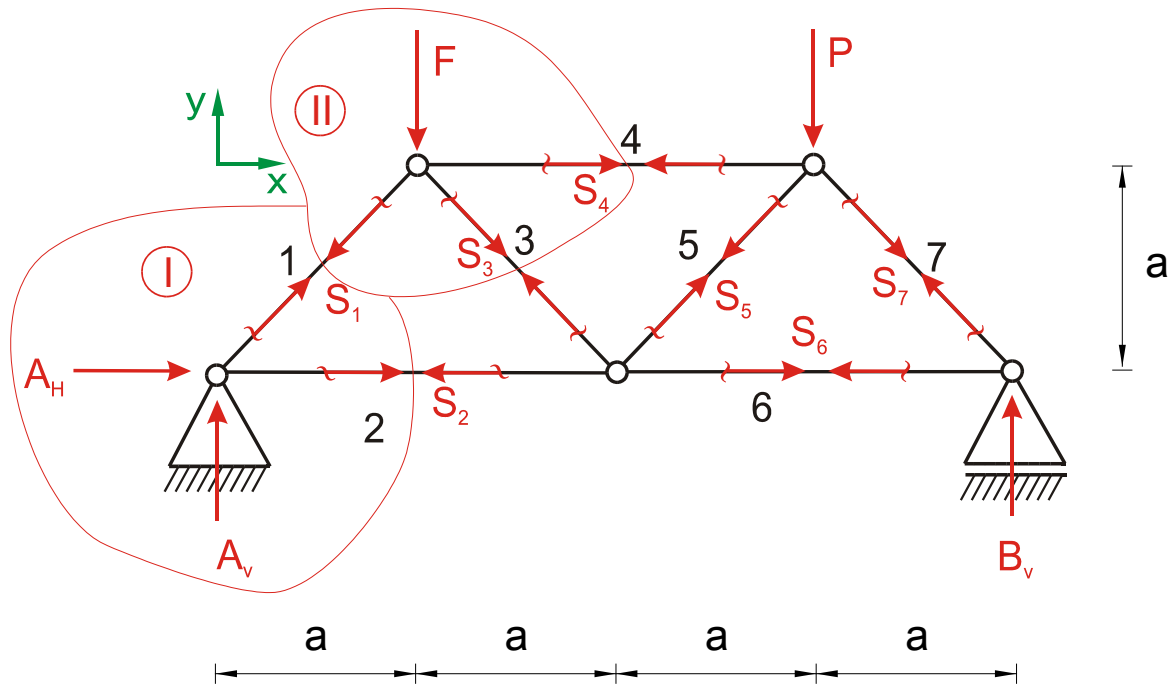
Über die Rücktransformation mit  $x_s = r_s \cos \varphi_s$ ,  $y_s = r_s \sin \varphi_s$  findet man schließlich:

$$r_s = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R \quad \text{und} \quad \varphi_s = \frac{\pi}{4}$$

## 5 Fachwerke

Einleitende Fragestellung:

Gegeben ist das folgende aus Stäben zusammengesetzte Tragwerk



Gesucht: Stabkräfte

### 5.1 Knotenpunktverfahren

Anwendung des „Knotenpunktverfahrens“:

**Vorgehen:**

- 1) Freikörperbild
- 2) Auflagerkräfte
- 3) Gleichgewicht an allen Knoten: Für jedem Knoten  $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$   
Reihenfolge:  
Zuerst Betrachtung von Knoten mit höchstens 2 unbekanntem Kräften
- 4) Probe mit letztem Knoten

Anwendung auf Beispiel von oben:

1) Freikörperbild: (kann in das Fachwerk eingezeichnet werden)

2) Auflagerkräfte (zunächst Lastfall:  $F \neq 0; P = 0$ ):

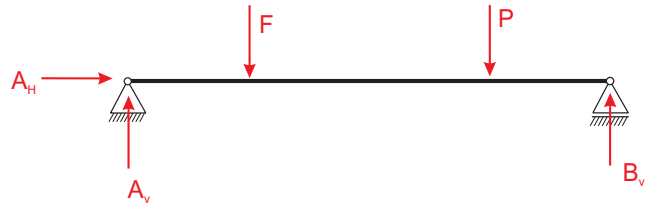
$$\sum F_{iy} = 0 = A_H$$

$$\sum M_i^{(B)} = 0 = F \cdot 3a - A_V \cdot 4a + P \cdot a$$

$$\Rightarrow A_V = \frac{3}{4}F + \frac{1}{4}P$$

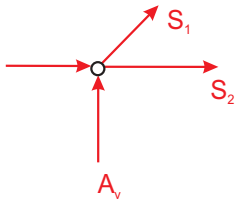
$$\sum M_i^{(A)} = 0 = F \cdot a - B_V \cdot 4a + P \cdot 3a$$

$$\Rightarrow B_V = \frac{1}{4}F + \frac{3}{4}P$$



3) Gleichgewichte an den Knoten:

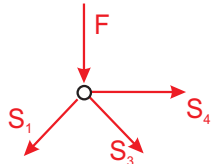
Knoten I:



$$\uparrow \sum F_y = A_V + S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} A_V = -\frac{3\sqrt{2}}{4}F - \frac{\sqrt{2}}{4}P$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 = A_H + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \Rightarrow S_2 = -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = A_V = \frac{3}{4}F + \frac{1}{4}P$$

Knoten II:



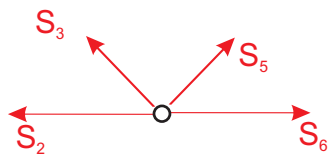
$$\uparrow \sum F_y = 0 = -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - F - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_3 = -S_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}F = -\frac{\sqrt{2}}{4}F + \frac{\sqrt{2}}{4}P$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 = S_4 - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_4 = S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}P$$

Knoten III:



$$\uparrow \sum F_y = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5$$

$$\Rightarrow S_5 = -S_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}F - \frac{\sqrt{2}}{4}P$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 = -S_2 + S_6 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5$$

$$\Rightarrow S_6 = S_2 + \sqrt{2} S_3 = \frac{1}{4}F + \frac{3}{4}P$$

Weiterrechnen führt auf  $S_7$ . Aus Symmetrie zu  $S_1$  erkennt man jedoch:

$$S_7 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}P - \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

Kontrolle (rechtes Lager):

$$\uparrow \sum F_y = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_7 + B_V$$

$$\Rightarrow B_V = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_7 = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}F$$

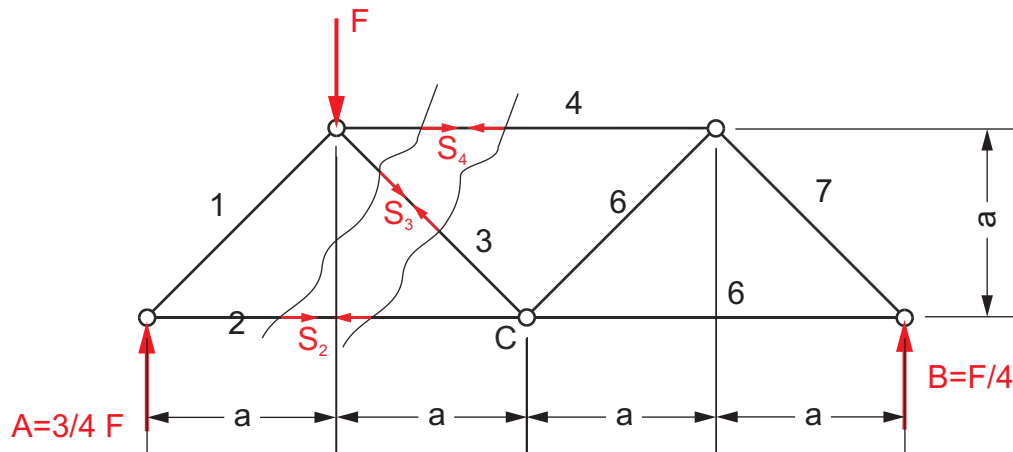
## 5.2 Ritter-Schnitt (Ritter'sches Schnittverfahren)

### Vorgehen in der Ebene:

1. Schnitt durch 3 Stäbe, deren Wirkungslinien sich nicht in einem einzigen Punkt treffen dürfen
2. Lagerkräfte am Gesamtsystem
3. Gleichgewichtsbedingungen an den Teilsystemen aufstellen, möglichst so, dass immer nur eine Unbekannte auftritt (Momentengleichgewichte)

### Beispiel:

Gegeben:  $F$   
Gesucht:  $S_2, S_3, S_4$



Berechnung der Kraft  $S_4$  (linkes Teilsystem):

$$\sum M_i^C = 0 = S_4 \cdot a - Fa + \frac{3}{4}F \cdot 2a$$

$$\Rightarrow S_4 = -\frac{1}{2}F$$

Berechnung der Kraft  $S_2$  (linkes Teilsystem):

$$\sum M_i^F = 0 = S_2 \cdot a - \frac{3}{4}F \cdot a$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{3}{4}F$$

Berechnung der Kraft  $S_3$  (linkes Teilsystem):

$$\sum F_{iv} = 0 = \frac{3}{4}F - F - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

### 5.3 Nullstäbe

Oft können in Fachwerken für gegebene Belastungen Nullstäbe, d.h. Stäbe, die augenblicklich (nur für die gegebene Belastung) keine Last tragen, identifiziert werden.

