

Höhere Mathematik für Ingenieure I  
Script zur Vorlesung an der TU Berlin  
im WS 98/99

Günter Bärowolf <sup>1</sup>

Oktober 98 - Februar 99, überarbeitet im Februar 2000

<sup>1</sup>Technische Universität Berlin, email:baerwolf@math.tu-berlin.de



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Logische Grundlagen . . . . .	4
1.1.1	Aussagen und Aussagenformen . . . . .	4
1.1.2	Logische Operationen und Aussagenverbindungen . . . . .	5
1.1.3	Quantoren . . . . .	8
1.2	Grundlagen der Mengenlehre . . . . .	9
1.2.1	Begriff der Menge und Mengenbeziehungen . . . . .	9
1.2.2	Mengenoperationen . . . . .	10
1.2.3	Mengenalgebraische Regeln . . . . .	11
1.3	Abbildungen . . . . .	12
1.4	Die natürlichen Zahlen und die Methode der vollständigen Induktion . . . . .	13
1.5	Algebraische Strukturen - Zahlbereiche* . . . . .	15
1.5.1	Gruppen* . . . . .	15
1.5.2	Ringe und Körper* . . . . .	16
1.6	Ungleichungen . . . . .	16
1.6.1	Rechenregeln für Ungleichungen . . . . .	17
1.6.2	Wichtige Ungleichungen . . . . .	18
1.6.3	Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	19
1.6.4	Geometrische Lösung von Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	22
1.6.5	Ungleichungen mit 2 Variablen . . . . .	23
1.7	Die komplexen Zahlen . . . . .	25
1.7.1	Einführung der komplexen Zahlen . . . . .	25
1.7.2	Die GAUSSsche Zahlenebene . . . . .	27
1.7.3	Potenzieren und Radizieren . . . . .	30
1.8	Polynome . . . . .	32
1.8.1	Definition und Grundlagen . . . . .	32
1.8.2	Polynome mit reellen Koeffizienten . . . . .	35
1.8.3	Berechnung von Polynomwerten - HORNERSchema . . . . .	37
1.8.4	Zerlegungssatz für komplexe Polynombrüche* . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Lineare Algebra I</b>	<b>43</b>
2.1	Determinanten . . . . .	43
2.1.1	Determinantendefinition . . . . .	44
2.1.2	Regeln zur Determinantenberechnung . . . . .	46
2.1.3	SARRUSSche Regel . . . . .	46
2.2	CRAMERSche Regel . . . . .	50
2.3	Matrizen . . . . .	52
2.3.1	Definition und Operationen . . . . .	53
2.3.2	Spezielle Matrizentypen . . . . .	56
2.3.3	Inversenformel . . . . .	58
2.3.4	Rang einer Matrix . . . . .	60
2.3.5	Elementarmatrizen und GAUSSscher Algorithmus . . . . .	64
2.3.6	Bestimmung der Inversen einer Matrix mit dem GAUSSschen Algorithmus . . . . .	67

2.3.7	Determinanten-Berechnung mit dem GAUSSschen Algorithmus . . . . .	69
2.4	Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung . . . . .	70
2.4.1	Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme . . . . .	71
2.4.2	Praktische Anwendung des GAUSSschen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	74
2.5	Eigenwertprobleme . . . . .	77
2.6	Allgemeine Vektorräume . . . . .	80
2.6.1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	81
2.6.2	Lineare Abbildungen, Koordinaten, Basiswechsel . . . . .	84
2.7	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	90
2.7.1	Vektoren im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	90
2.7.2	Skalar-, Vektor- und Spatprodukt . . . . .	94
2.7.3	Geraden im Raum . . . . .	99
2.7.4	Ebenen im Raum . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Analysis</b> . . . . .	<b>105</b>
3.1	Begriff der Funktion . . . . .	105
3.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	109
3.3	Elementare Funktionen . . . . .	112
3.4	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	114
3.4.1	Motivation . . . . .	114
3.4.2	Definition des Grenzwertes einer Funktion . . . . .	116
3.4.3	Grenzwertberechnung und unendlich kleine und unendlich große Größen . . . . .	121
3.4.4	Folgen reeller Zahlen . . . . .	124
3.4.5	Definition der Exponentialfunktion* . . . . .	128
3.4.6	Stetigkeit . . . . .	129
3.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	131
3.6	Gleichmäßige Stetigkeit* . . . . .	135
3.7	Differenzierbarkeit von Funktionen . . . . .	136
3.7.1	Differentiationsregeln . . . . .	138
3.7.2	Logarithmisches Differenzieren . . . . .	140
3.8	Lineare Approximation und Differential . . . . .	141
3.8.1	Totales Differential . . . . .	141
3.8.2	Fehlerrechnung und -fortpflanzung . . . . .	143
3.9	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	144
3.10	TAYLORSche Formel und der Satz von TAYLOR . . . . .	148
3.11	Extremalprobleme . . . . .	153
3.12	BANACHScher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen . . . . .	156
3.12.1	BANACHScher Fixpunktsatz . . . . .	156
3.12.2	NEWTON-Verfahren . . . . .	158
3.13	Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	161
3.13.1	Kurventangente . . . . .	162
3.13.2	Krümmung einer Kurve . . . . .	164
3.14	Integralrechnung . . . . .	166
3.14.1	Unbestimmtes Integral und Stammfunktion . . . . .	166
3.14.2	Integrationsregeln und -techniken . . . . .	166
3.14.3	Integration rationaler Funktionen und Partialbruchzerlegung . . . . .	169
3.14.4	Bestimmtes Integral . . . . .	176

## 0 Vorbemerkungen

Angangspunkt für die Vorlesung HM I für Ingenieure war die Frage, womit der Ingenieur in seiner Arbeit konfrontiert wird. Es entstehen mathematische Aufgaben u.a. bei

- der mathematischen Modellierung von technischen Prozessen (z.B. chemische Reaktionen, Rad-Schiene-Systeme, Dampferzeuger),
- der Optimierung von Prozessabläufen,
- der Beschreibung von natürlichen Phänomenen wie Klima, Umwelt, aber auch z.B. der Bevölkerungsentwicklung (Populationsdynamik) und
- der Experimentauswertung.