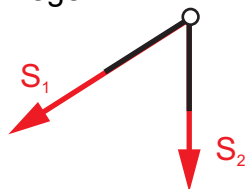
**Auf Nullstäbe kann in vielen Tragwerken nicht verzichtet werden, weil sie die Stabilität des Systems erhalten.) Kleine Imperfektionen im Tragwerk (real immer vorhanden) führen zu Belastungen in den Nullstäben.**

Die folgenden Regeln helfen beim Auffinden der Nullstäbe:

1. Sind an einem unbelasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen („unbelasteter Zweischlag“), so sind beide Stäbe Nullstäbe.
2. Sind an einem belasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen und greift eine äußere Kraft in Richtung eines Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.
3. Sind an einem unbelasteten Knoten drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in die gleiche Richtung zeigen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.

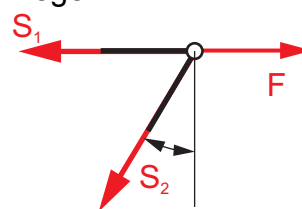
Diese drei Regeln folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten.

Regel 1



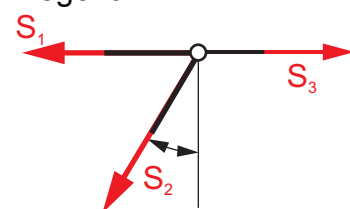
$$S_1 = S_2 = 0$$

Regel 2



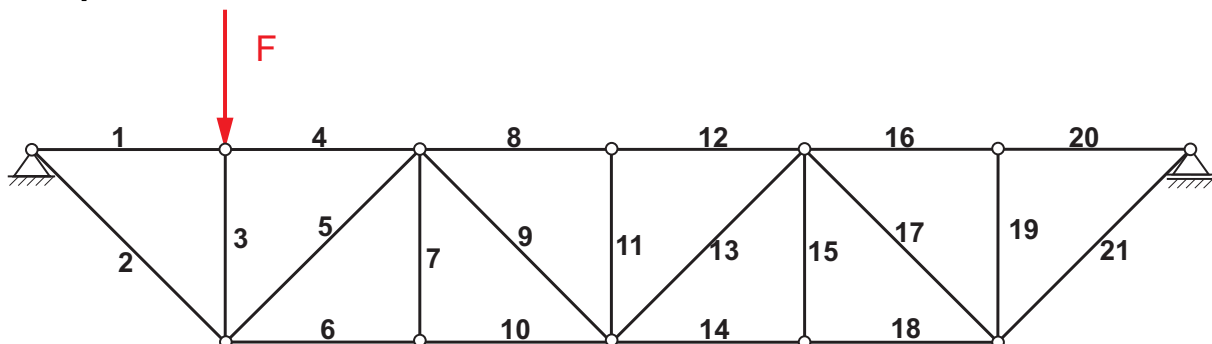
$$\begin{aligned} \uparrow \sum F = 0 &= -S_2 \cdot \cos \varphi \\ \Rightarrow S_2 &= 0 \end{aligned}$$

Regel 3



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F = 0 &= -S_2 \cdot \cos \varphi \\ \Rightarrow S_2 &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel:**



**Nullstäbe:**

Stäbe 7, 11, 15, 19 (jeweils Regel 3)

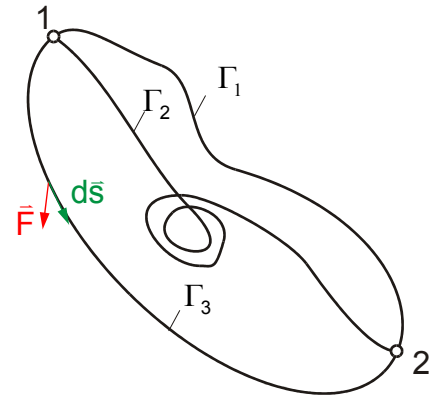
## 6 Stabilität von Gleichgewichtslagen

### 6.1 Arbeitsbegriff in der Statik

Mechanische Arbeit:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Nur wenn die Arbeit  $W$  (geleistet durch die Kraft  $F$ ) unabhängig von der Wahl des Weges ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ) ist, kann für das Argument ein totales (vollständiges) Differential angegeben werden:



$$dW = -dU = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

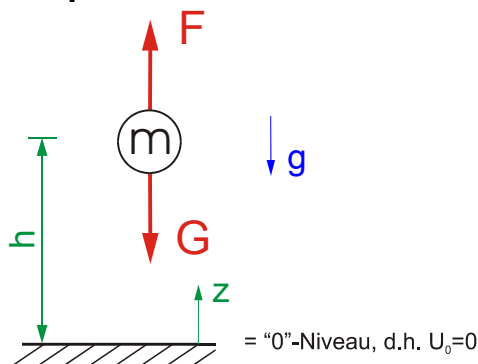
↳ Potenzial der Kraft  $F$

In kartesischen Koordinaten:

Mit:  $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z$   
 $d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

#### Beispiel: Masse im Erdschwerefeld



Arbeit der (äußeren) Kraft  $F$ :

$$W_F = \int_0^h F dz = F \cdot h$$

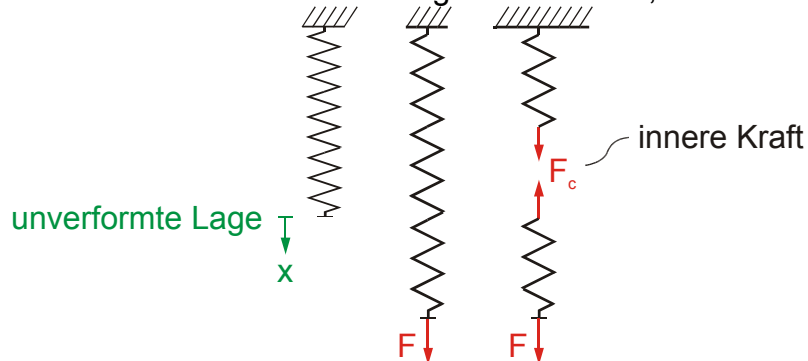
Für die Gewichtskraft gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= - \int_{U_0=0}^{U_1} dU = -(U_1 - U_0) \\ \Pi &= \int_0^h -G dz = -G \cdot h \end{aligned} \right\} U_0 - U_1 = -G \cdot h$$

$$\Rightarrow U_1 = G \cdot h$$

### Beispiel: Schraubenfeder

Gesucht: Potenzielle Energie einer Feder, die um die Strecke  $x$  verlängert wird.



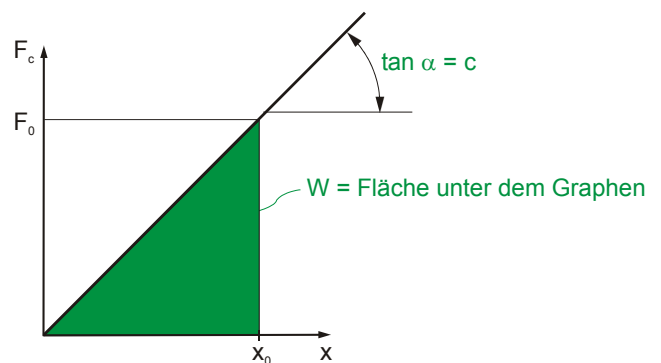
Federgesetz  
(Hook'sches Gesetz):

$$F_c = c \cdot x$$

$c$ : Federsteifigkeit  
(Steigung der Kraft-Weg Kennlinie)

### Arbeit der äußeren Kraft:

$$W = \frac{1}{2} F_0 \cdot x_0 \quad (\text{Dreiecksfläche})$$



### Arbeit der inneren Kraft:

$$-dU = -F_c dx$$

(rückstellende Kraft, daher negativ)

$$-\int_{U_0}^{U_1} dU = -\int_0^x F_c \cdot dx$$

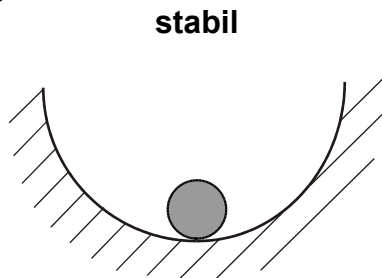
$$\Leftrightarrow -\int_0^{U_1} dU = -\int_0^x c \cdot x \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow -(U_1 - \overset{=0}{U_0}) = -\frac{1}{2} c \cdot x^2$$

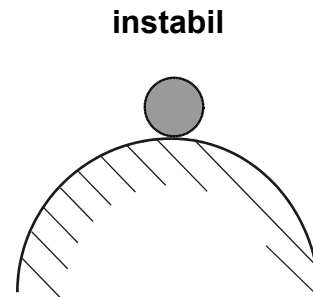
$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} cx^2$$

## 6.2 Gleichgewichtslagen und deren Stabilität

Erfahrung:



Nach kleinen Störungen kehrt der Körper in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück



Kleine Störungen führen zum Verlust der Gleichgewichtslage

Kriterium:

- Für Gleichgewichtslagen nimmt die potenzielle Energie Extremwerte an.
- Eine Zunahme der potenziellen Energie bei kleinen Auslenkungen aus der statischen Gleichgewichtslage führt zu stabilen Gleichgewichtslagen, nimmt sie weiter ab, ist die Gleichgewichtslage instabil.

Taylorentwicklung der potenziellen Energie  $U$ :

$$\Delta U = U(\varphi_0 + \Delta\varphi) - U(\varphi_0) = \left. \frac{dU}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi^2 + \dots$$

Grenzübergang:

$$dU = \overbrace{\left. \frac{dU}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}}^{\text{Identifiziert Gleichgewichtslage}} \delta\varphi + \overbrace{\left. \frac{1}{2} \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0}}^{\text{Stabilität } \varphi_0 \text{ falls } > 0} \delta\varphi^2 + \dots$$

↳ Störung der potenziellen Energie bei kleinen Störungen  $d\varphi$

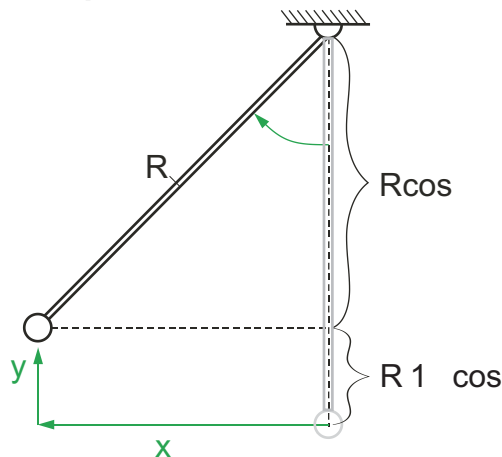


### 6.3 Generalisierte Koordinaten

Beschreibung der Bewegung mit sog. generalisierten Koordinaten:

- minimale Anzahl der Koordinaten zur Beschreibung eines Systems
- eindeutige, unabhängige Beschreibung beliebiger Positionen

#### Beispiel: Punktmasse



Eine Beschreibung über  $y$  ist nicht eindeutig, da eine gleiche Höhenlage der Punktmasse in der linken und rechten Seite des Pendels möglich ist. Eine gleiche  $x$ -Position wird oberhalb und unterhalb der waagerechten Lage eingenommen.

Eine eindeutige Lagebeschreibung erfolgt hier nur durch den Drehwinkel, daher bildet  $\varphi$  eine generalisierte Koordinate.

Potenzielle Energie:

$$U = m \cdot g \cdot y = m \cdot g \cdot R(1 - \cos \varphi)$$

Taylor:

$$U(\varphi_0 + \Delta\varphi) = U(\varphi_0) + \underbrace{\frac{dU}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}}_{\text{Gleichgewicht}} \Delta\varphi + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2U}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_0}}_{\text{Entscheidung über Stabilität der Gleichgewichtslage}} \Delta\varphi^2 + \dots$$

Gleichgewichtslagen:

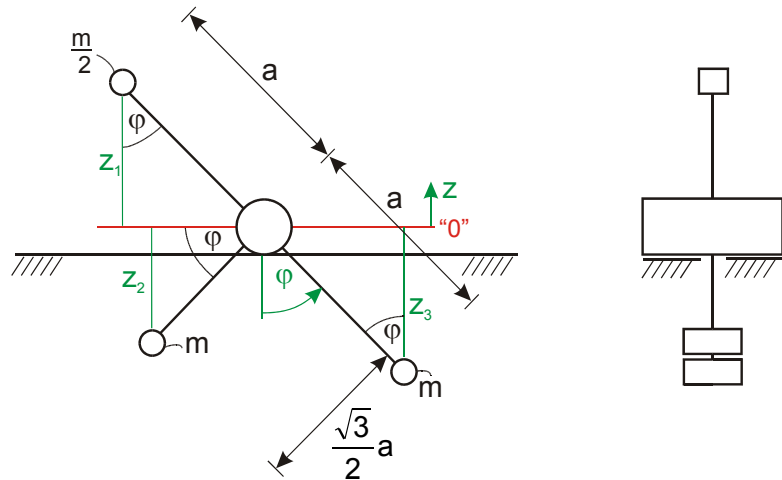
$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{d\varphi} = 0 = m \cdot g \cdot R \sin \varphi &\Rightarrow \varphi_1 = 0 \\ &\varphi_2 = \pi \end{aligned} \right\} \text{ mögliche Gleichgewichtslagen}$$

Stabilität:

$$\begin{aligned} \text{für } \varphi_1 = 0: \frac{d^2U}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=0} = mgR \cos \varphi \Big|_{\varphi=0} > 0 &\Rightarrow \text{Stabile Gleichgewichtslage} \\ \text{für } \varphi_2 = \pi: \frac{d^2U}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\pi} = mgR \cos \varphi \Big|_{\varphi=\pi} < 0 &\Rightarrow \text{Instabile Gleichgewichtslage} \end{aligned}$$

### Beispiel: Doppelpendel

Gesucht:  
Winkel  $\varphi_1$  für Gleichgewicht  
und die Stabilität der  
Gleichgewichtslagen



#### 1) Potenzielle Energie U:

$$U = \frac{m}{2}gz_1 + mgz_2 + mgz_3$$

#### 2) Generalisierte Koordinate $\varphi$ :

$$z_1 = a \cos \varphi \quad , \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a \sin \varphi \quad , \quad z_3 = -a \cos \varphi$$

$$U = \frac{m}{2}ga \cos \varphi - mg \frac{\sqrt{3}}{2}a \sin \varphi - mga \cos \varphi = -\frac{m}{2}ga \cos \varphi - mg \frac{\sqrt{3}}{2}a \sin \varphi$$

#### 3) Gleichgewichtslagen:

$$\frac{dU}{d\varphi} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{m}{2}ga \sin \varphi - mg \frac{\sqrt{3}}{2}a \cos \varphi$$

$$= \frac{mga}{2} \underbrace{(\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi)}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{3} \cos \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \tan \varphi = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ, \varphi_2 = 240^\circ$$

#### 4) Stabilitätsentscheidung:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{mga}{2} (\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi)$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=60^\circ} = \frac{mga}{2} (\cos 60^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ) > 0$$

$$\Rightarrow \text{Gleichgewichtslage } \varphi_1 = 60^\circ \text{ stabil!}$$

## 7 Virtuelle Arbeit

### 7.1 Virtuelle Verschiebung

**Definition:**

- Gedachte Verrückung eines Systems, die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist (existiert nur im Kopf)
- Auftretende Verschiebungen sind differentiell klein ( $\Rightarrow$  Linearisierung!)
- Verschiebungen müssen geometrisch möglich sein bzw. mit der Kinematik des System verträglich

Virtuelle Verschiebungen werden mit einem vorangestellten  $\delta^1$  gekennzeichnet.