Die genannten Aufgabenstellungen bedeuten konkret

- die Lösung von Differentialgleichungen,
- die Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen,
- die Auswertung von Integralen,
- die Bestimmung von Extremalstellen von Funktionen,
- die Interpolation von Meßwerten und
- die näherungsweise Beschreibung von nichtlinearen Zusammenhängen durch lineare oder polynomiale Beziehungen,

womit gleichzeitig die Thematik der HM I-Vorlesung umrissen ist. Die Themenabfolge und die Themenwahl richtete sich nach den in den letzten 3 Jahren gehaltenen "Höhere Mathematik für Ingenieure"-Veranstaltungen [3] meiner Kollegen. Da die "Höhere Mathematik für Ingenieure" parallel gelesen wird, ist eine gewisse Synchronität zur Vorlesung von Prof. H. Bausch angestrebt worden, da in Übungen und Tutorien vom gleichen thematischen Fortgang der Vorlesungen ausgegangen wird. Deshalb und auch auf Grund der instruktiven ingenieurgemäßen Stoffdarbringung nehme ich auch Bezug auf die Folien von H. Bausch aus der Vorlesung vom Wintersemester 1997/98.

Ich halte die dadurch vorgegebene Reihenfolge der Themen, die Mischung von algebraischen und analytischen Themen sowie die sehr große Stofffülle für überdenkenswert und werde dies auch in die laufenden Diskussionen um die Gestaltung von Service-Veranstaltungen des FB Mathematik für Ingenieure einbringen.

Dieses Skript kann und will nicht die Standard-Lehrbücher der "Höheren Mathematik für Ingenieure" [1], [2], [4], [6], [5] oder [7] ersetzen, soll aber die mathematischen Themen incl. der grundlegenden Axiome und Definitionen geschlossen, wenn auch weitestgehend ohne Beweise, darstellen. Aus diesem Grund werden im Skript auch Themen angesprochen, für die in der Vorlesung kein Raum bleibt, die aber hinsichtlich einer halbwegs geschlossenen Darstellung interessant sind. Da diese Themen bei Klausuren und Prüfungen von Ingenieurstudenten nicht gefragt sind, werden die entsprechenden Abschnitte mit einem \* versehen, d.h. sie können, müssen aber nicht gelesen werden.

Da das Skript immer unter Zeitdruck geschrieben wurde, sind Fehler (hoffentlich nicht zu viele) nicht zu vermeiden. Für die erste grobe Durchsicht möchte ich meinem Kollegen Dr. G. Seifert recht herzlich danken. In die aktuelle Version des Skriptes wurden auch verschiedene inhaltliche und methodische Hinweise von Dr. W. König und Prof. Dr. D. Krüger eingearbeitet.

# 1 Mathematische Grundlagen

## 1.1 Logische Grundlagen

### 1.1.1 Aussagen und Aussagenformen

Die Mathematik präsentiert sich in Aussagen, z.B.,

$A :=$  "625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar",

$B :=$  " $x^2 + 1 = 0$  hat keine reelle Lösung",

$C :=$  " $P_1 = (1, 2)$ ,  $P_2 = (2, 4)$  und  $P_3 = (3, 5)$  liegen auf einer Geraden."

Aussagen sind dadurch gekennzeichnet, daß man in der Regel in der Lage ist klar zu entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind. Wenn wir mit  $\omega(A)$ ,  $\omega(B)$  usw. den jeweiligen Wahrheitswert ( $W$  für eine wahre Aussage und  $F$  für eine falsche Aussage) der Aussagen  $A$ ,  $B$  usw. bezeichnen<sup>1</sup>, erhält man sofort

$$\omega(A) = W,$$

$$\omega(B) = W$$

und im Ergebnis einer kleinen Skizze

$$\omega(C) = F.$$

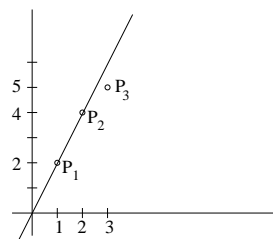


Abbildung 1: Gerade in der Zahleneben

Für die weitere Beschäftigung mit der höheren Mathematik postulieren wir

#### Postulat 1.1.

Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch - ein Drittes gibt es nicht.

Dieses Postulat bezeichnet man auch als "Satz vom ausgeschlossenen Dritten", und damit arbeiten wir von nun an mit einer *zweiwertigen* Logik.

Wir definieren nun den Begriff der Aussageform.

#### Definition 1.2.

Eine *Aussageform* ist ein Satz, der eine oder mehrere Variable enthält und der nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Im Falle einer Variablen  $x$  verwenden wir die Schreibweise  $A(x)$  für eine Aussageform, z.B.,

$A(x) :=$  " $P_1 = (1, 2)$ ,  $P_2 = (2, 4)$  und  $P_3 = (3, x)$  liegen auf einer Geraden",

bzw. im Falle zweier Variablen  $x, y$  die Schreibweise

$B(x, y) :=$  " $x = 5y$ ".

Man sieht nun sofort, daß

$A(6)$  wahr ist, also  $\omega(A(6))=W$ ,

$B(25, 5)$  wahr ist, also  $\omega(B(25, 5))=W$ ,

und z.B.

$A(8)$  falsch ist, also  $\omega(A(8))=F$ ,

$B(1, 1)$  falsch ist, also  $\omega(B(1, 1))=F$ .