### 7.2 Virtuelle Arbeit

1. Prinzip der virtuellen Verschiebung:

$$\delta W = F \delta x$$

$\hookrightarrow$  Variation der Position

In der Statik gilt allgemein:

$$\delta W \stackrel{!}{=} 0$$

$\hookrightarrow$  virtuelle Arbeit

2. Prinzip der virtuellen Kräfte:

$$\delta W = x \delta F$$

$\hookrightarrow$  Variation der Kraft

Im Gleichgewichtsfall tritt keine virtuelle Arbeit auf.

Im folgenden wird nur auf das Prinzip der virtuellen Verschiebung eingegangen.

### 7.3 Prinzip der virtuellen Verschiebung

Stellt eine Alternative für die Gleichgewichtsbeziehungen dar.

**Allgemeines Vorgehen:**

1. Unbekannte (gesuchte) Lagerreaktion auslösen und durch eine entsprechende Einzelkraft oder ein Moment ersetzen. Das System wird hierdurch beweglich.
2. System in gedachter ausgelenkter Lage skizzieren (Verrückungsfigur).
3. Virtuelle Arbeit aller Kräfte/Momente aufstellen.

$$\delta W_i = F \cdot \delta x \quad , \quad \delta W_i = M \cdot \delta \varphi$$

4. Die Summe aller virtuelle Arbeiten ist Null (Prinzip der virtuellen Arbeit).

$$\delta W = \sum_i \delta W_i \stackrel{!}{=} 0$$

5. Ausdrücken aller virtuellen Verschiebungen durch eine generalisierte Koordinate  $q$  (kinematische Kopplung).
6. Unbekannte ermitteln.

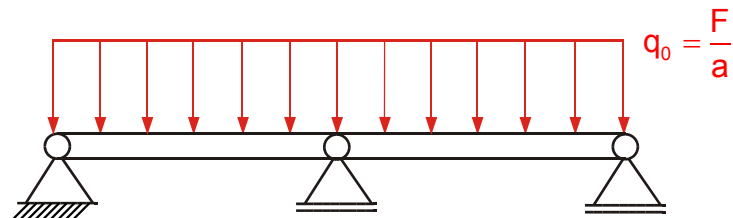
$$\delta q \neq 0$$

---

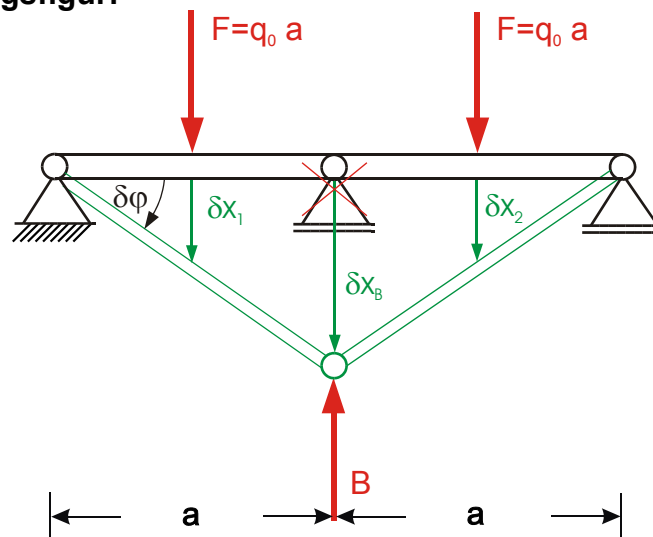
<sup>1</sup>  $\delta$  ist das Variationssymbol,  $\delta W_i = F \cdot \delta x$  ,  $\delta W_i = M \cdot \delta \varphi$  sind erste Variationen der Arbeit der Kraft  $F$ , bzw. des Momentes  $M$ .

### Beispiel:

Gesucht: Lagerkraft im mittleren Lager



#### 1) Verrückungsfigur:



#### 2) Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = 0 = -B\delta x_B + q_0 a \delta x_1 + q_0 a \delta x_2$$

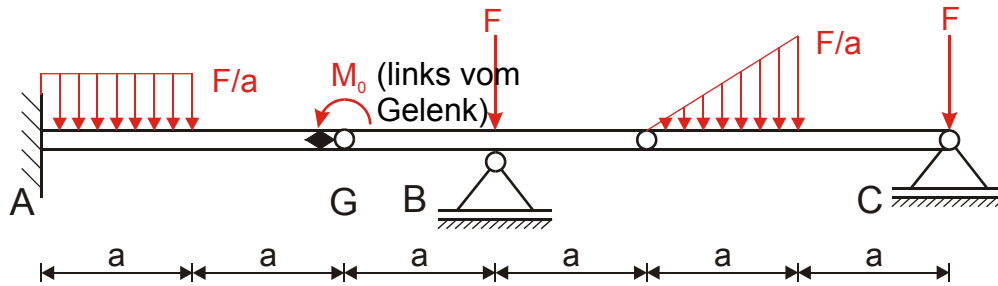
#### 3) Generalisierte Koordinate:

$\delta\varphi$	oder	$\delta x_1$
$\delta x_1 = \frac{a}{2} \delta\varphi$		$\delta x_1 = \delta x_2$
$\delta x_B = a \delta\varphi$		$\delta x_B = 2 \delta x_1$
$\delta x_2 = \frac{a}{2} \delta\varphi$		

Mit der generalisierten Koordinate  $\delta\varphi$  folgt für die virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned} \delta W = 0 &= -Ba\delta\varphi + q_0 a \cdot \frac{a}{2} \delta\varphi + q_0 a \cdot \frac{a}{2} \delta\varphi \\ &= a\delta\varphi (-B + q_0 a) \\ &\Rightarrow \underline{\underline{B = q_0 \cdot a}} \end{aligned}$$

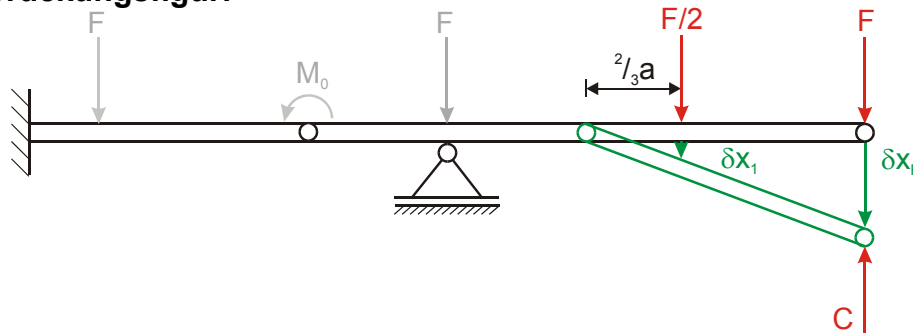
Beispiel:



Gegeben:  $F, a, M_0 = aF$

Gesucht: Lagerkraft in C

1) Verrückungsfigur:



2) Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = 0 = \frac{F}{2} \delta x_1 + F \delta x_F - C \delta x_F$$

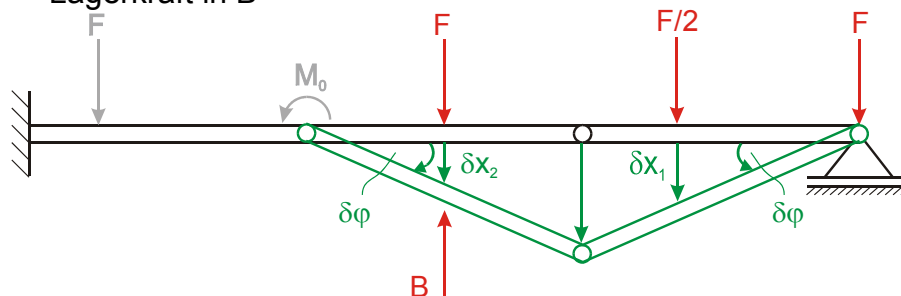
3) Generalisierte Koordinate:

$$\frac{\delta x_F}{2a} = \frac{\delta x_1}{\frac{2}{3}a} \Rightarrow \delta x_F = 3\delta x_1$$

Mit der gen. Koordinate folgt für die virtuelle Arbeit:

$$0 = \left( \frac{F}{2} + 3F - 3C \right) \delta x_1 \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{7}{6}F}}$$