<sup>1</sup> $\omega$  ist eine Abbildung von der Menge aller Aussagen auf die Menge  $\{W, F\}$ .

### 1.1.2 Logische Operationen und Aussagenverbindungen

#### Definition 1.3.

*Logische Operationen* sind Operationen, die auf Aussagen angewandt neue Aussagen bzw. Aussagenverbindungen erzeugen.

#### a) Negation

Das Ergebnis der *Negation* einer Aussage  $A$ , bezeichnet durch

$$\bar{A} \quad (\text{gesprochen: "nicht A"}),$$

bedeutet (statt  $\bar{A}$  wird auch die Bezeichnung  $\neg A$  verwendet), daß

$$\begin{aligned} \omega(\bar{A}) = F \text{ gilt,} & \quad \text{wenn } \omega(A) = W \text{ ist,} \\ \omega(\bar{A}) = W \text{ gilt,} & \quad \text{wenn } \omega(A) = F \text{ ist.} \end{aligned}$$

Diesen Sachverhalt fassen wir in einer **Wahrheitstabelle** zusammen. Für die Negation erhalten wir

Negation	$A$	$\bar{A}$
	W	F
	F	W

Wenn  $A$  beispielsweise die Aussage

$$A := \text{"25 ist eine Quadratzahl"}$$

ist, und damit  $\omega(A) = W$  gilt, so ist  $\bar{A}$  die Aussage

$$\bar{A} := \text{"25 ist keine Quadratzahl"},$$

was ja bekanntlich nicht richtig ist, so daß sich  $\omega(\bar{A}) = F$  ergibt.

#### b) Konjunktion

Die *Konjunktion* der Aussagen  $A$  und  $B$  bezeichnen wir durch

$$A \wedge B \quad (\text{gesprochen: "A und B"}),$$

und definieren

$$\omega(A \wedge B) = W \text{ genau dann, wenn } \omega(A) = W \text{ und } \omega(B) = W \text{ ist,}$$

womit wir die Wahrheitstabelle

Konjunktion	$A$	$B$	$A \wedge B$
	W	W	W
	W	F	F
	F	W	F
	F	F	F

erhalten. Die Konjunktion  $A \wedge B$  der Aussagen

$A$  := "Politiker sagen immer die Wahrheit" und

$B$  := "alle Studenten haben mindestens eine 2 als Abiturabschluß"

ist auf jeden Fall falsch, also gilt  $\omega(A \wedge B) = F$ , da  $\omega(A) = F$ , so daß unabhängig davon, ob  $B$  zutrifft oder nicht.

Technisch wird die Konjunktion durch eine Reihenschaltung zweier Schalter (für  $A$  und  $B$ ) realisiert (früher wurden in Schaltkreisen Relais, Elektronen-Röhren bzw. Transistoren verwendet, heute bringt man die gesamte Transistoren- und Röhrenproduktion eines Markführers bekanntlich auf einem Halbleiter-Chip unter), so daß nur dann Strom fließt, wenn beide Schalter geschlossen ( $A$  und  $B$  zutreffen) sind.

### c) Alternative

Die *Alternative* der Aussagen  $A$  und  $B$  bezeichnen wir mit

$$A \vee B \quad (\text{gesprochen: "A oder B"}),$$

und definieren

$$\omega(A \vee B) = F \text{ genau dann, wenn } \omega(A) = F \text{ und } \omega(B) = F \text{ ist.}$$

Damit ergibt sich die Wahrheitstabelle

Alternative	$A$	$B$	$A \vee B$
	W	W	W
	W	F	W
	F	W	W
	F	F	F

Die technische Realisierung der Alternative erfolgt über die Parallelschaltung zweier Schalter (für  $A$  und  $B$ ), so daß nur dann kein Strom fließt, wenn beide Schalter geöffnet ( $A$  und  $B$  nicht zutreffen) sind.

### d) Implikation

Die *Implikation* der Aussagen  $A$  und  $B$  wird mit

$$A \implies B \quad (\text{gesprochen: "aus A folgt B"}),$$

bezeichnet und ist definiert durch

$$\omega(A \implies B) = F \text{ genau dann, wenn } \omega(A) = W \text{ und } \omega(B) = F,$$

was die Wahrheitstabelle

Implikation	$A$	$B$	$A \implies B$
	W	W	W
	W	F	F
	F	W	W
	F	F	W

ergibt. Hierzu ist anzumerken, daß man in der Mathematik bei korrekten Schlußfolgerungen aus einer falschen Voraussetzung allen möglichen Unsinn, also sowohl falsche, als auch wahre Aussagen herleiten kann.

Zum Beispiel ist der Satz



”Wenn mein Freund den Nobelpreis bekommt, bin ich der Kaiser von China”  
wahr (wenn wir voraussetzen, daß mein Freund *nicht* den Nobelpreis bekommt).

### e) Äquivalenz

Die Äquivalenz zweier Aussagen  $A$  und  $B$  wird mit

$$A \iff B \text{ (gesprochen "A gilt genau dann, wenn B gilt")},$$

bezeichnet und ist definiert durch

$$\omega(A \iff B) = W \text{ genau dann, wenn } A, B \text{ den gleichen Wahrheitswert haben.}$$

Damit ergibt sich die Wahrheitstabelle

Äquivalenz	$A$	$B$	$A \iff B$
	W	W	W
	W	F	F
	F	W	F
	F	F	W

Als Beispiel betrachten wir die Aussageformen  $A(a) := "a=0"$  und  $B(b) := "b=0"$  und erhalten für die Aussagenverbindung  $A(0) \iff B(1)$

$$\omega(A(0) \iff B(1)) = F,$$

da  $\omega(A(0)) = W$  und  $\omega(B(1)) = F$  gilt, also sind die Aussagen  $A(0)$  und  $B(1)$  nicht äquivalent. Äquivalent sind hingegen die Aussagen

$A := "mindestens eine der Zahlen  $x, y$  ist gleich 0"$  und

$B := "xy = 0"$ .