Gesucht: Lagerkraft in B



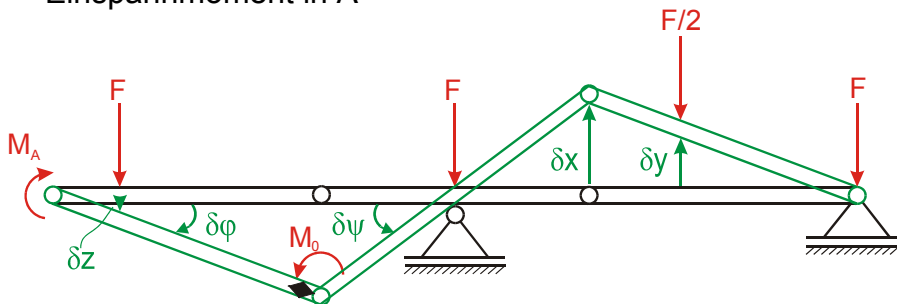
$$\delta W = 0 = \delta x_2(F - B) + \frac{F}{2} \delta x_1$$

Mit der gen. Koordinate  $\delta\varphi$  folgt für die virtuelle Arbeit:

$$\delta x_2 = a \cdot \delta\varphi \quad \text{und} \quad \delta x_1 = \frac{4}{3} a \cdot \delta\varphi$$

$$\delta W = 0 = \left( (F - B) + \frac{F}{2} \frac{4}{3} \right) a \cdot \delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = \frac{5}{3} F}}$$

Gesucht: Einspannmoment in A



$$\delta W = 0 = M_A \delta\varphi + F \delta z - M_0 \delta\varphi - \frac{F}{2} \delta y$$

Generalisierte Koordinate:  $\delta\varphi$

$$\delta z = \frac{a}{2} \cdot \delta\varphi$$

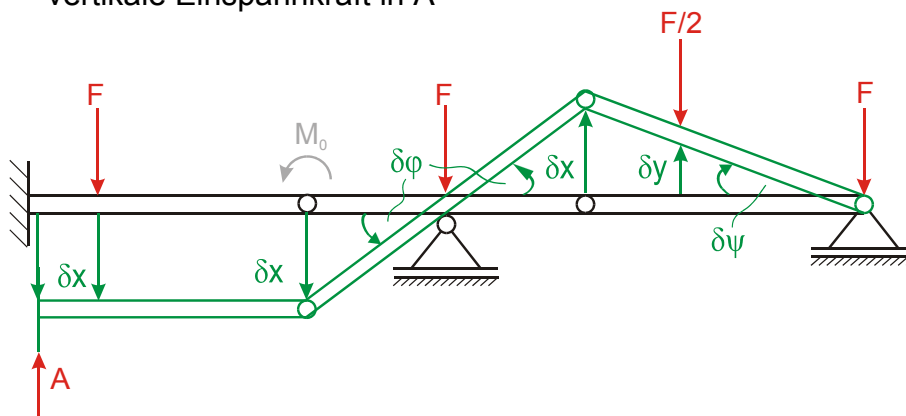
$$\delta\psi = 2 \cdot \delta\varphi$$

$$\delta x = a \cdot \delta\psi \quad \Rightarrow \quad \delta x = 2a \cdot \delta\varphi$$

$$\frac{\delta x}{2a} = \frac{\delta y}{\frac{4}{3}a} \quad \Rightarrow \quad \delta y = \frac{2}{3} \delta x \quad \Rightarrow \quad \delta y = \frac{4}{3} a \cdot \delta\varphi$$

$$\delta W = 0 = \delta\varphi \left( M_A + F \frac{a}{2} - M_0 - \frac{F}{2} \cdot \frac{4}{3} a \right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M_A = \frac{1}{6} Fa + M_0}}$$

Gesucht: vertikale Einspannkraft in A



$$\delta W = 0 = -A\delta x + F\delta x - \frac{F}{2}\delta y$$

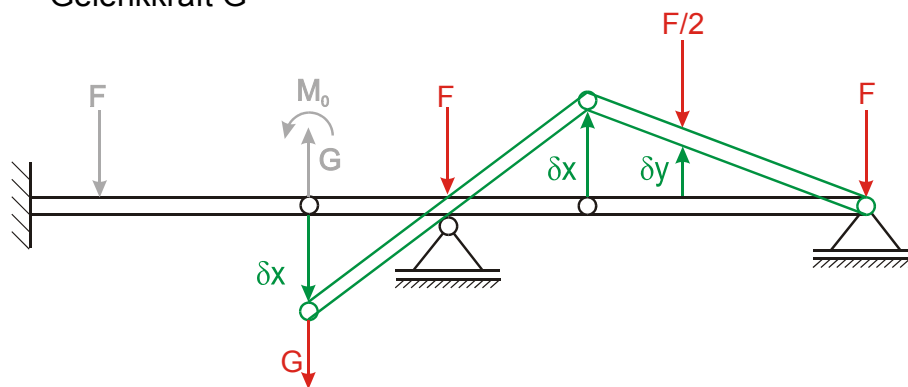
Generalisierte Koordinate:  $\delta\varphi$

$$\delta x = a \cdot \delta\varphi$$

$$\frac{\delta x}{2a} = \frac{\delta y}{\frac{4}{3}a} \Rightarrow \delta y = \frac{2}{3}\delta x \Rightarrow \delta y = \frac{2}{3}a \cdot \delta\varphi$$

$$\delta W = 0 = \delta\varphi \cdot a \left( -A + F - \frac{F}{3} \right) \Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{2}{3}F}}$$

Gesucht: Gelenkkraft G

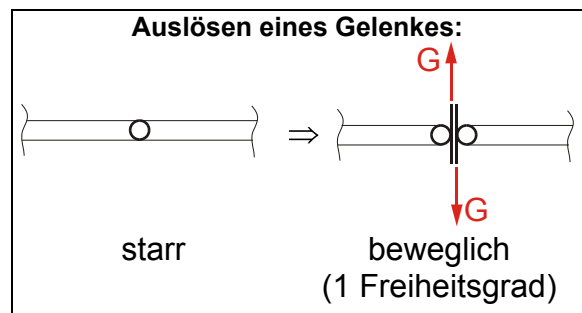


Generalisierte Koordinate:  $\delta x$

$$\frac{\delta x}{2a} = \frac{\delta y}{\frac{4}{3}a} \Rightarrow \delta y = \frac{2}{3}\delta x$$

$$\delta W = 0 = G\delta x - \frac{F}{2}\delta y = \delta x \left( G - \frac{F}{2} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G = \frac{F}{3}}}$$



Kontrolle: Kräftegleichgewicht für Gesamtsystem in vertikaler Richtung

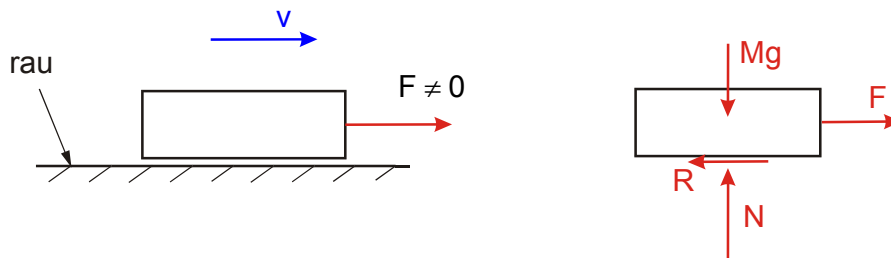
$$\begin{aligned} \sum F_{iv} = 0 &= A + B + C - F - F - \frac{F}{2} - F \\ &= \left( \frac{4}{6} + \frac{10}{6} + \frac{7}{6} \right) F - \frac{7}{2}F = 0 \end{aligned} \quad \checkmark$$

## 8 Haftung und Reibung

### 8.1 Coulombsche Reibung

Einfachstes „Reibungsgesetz“: Coulomb (1736-1806)

Bewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  auf einer rauhen Unterlage:



Erfahrung sagt:  $R \sim N$

Coulombsche Reibung:  $R = \mu_R N$  ( $\mu_R$ : Reibbeiwert / Reibkoeffizient)

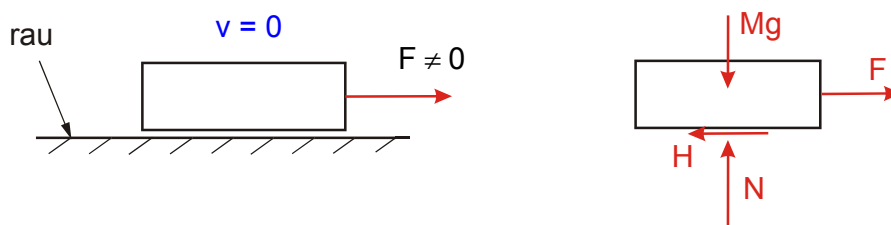
Im Freischnitt muss die Reibkraft  $R$  entgegen der Bewegungsrichtung als zusätzliche äußere Kraft angetragen werden. Ihr Betrag folgt aus dem Reibgesetz.

$$\sum F_{iH} = 0 = R - F \quad \Rightarrow \quad F = R = \mu_R N = \mu_R Mg$$

Es gibt nur eine Kraft  $F$ , für die sich das System mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Diese Kraft  $F$  wird durch das System bestimmt! Für andere Werte von  $F$  tritt eine Beschleunigung auf ( $\rightarrow$  TM 3).