Es gilt  $\omega(A \iff B) = W$ .

Bei komplizierteren Aussagenverbindungen stellt man zur Entscheidung, ob die Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen und Aussageverbindungen zutrifft oder nicht, die Wahrheitstabelle für die gesamte Aussagenverbindung und deren Bestandteile auf. Dies wollen wir exemplarisch für die Aussagenverbindung

$$C := (A \wedge (B \implies \bar{A})) \implies \bar{B}$$

tun. Die sorgfältige Betrachtung der einzelnen Bestandteile von  $C$  ergibt die Wahrheitstabelle

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$B \implies \bar{A}$	$A \wedge (B \implies \bar{A})$	$C$
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

die Aussagenverbindung  $C$  ist also immer wahr. ”Immerwahre” Aussagenverbindungen werden **Tautologien** genannt.

Abschließend wollen wir einige logische Regeln in einem Satz formulieren.

**Satz 1.4.** Für alle Aussagen  $A$  und  $B$  gelten:

- a)  $\overline{\overline{A}} = A$   
 b)  $(A \implies B) = (\overline{A} \vee B) = (\overline{B} \implies \overline{A})$   
 c)  $(A \iff B) = ((A \implies B) \wedge (B \implies A)) = (\overline{A} \iff \overline{B})$   
 d)  $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$   
 e)  $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

Der Beweis des Satzes ergibt sich sofort aus den Wahrheitwerttabellen der zu vergleichenden Aussagenverbindungen.

### 1.1.3 Quantoren

Bei Aussageformen  $A(x)$  oder  $B(x, y)$  ist oftmals die Frage interessant, für welche konkreten  $x$  oder  $y$  die Aussagen  $A$  bzw.  $B$  zutreffen oder nicht. Besondere Bedeutung haben die Fälle "für alle  $x$  mit einer vorgegebenen Eigenschaft" und "es existiert mindestens ein  $x$ ". Für diese Fälle werden Quantoren, nämlich

- $\forall x$  "für alle  $x$ " (Allquantor)  
 $\exists x$  "es existiert ein  $x$ , so daß ..." (Existenzquantor)

eingeführt. Betrachten wir beispielsweise die Aussageform  $A(x) = "x^2 = 1"$  so erhalten wir mit dem Allquantor  $\forall$  die Aussage

$$P := \forall x, \text{reell} : A(x) = \forall x, \text{reell} : "x^2 = 1"$$

und bemerken, daß  $\omega(P) = F$  gilt, da die Gleichung  $x^2 = 1$  nicht für alle reellen Zahlen gilt. Für die Aussage

$$Q := \exists x, \text{reell} : A(x) = \exists x, \text{reell} : "x^2 = 1"$$

erhalten wir dagegen  $\omega(Q) = W$ , da die Gleichung ja für die reelle Zahl  $x = 1$  erfüllt ist.

Abschließend wollen wir noch die Verneinung von Aussagen der Form  $P := \forall x : A(x)$  und  $Q := \exists x : A(x)$  betrachten.

**Definition 1.5.**

$$\overline{P} = \overline{\forall x : A(x)} := \exists x : \overline{A(x)}$$

$$\overline{Q} = \overline{\exists x : A(x)} := \forall x : \overline{A(x)}$$

Daß diese Definitionen vernünftig sind zeigt das folgende Beispiel. Wir betrachten die Aussageform  $B(x) := "x^2 + x + 1 = 0"$  und die Aussage  $P := \exists x, \text{reell} : B(x)$ . Wie stellen fest, daß die Aussage  $P$  falsch ist, da man keine reelle Zahl  $x$  finden kann, die die Gleichung  $x^2 + x + 1 = 0$  erfüllt. Nach Definition ergibt sich für  $\overline{P}$

$$\overline{P} = \overline{\exists x, \text{reell} : B(x)} = \forall x, \text{reell} : \overline{B(x)} = \forall x, \text{reell} : "x^2 + x + 1 \neq 0"$$

Da es keine reelle Zahl  $x$  gibt, die die Gleichung  $x^2 + x + 1 = 0$  erfüllt, ist "logischerweise" für alle reellen Zahlen  $x$  die Ungleichheit  $x^2 + x + 1 \neq 0$  erfüllt, und damit ist die Aussage  $\overline{P}$  wahr, also  $\omega(\overline{P}) = W$ .

## 1.2 Grundlagen der Mengenlehre

### 1.2.1 Begriff der Menge und Mengenbeziehungen

Der Begriff der Menge wird von uns in verschiedenen Bereichen unseres Lebens wie selbstverständlich benutzt. Auf die mathematisch strengen Grundlagen der Mengentheorie kann in dieser Lehrveranstaltung nicht eingegangen werden. Zum Verständnis des HM I-Stoffes ist ein sogenannter "naiver" Standpunkt ausreichend. Deshalb verwenden wir die CANTORSche "naive" Mengendefinition.

#### Definition 1.6.

Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte der Anschauung oder des Denkens.

Wir schreiben  $x \in A$ , falls das Objekt  $x$  zur Menge  $A$  gehört, und  $x \notin A$ , falls  $x$  nicht zur Menge gehört. Für jedes Objekt gilt

$$x \in A \quad \text{oder} \quad x \notin A.$$

Die leere Menge bezeichnen wir mit  $\emptyset$ .