### 8.2 Haftung

Tritt keine Relativbewegung zwischen den Körpern auf, liegt Haftung vor.



Es gilt:  $H < \mu_0 N$  ( $\mu_0$ : Haftbeiwert / Haftungskoeffizient)



Die Haftkraft  $H$  lässt sich eindeutig (Betrag und Richtung) aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.

$$\sum F_{iH} = 0 = H - F \Rightarrow H = F$$

Für den Grenzfall (Körper geht in Bewegung über) gilt:  $H_0 = \mu_0 N$

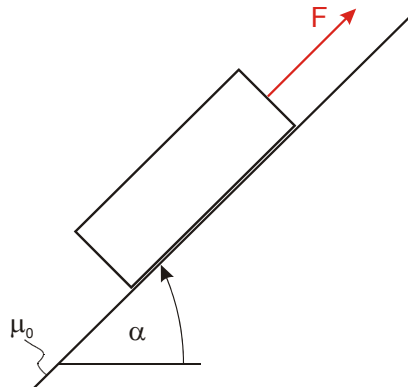
Im Gegensatz zur Haftung muss  $H_0$  entgegen der tatsächlichen Bewegungsrichtung angetragen werden und kann nicht frei gewählt werden.

Typische Werte für  $\mu_0$  und  $\mu_R$ :

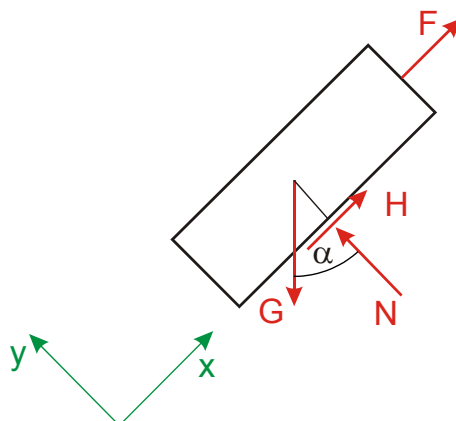
	$\mu_0$ (Haftung)	$\mu_R$ (Reibung)
Stahl $\leftrightarrow$ Stahl	0,2 ... 0,5	0,1 ... 0,4
Reifen $\leftrightarrow$ Straße	0,8 ... 1,3	0,4 ... 0,8
Ski $\leftrightarrow$ Schnee	0,1 ... 0,3	0,04 ... 0,2

### Beispiel:

Welchen Wert darf  $F$  annehmen, damit die Kiste auf der schiefen Ebene nicht rutscht!



**Freikörperbild:** (Annahme: Kiste rutscht runter)



### Gleichgewicht:

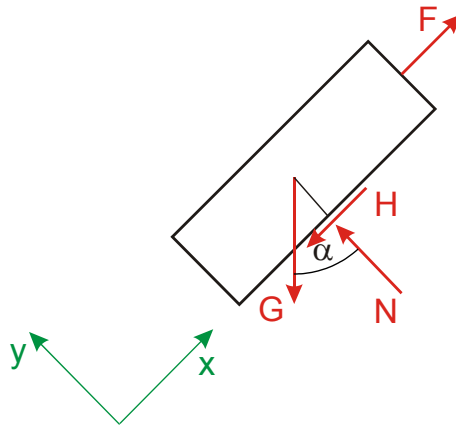
$$\begin{aligned} \nearrow: 0 &= F - G \sin \alpha + H & \Leftrightarrow & H = G \sin \alpha - F \\ \nwarrow: 0 &= -G \cos \alpha + N & \Leftrightarrow & N = G \cos \alpha \end{aligned}$$

### Reibgesetz:

$$H \leq \mu_0 N \quad \Rightarrow \quad F \geq G(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)$$

Fällt die Kraft  $F$  unter diesen Wert, beginnt die Kiste die Ebene hinunter zu rutschen.

### Freikörperbild: (Annahme: Kiste wird hochgezogen)



### Gleichgewicht:

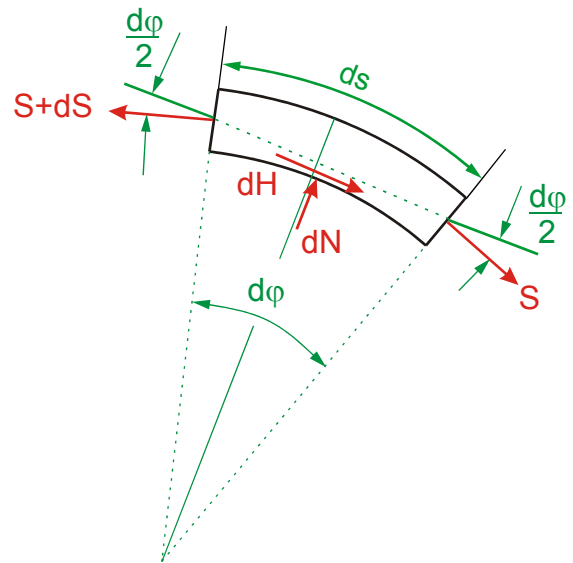
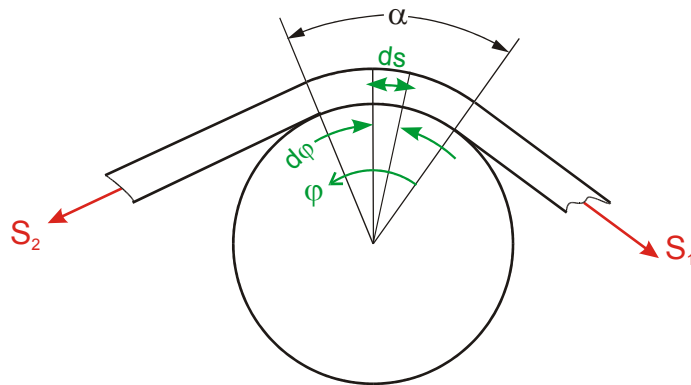
$$\begin{aligned} \nearrow: 0 &= F - G \sin \alpha - H & \Leftrightarrow & H = F - G \sin \alpha \\ \nwarrow: 0 &= -G \cos \alpha + N & \Leftrightarrow & N = G \cos \alpha \end{aligned}$$

### Reibgesetz:

$$H \leq \mu_0 N \quad \Rightarrow \quad F \leq G(\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Die Kraft  $F$  muss diesen Wert übersteigen, um die Kiste die Ebene hinauf zu ziehen.