Es gibt zwei Möglichkeiten der Charakterisierung bzw. Darstellung von Mengen,

- a) die enumerative Darstellung, d.h., die Elemente werden explizit aufgelistet

$$A := \{\text{Otto, Ottmar, Ole, Oswald}\},$$

- b) die deskriptive Darstellung, d.h. die Charakterisierung der Elemente durch eine Eigenschaft,

$$B := \{n \mid \omega(C(n)) = W\},$$

(lies: "B ist die Menge aller  $n$ , für die gilt:  $\omega(C(n)) = W$ ") wobei  $C(n)$  eine Aussageform ist, z.B.,

$$C(n) := "n \text{ ist natürliche Zahl } (n \in \mathbb{N}) \text{ und es gibt ein } p \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2p".$$

In diesem Fall ist B die Menge der geraden natürlichen Zahlen  $2\mathbb{N}$ .

#### Definition 1.7. Mengenbeziehungen

- (i)  $A$  ist Teilmenge von  $B$

$$A \subseteq B, \text{ falls gilt } x \in A \implies x \in B$$

- (ii) Mengengleichheit

$$A = B, \text{ falls gilt } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

- (iii)  $A$  ist echte Teilmenge von  $B$

$$A \subset B, \text{ falls gilt } A \subseteq B \text{ und } A \neq B$$

### 1.2.2 Mengenoperationen

**Definition 1.8.** Seien  $A$  und  $B$  Teilmengen einer Grundmenge  $X$ .

(i) Vereinigungsmenge

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\},$$

(ii) Durchschnittsmenge

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$

(iii) Differenzmenge

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\},$$

(iv) Komplementmenge

Das Komplement von  $A$  in  $X$  (Schreibweise  $\overline{A}$  oder  $A^c$ ) ist definiert durch

$$\overline{A} := X \setminus A,$$

(v) Potenzmenge (Menge aller Teilmengen von  $A$ )

$$\mathcal{P}(A) := \{U | U \subseteq A\},$$

(vi) kartesisches Produkt zweier Mengen

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Mit den sogenannten Venn-Diagrammen können Mengenoperationen grafisch dargestellt werden. Die folgenden beiden Diagramme zeigen den Durchschnitt bzw. die Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$ .

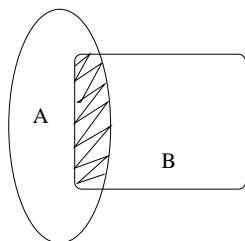


Abbildung 2: Durchschnitt  $A \cap B$

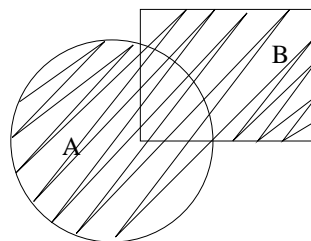


Abbildung 3: Vereinigung  $A \cup B$

### 1.2.3 Mengenalgebraische Regeln

**Satz 1.9.** *Gesetze der Mengenalgebra*

Für alle Teilmengen  $A, B$  einer Grundmenge  $X$  gelten:

- a) 1. *Distributivgesetz*  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,
- b) 2. *Distributivgesetz*  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,
- c) *Assoziativgesetz für  $\cup$*   $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,
- d) *Assoziativgesetz für  $\cap$*   $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,
- e)  $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$ ,
- f)  $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B} \iff B \subseteq \overline{A}$ ,
- e) *DE MORGANSche Regeln:*  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Beweis der DE MORGANSchen Regeln.

$$\begin{aligned}
 x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\
 &\iff x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\
 &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\
 &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \in X \setminus (A \cap B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cap B) \\
 &\iff x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
 &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \\
 &\iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)
 \end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Wenn wir die Menge der natürlichen Zahlen wie üblich mit  $\mathbb{N}$  und die geraden natürlichen Zahlen mit  $2\mathbb{N}$  bezeichnen, dann erhalten wir mit

$$\overline{2\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} = \{2n + 1, \mid n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen als Komplement der geraden natürlichen Zahlen in  $\mathbb{N}$ .

2. Seien die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x < 25\} = [6, 25),$$

$$B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 625 \wedge x \neq 1\} \text{ und}$$

$$C := \{7, 8, 9\}$$

gegeben. Die Mengen  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $(A \cap B) \cup C$  und  $A \cup (B \cap C)$  sind zu bilden.

Für  $B$  ergibt sich  $B = \{5, 25, 125\}$ . Man sieht sehr schnell, daß  $A$  und  $B$  bzw.  $B$  und  $C$  keine gemeinsamen Elemente haben (die Mengen sind disjunkt), so daß

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{und} \quad B \cap C = \emptyset$$

gilt. Damit ist

$$A \cup (B \cap C) = A \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup C = C.$$

Für  $A \cup B$  ergibt sich schließlich

$$A \cup B = [6, 25] \cup \{5, 25, 125\} = [6, 25] \cup \{5, 125\}.$$

*Bemerkung 1.10.*

Mengenalgebraischen Ausdrücken (Mengenverbindungen) sind in der Regel durch konsequente Klammersetzung klar definiert. Wenn in Ausdrücken keine Klammern gesetzt sind, so gilt die Konvention aus der Grundschule "Punktrechnung geht vor Strichrechnung", wobei in der Mengenalgebra der Durchschnitt  $\cap$  der Multiplikation in der Arithmetik und die Vereinigung  $\cup$  bzw. die Differenz  $\setminus$  der Addition bzw. Subtraktion von Zahlen entspricht. Der Ausdruck

$$A \cup B \cap C \cup D \cap E$$

ist gleichbedeutend mit dem geklammerten Ausdruck

$$A \cup (B \cap C) \cup (D \cap E) = (A \cup (B \cap C)) \cup (D \cap E).$$

### 1.3 Abbildungen

**Definition 1.11.**

Seien  $A$  und  $B$  Mengen, dann verstehen wir unter einer *Abbildung*  $f$  von  $A$  nach  $B$ ,

$$f : A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a),$$

eine Zuordnungsvorschrift, die jedem  $a \in A$  genau ein  $b \in B$ ,  $b = f(a)$  zuordnet.