### 8.3 Seilhaftung / Seilreibung



**Gleichgewicht:**

$$\Downarrow: 0 = S \cos \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} + dH \quad (1)$$

$$\nearrow: 0 = dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} \quad (2)$$

für kleine Winkel linearisiert mit  $\sin \varphi \rightarrow \varphi$ ,  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$ ,  $\cos \varphi \rightarrow 1$

$dS \cdot \sin \frac{d\varphi}{2}$  ist von „höherer Ordnung“ klein  $\rightarrow 0$

Haftung im Grenzfall:  $dH = \mu_0 dN$

$$\text{aus (1): } 0 = dH - dS = \mu_0 dN - dS \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0 dN = dS \quad (3)$$

$$\text{aus (2): } 0 = dN - S d\varphi \quad \Leftrightarrow \quad dN = S d\varphi \quad (4)$$

$$\text{aus (3) und (4):} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 S d\varphi = dS$$

Integration:

$$\mu_0 \int_0^\alpha d\varphi = \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S}$$

$$\mu_0 \alpha \Big|_0^\alpha = \ln S \Big|_{S_1}^{S_2}$$

$$\mu_0 \alpha = \ln S_2 - \ln S_1$$

$$\boxed{S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha}}$$

(Eytelweinsche Seilreibung)

Die Herleitung berücksichtigt den Fall, dass die Seilreibung verstärkend wirkt ( $S_2 > S_1$ ). Muss die Reibung zusätzlich überwunden werden, ändert sich die Richtung von  $dH$  und es folgt:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$$

(Vertauschung von  $S_1$  und  $S_2$ )

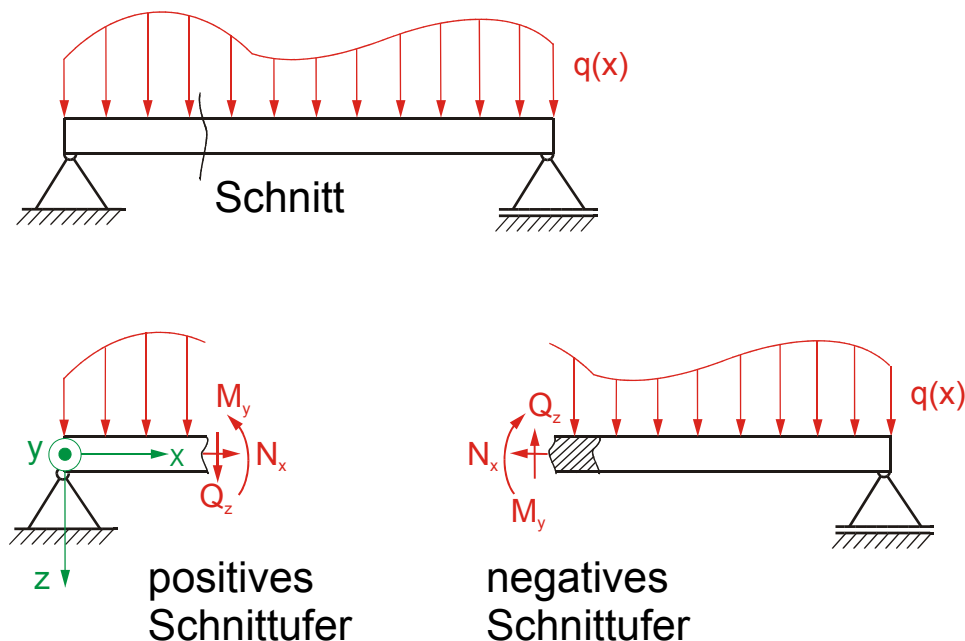
Die hergeleiteten Beziehungen gelten auch für den Fall einer auftretenden Relativbewegung, wenn der Haftbeiwert  $\mu_0$  durch den Reibbeiwert  $\mu$  ersetzt wird.

## 9 Schnittgrößen am Balken

Schnittgrößen sind innere Kräfte und stellen ein Maß für die örtliche Materialbeanspruchung dar.

- Untersuchung der Tragfähigkeit
- Dimensionierung der Querschnitte
- Verformung des Tragwerks

**Schnitt durch einen belasteten Träger:**

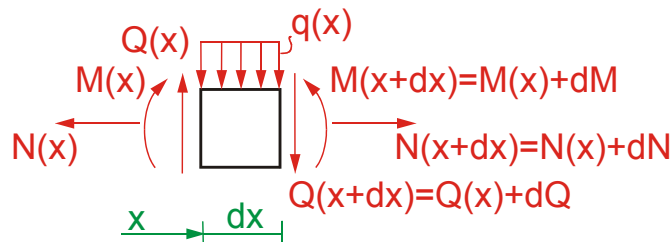


Es wird ein Rechtshand-Koordinatensystem mit  $x$ -Achse entlang des Trägers und der  $z$ -Achse nach unten eingeführt. Über den Normalenvektor der Schnittfläche lässt sich ein positives Schnittufer (Normalenvektor zeigt in Richtung der  $x$ -Achse) und ein negatives Schnittufer (Normalenvektor zeigt entgegen der  $x$ -Achse) definieren. Als Schnittgrößen werden Normalkraft ( $N_x$ ), Querkraft ( $Q_x$ ) und ein Biegemoment ( $M_y$ ) unter Beachtung des Gegenwirkungsprinzips angetragen.

### Vorzeichenkonvention:

Am positiven Schnittufer zeigen positive Schnittgrößen in Achsrichtung des Koordinatensystems.

### Gleichgewicht am Balkenelement:



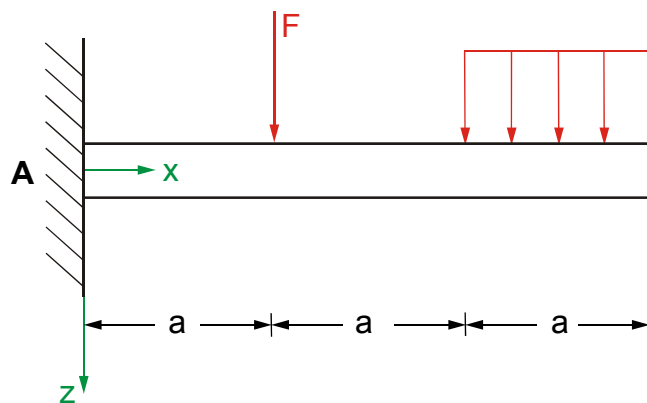
$$\sum F_{iz} = 0 = Q(x) - q(x)dx - (Q(x) + dQ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dx} = -q(x)}$$

$$\sum M_{yi} = 0 = -M(x) - q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} - Q(x)dx - dQdx + M(x) + dM$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = Q(x)}$$

### Beispiel: 3-Feld-Balken

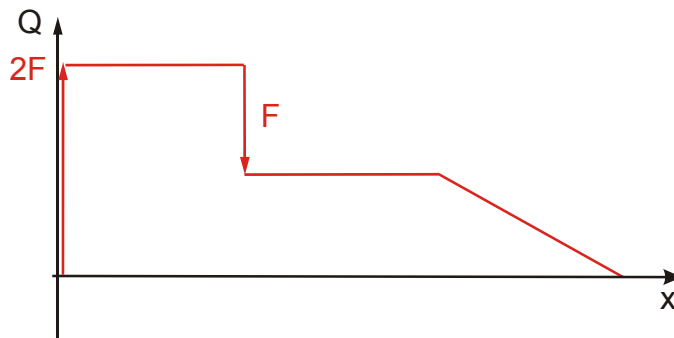


$$\frac{F}{a} \sum F_{iz} = 0 = A_z - F - \frac{F}{a} \cdot a$$

$$\Rightarrow A_z = 2F$$

$$\sum M_{iy} = 0 = M^A + F \cdot a + \frac{F}{a} \cdot a \cdot \frac{5}{2}a$$

$$\Rightarrow M^A = -\frac{7}{2}Fa$$



$0 < x < a:$

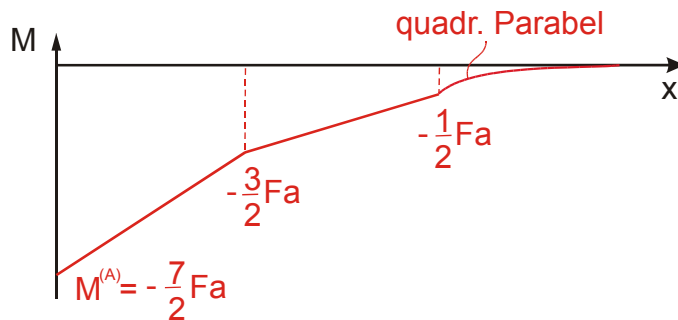
- Sprung mit  $A_z$
- $q = 0 \rightarrow Q$  konstant