Ist  $A' \subseteq A$  und  $B' \subseteq B$  dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die *Bildmenge* von  $A'$ , und

$$f^{-1}(B') := \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

die *Urbildmenge* von  $B'$ .

$A$  wird *Definitionsbereich* der Abbildung  $f$  genannt. Die Bildmenge heißt *Wertebereich* oder *Wertevorrat* der Abbildung  $f$  ( $f^{-1}$  hat hier nichts mit der später zu besprechenden Umkehrabbildung von  $f$  zu tun).

**Definition 1.12.**

Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt **injektiv** (eindeutig), falls für alle  $a_1, a_2 \in A$  gilt:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

$f$  heißt **surjektiv** (Abbildung auf,  $f(A) = B$ ), falls es zu jedem  $b \in B$  ein  $a \in A$  gibt, so daß  $f(a) = b$  gilt.

$f$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Beispiel:

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x^2$ .

Es sollen die Bildmenge von  $\mathbb{R}$  und die Urbildmenge von  $[1, 2]$  bestimmt werden. Man überlegt

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \quad \text{und}$$

$$f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}].$$

Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mapsto x^2$  ist weder surjektiv, noch injektiv, und damit schon gar nicht bijektiv.

## 1.4 Die natürlichen Zahlen und die Methode der vollständigen Induktion

Die natürlichen Zahlen entspringen dem Zählen, einer Fähigkeit, die in (fast) allen Kulturen existiert.

Ausgehend von der Mengenlehre können die natürlichen Zahlen und auch die anderen Zahlenbereiche mathematisch streng axiomatisch aufgebaut werden, was jedoch den Rahmen dieser Lehrveranstaltung sprengen würde (selbst bei der Mathematikerausbildung wird dies oft nicht getan). Der Mathematiker PEANO hat mit den PEANOSCHEN AXIOMEN eine treffliche Charakterisierung der natürlichen Zahlen vorgenommen, auf die wir uns im Folgenden stützen werden.

**Axiom 1.13.** (PEANO Axiome für  $\mathbb{N}$ )

- (I) 1 ist eine natürliche Zahl,
- (II) Jede natürliche Zahl  $n$  hat genau einen Nachfolger  $n'$  (Schreibweise  $2=1'$ ,  $3=2'$  usw.),
- (III) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl,
- (IV) ist  $n'$  Nachfolger von  $n$  und  $m'$  Nachfolger von  $m$  und gilt  $n'=m'$ , dann gilt  $n=m$  (d.h., jede natürliche Zahl außer 1 hat genau einen Vorgänger),
- (V) Induktionsprinzip  
Sei  $A \subseteq \mathbb{N}$  mit
  - (i)  $1 \in A$ ,
  - (ii)  $n \in A \implies n' \in A$ .

Dann ist  $A = \mathbb{N}$ .

Insbesondere das V. PEANOSCHE AXIOM wird uns noch viel Freude (oder auch Ärger) bereiten, denn es ist die Grundlage für das Prinzip der vollständigen Induktion.

**Satz 1.14.** *Prinzip der vollständigen Induktion*

Seien  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $A(n)$  eine Aussage für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ . Wenn

- $A(n_0)$  ist wahr,
- für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq n_0$ :  $A(k)$  ist wahr  $\implies A(k+1)$  ist wahr

gelten. Dann gilt die Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ .

Da das Prinzip der vollständigen Induktion ein wichtiges Beweisprinzip der Mathematik darstellt, wollen wir den Satz 1.14 etwas genauer analysieren.

Um den Satz anwenden zu können, sind die Voraussetzungen zu sichern. Es ist zum einem der **Induktionsanfang** zu machen, d.h., die Gültigkeit der Aussage  $A(n_0)$  ist zu zeigen. Als zweite Voraussetzung ist der **Induktionsschritt** zu machen, d.h., für jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq n_0$  ist die **Implikation**

falls  $A(k)$  wahr ist, so auch  $A(k+1)$ .

Gelten die beiden Voraussetzungen, kann man gemäß Satz 1.14 mit dem **Induktionsschluß** die Gültigkeit einer Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  schlußfolgern.

Beispiel 1:

Wir vermuten, daß

$$n^2 \geq 2n + 1$$

für  $n \geq 3$  gilt, und wollen die Vermutung mit dem Prinzip der vollständigen Induktion beweisen.

**Induktionsanfang:**

$$A(3) \text{ gilt, da } 9 = 3 * 3 \geq 2 * 3 + 1 = 7 \text{ ist.}$$

Die **Induktionsannahme** lautet

$$A(k) \text{ gelte für ein } k \geq 3.$$

Unter Nutzung der Induktionsannahme ist nun die Gültigkeit von  $A(k + 1)$  zu zeigen.

$$\begin{aligned} A(k) = "k^2 \geq 2k + 1, k \geq 3" \text{ ist wahr} &\implies k^2 + (2k + 1) \geq 2k + 1 + (2k + 1) \\ &\implies (k + 1)^2 \geq 2k + 2 + 2k \\ &\implies (k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 2k \\ &\implies (k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1 \\ &\implies A(k + 1), k \geq 3, \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Mit dem **Induktionsschluß** ist die Aussage  $A(n) = "n^2 \geq 2n + 1 \wedge n \geq 3"$  nach Satz 1.14 für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  bewiesen.

*Bemerkung 1.15.*

Bei dem eben durchgeführten Induktionsbeweis wurde eigentlich nur benötigt, daß  $k \geq 1$  sein mußte. Wenn man nun allerdings denkt, daß die Aussage schon für natürliche Zahlen größer oder gleich 1 gilt, so irrt man, denn man muß feststellen, daß  $A(1)$  nicht gilt, man hat also keinen Induktionsanfang für  $n < 3$ .