$a < x < 2a:$

- Sprung mit  $F$
- $q = 0 \rightarrow Q$  konstant

$2a < x < 3a:$

- $q = \text{konst.} \rightarrow Q$  linear
- $Q(3a) = 0$



$0 < x < a:$

- Sprung mit  $M^A$
- $Q = \text{konst.} \rightarrow M$  linear

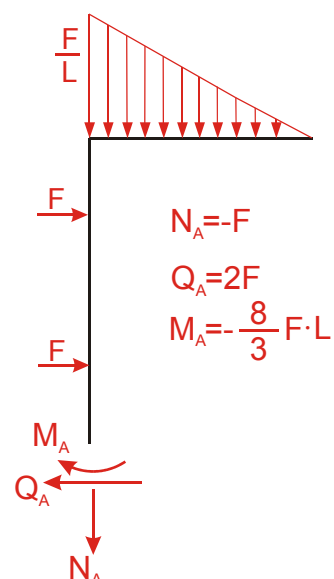
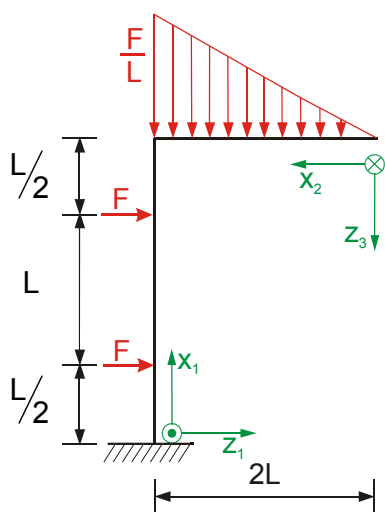
$a < x < 2a:$

- $Q = \text{konst.} \rightarrow M$  linear

$2a < x < 3a:$

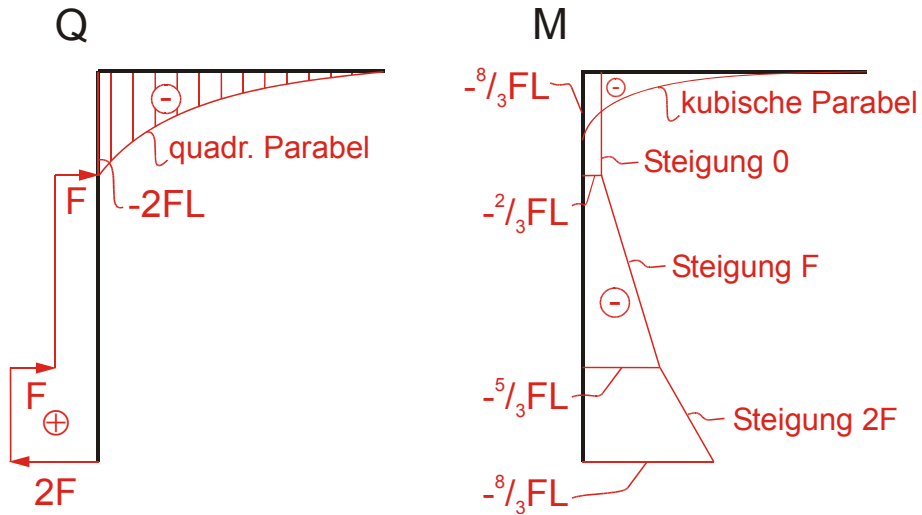
- $Q = \text{linear.} \rightarrow M$  quadr.
- $M(3a) = 0$

### Beispiel: Schnittgrößen am Rahmen

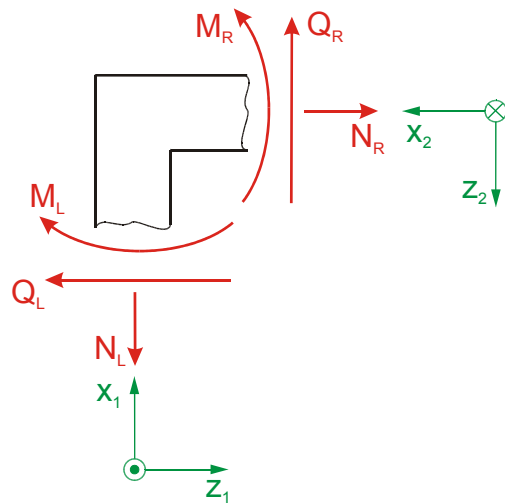


$$Q(x) = -\int q(x)dx$$

$$M(x) = \int Q(x)dx$$



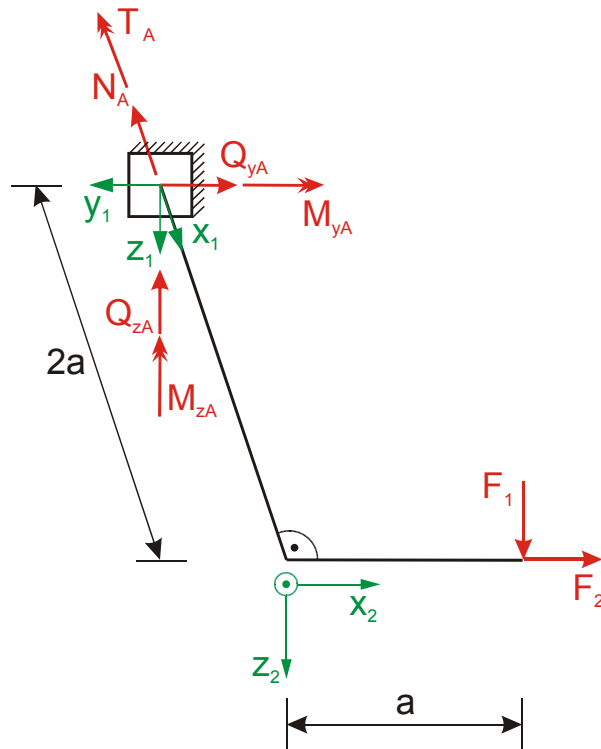
**Ecke:** Schnittbild für Übergangsbedingungen





### Beispiel:

Gesucht: Schnittkraftverläufe N, Q, T, M

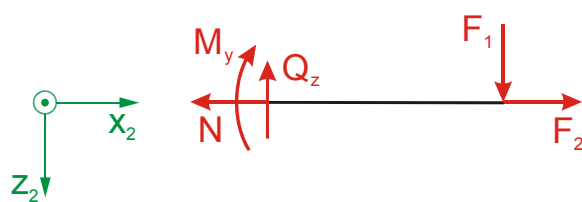


Balken 1:

$$\begin{aligned}
 N_A = 0 & \Rightarrow N(x_1) = 0 \\
 Q_{yA} = -F_2 & \Rightarrow Q_y(x_1) = -F_2 \\
 Q_{zA} = F_1 & \Rightarrow Q_z(x_1) = F_1 \\
 T_A = -F_1 \cdot a & \Rightarrow T(x_1) = -F_1 \cdot a \\
 M_{yA} = -F_1 \cdot 2a & \Rightarrow M_y(x_1) = -F_1 \cdot 2a + F_1 \cdot x_1 \\
 M_{zA} = -F_2 \cdot 2a & \Rightarrow M_z(x_1) = -F_2 \cdot 2a + F_2 \cdot x_1
 \end{aligned}$$

Balken 2:

Betrachtung am linken Schnittpunkt



$$\begin{aligned}
 N(x_2) &= F_2 \\
 Q_y(x_2) &= 0 \\
 Q_z(x_2) &= F_1 \\
 T(x_2) &= \\
 M_y(x_2) &= F_1 \cdot a - F_1 \cdot x_2 \\
 M_z(x_2) &= 0
 \end{aligned}$$

## **10 Empfohlene Literatur**

### **Lehrbücher:**

- [1] Gross, D., Hauger, W., Schnell, W.: Technische Mechanik I (Statik)  
Springer-Lehrbuch, 1998 (TU-Bibliothek: MSD-422)
- [2] Hagedorn, P.: Technische Mechanik, Band I (Statik)  
Harry Deutsch, 1993 (TU-Bibliothek: MSD-121)
- [3] Assmann, B.: Technische Mechanik, Band I  
R. Oldenbourg Verlag, 1993 (TU-Bibliothek: MSD-409)
- [4] Magnus, K., Müller, H.: Grundlagen der Technischen Mechanik  
Teubner-Studienbücher, 1990 (TU-Bibliothek: MSD-417)

### **Aufgabensammlungen:**

- [1] Hauger, W., Lippmann, H., Mannl, V.: Aufgaben zu Technische  
Mechanik 1-3  
Springer, 1994 (TU-Bibliothek: MSD-421)
- [2] Schnell, W., Gross, D.: Formel- und Aufgabensammlung zur  
Technischen Mechanik I  
Springer, 1998 (TU-Bibliothek: MSD-421)
- [3] Magnus, K., Müller, H.: Übungen zur Technischen Mechanik  
Teubner-Studienbücher, 1988 (TU-Bibliothek: MSD-416)