Andererseits ist es unzureichend, Vermutungen für einige natürliche Zahlen  $n = 1, 5, 6, 7, \dots, p$  nachzuweisen, und dann zu schlußfolgern, daß die Vermutung für alle natürlichen Zahlen zutrifft. So zum Beispiel gilt die Aussage  $A(n) := "2^n > n^2"$  für  $n = 1, 5, 6, 7, \dots$ . Beim Versuch den Nachweis zu erbringen, daß die Implikation

$$A(k) \text{ ist wahr} \implies A(k + 1) \text{ ist wahr}$$

gilt, stellt man fest, daß der Nachweis nur für  $n \geq 5$  gelingt, und in der Tat gilt die Vermutung " $2^n > n^2$ " nicht für  $n = 2, 3, 4$ .

Beispiel 2.:

Wir vermuten, daß die Beziehung

$$A(n) := "2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1", \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

gilt, und wollen dies mit der vollständigen Induktion beweisen.

Induktionsanfang,  $n = 1$ :

$$1 = 2^0 = 2^1 - 1 = 1,$$



Induktionsannahme, Beziehung gilt für  $k = n, n \in \mathbb{N}, k$  fest:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Unter Nutzung der Gültigkeit der Induktionsannahme ist

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

zu zeigen:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 &\implies 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k \\ &\implies 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2 * 2^k - 1 \\ &\implies 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Mit dem **Induktionsschluß** nach Satz 1.14 ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  bewiesen. die Beziehung

## 1.5 Algebraische Strukturen - Zahlbereiche\*

Obwohl wir voraussetzen, daß die Zahlbereiche  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  aus der Schule bekannt sind, sei an dieser Stelle auf die grundlegenden Eigenschaften der ganzen, rationalen und reellen Zahlen hingewiesen, die bei fast allen Rechnungen stillschweigend vorausgesetzt werden.

(Wer sich genauer für die streng axiomatische Einführung der Zahlbereiche interessiert, dem sei z.B. das grundlegende Buch von E. Landau: Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930, empfohlen).

### 1.5.1 Gruppen\*

#### Definition 1.16.

Eine nichtleere Menge  $G$  heißt Gruppe, wenn die Axiome

- (G 1) es gibt eine Operation, die angewandt auf  $x \in G$  und  $y \in G$  eindeutig  $x + y$  ergibt, mit  $x + y \in G$ ,
- (G 2) es gilt mit  $a + (b + c) = (a + b) + c$  das Assoziativgesetz ( $a, b, c \in G$ ),
- (G 3) es existiert ein Element  $e \in G$ , so daß für alle  $x \in G$   $e + x = x = x + e$ ,  
 $e$  wird neutrales Element oder auch Eins genannt,
- (G 4) es existiert eine solche Eins  $e$ , so daß es für alle  $a \in G$  ein  $a_{inv} \in G$  gibt mit  $a_{inv} + a = e$ ,  
 $a_{inv}$  wird Linksinverses von  $a$  genannt,

erfüllt sind. Gilt außerdem für alle  $a, b \in G$   $a + b = b + a$ , dann heißt  $G$  kommutativ oder abelsch (benannt nach dem norwegischen Mathematiker N.H. ABEL)

$G$  heißt Halbgruppe, wenn nur (G 1) und (G 2) gelten, und  $G$  heißt Monoid, wenn (G 1), (G 2) und (G 3) gelten.

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Standard-Addition,  $(\mathbb{Z}, +)$  bilden eine abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element.
- $(\mathbb{N}, +)$  ist ein Monoid, 0 ist das neutrale Element.
- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$  ist eine Halbgruppe.

### 1.5.2 Ringe und Körper\*

#### Definition 1.17.

Eine nichtleere Menge  $R$  heißt Ring, wenn auf  $R$  zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)  $+$ ,  $\cdot$  erklärt sind, die Elementen aus  $R \times R$  wiederum Elemente aus  $R$  zuordnen, und den Axiomen (R 1)-(R 3)

(R 1)  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe,

(R 2) Für  $x, y \in R$  gilt  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

(R 3) Für  $x, y \in R$  gilt  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ .

genügt.

Gilt außerdem  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in R$  heißt  $R$  kommutativer Ring.

*Bemerkung 1.18.*

Ein Ring  $R$  braucht keine multiplikative Eins, d.h. kein Element  $\mathbf{1}$  mit  $\mathbf{1} \cdot a = a = a \cdot \mathbf{1}$  zu besitzen.

Beispiel:

Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$ , dafür schreibt man auch das Tripel  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , sind ein kommutativer Ring mit einer multiplikativen Eins.

#### Definition 1.19.

Ein kommutativer Ring  $(K, +, \cdot)$  mit multiplikativer Eins heißt Körper, falls  $K \setminus \{\mathbf{e}\}$  bezügl. der Multiplikation eine ABELSche Gruppe bildet ( $\mathbf{e}$  ist das bei der Ring-Definition angesprochene Einselement der Addition).

Beispiel:

Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind bezügl. der landläufigen Addition und Multiplikation Körper.

Das trifft auch auf die komplexen Zahlen, die etwas später ausführlich besprochen werden, zu.

In den folgenden Kapiteln werden nun verstärkt Themen behandelt, bei denen die bisher besprochenen Begriffe verwendet werden.

## 1.6 Ungleichungen

Hauptgegenstand dieses Abschnittes sind Ungleichungen reeller Zahlen, also etwa Beziehungen der Form

$$\frac{1}{5}x \leq 3.$$

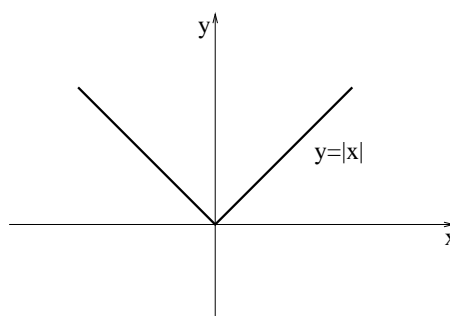
Bevor wir die Methoden zur Behandlung und Lösung von Ungleichungen diskutieren, wollen wir kurz an den Begriff des **absoluten Betrages** einer reellen Zahl erinnern.

#### Definition 1.20.

Der *Betrag* einer reellen Zahl  $x$  wird mit  $|x|$  bezeichnet und ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Geometrisch gesehen, ist  $|x|$  der Abstand der Zahl  $x$  auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt und  $|x - y|$  der Abstand der Zahlen  $x$  und  $y$  voneinander.

Abbildung 4: Verlauf von  $y=|x|$  in der  $x - y$ -Ebene

### 1.6.1 Rechenregeln für Ungleichungen

**Satz 1.21.** Sei die Ungleichung

$$a > b$$

für gewisse  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gelten:

- (i)  $\forall c \in \mathbb{R} : a + c > b + c,$
- (ii)  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0 : a \cdot p > b \cdot p,$
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{R}, n < 0 : a \cdot n < b \cdot n,$
- (iv)  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b},$  falls  $a > 0, b > 0,$
- (v)  $a > b \wedge c > d \implies a + c > b + d,$  Addition von Ungleichungen,
- (vi)  $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \implies a^n > b^n,$
- (vii)  $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \implies \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$

Die Regeln (i) bis (iv) erklären sich aus den arithmetischen Grundregeln des Rechnens mit reellen Zahlen, und die Regeln (vi) und (vii) lassen sich recht einfach mit der Methode der vollständigen Induktion zeigen.

**Satz 1.22.**

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten:

- (i)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- (ii)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|},$  falls  $b \neq 0,$
- (iii)  $|a| < b \iff -b < a < b,$
- (iv)  $|a + b| \leq |a| + |b|,$  Dreiecksungleichung

*Beweis.*

Zuerst soll (iii) bewiesen werden.

$$|a| < b \implies a < b \wedge -a < b \implies a < b \wedge a > -b,$$

$$-b < a < b \implies -b < a \wedge a < b \implies b > -a \wedge b > a \implies |a| < b,$$

Damit ist (iii) bewiesen. Unter Nutzung von (iii) beweisen wir (iv), die Dreiecksungleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} (I) \quad & -|a| \leq a \leq |a| \\ (II) \quad & -|b| \leq b \leq |b| \end{aligned}$$

Die Addition der gleichgerichteten Ungleichungen (I) und (II) (nach Satz 1.21 (v) möglich) ergibt

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Aus (iii) folgt sofort die Dreiecksungleichung.  $\square$

### 1.6.2 Wichtige Ungleichungen

#### 1) Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

Eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung ergibt sich zu

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung beweist man unter Nutzung der Dreiecksungleichung mit der Methode der vollständigen Induktion.

#### 2) Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

Seien mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $b_1, b_2, \dots, b_n$  reelle Zahlen gegeben. Es gilt die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Wenn man die Multiplikationen weiter ausführt, erhält man

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2.$$

Wenn man berücksichtigt, daß aus  $(x - y)^2 \geq 0$  die Ungleichung

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

folgt, und  $x = a_1 b_2$  und  $y = a_2 b_1$  setzt, ist der Beweis für die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung erbracht.

Mit der Methode der vollst. Induktion ergibt sich die allgemeine CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right), \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

Aus der allgemeinen CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung folgt unmittelbar die Gleichung<sup>2</sup>

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

<sup>2</sup>Die linke Seite dieser Gleichung bezeichnet man als Skalarprodukt zweier Vektoren, und die Gleichung besagt, daß das Skalarprodukt nicht größer als das Produkt der Beträge der Vektoren sein kann.

3) *Bernoulli'sche* Ungleichung

Sei  $a > -1$ ,  $a \neq 0$ . Dann gilt die BERNOULLISCHE Ungleichung

$$(1 + a)^n > 1 + na, \quad \forall n \geq 2.$$

Die BERNOULLISCHE Ungleichung beweist man mit der Methode der vollständigen Induktion, also

I Induktionsanfang für  $n_0 = 2$

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a, \text{ da } a \neq 0,$$

II Ungleichung gilt für festes  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  (Induktionsannahme). Unter dieser Annahme ist die Gültigkeit der Gleichung für  $k + 1$  zu zeigen.

III Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} (1 + a)^k > 1 + ka &\implies (1 + a)^k(1 + a) > (1 + ka)(1 + a) \\ &\implies (1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a + ka^2 \\ &\implies (1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a, \text{ da } ka^2 > 0. \end{aligned}$$

IV Damit gilt die Ungleichung  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

## 4) Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Sei  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , dann gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2},$$

d.h. das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

Die Verallgemeinerung dieser Ungleichung für die nichtnegativen reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  lautet

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

**1.6.3 Ungleichungen mit einer Variablen**

Bei Ungleichungen oder Ungleichungssystemen, in denen Variablen vorkommen, besteht das Ziel in der Bestimmung von Variablenmengen, deren Elemente die Ungleichungen erfüllen. Zur Bestimmung der Lösungsmengen werden die in den Ungleichungen vorkommenden Variablen durch äquivalente Umformungen isoliert. In der Regel sind bei komplizierteren Ungleichungen Fallunterscheidungen erforderlich, um wirklich alle Lösungen zu bestimmen.

Besondere Sorgfalt, sprich Fallunterscheidungen, sind erforderlich, falls in den Ungleichungen

- Betragsterme, wie z.B.  $|x - 3|$ , vorkommen, oder
- die Nenner von Brüchen Nullstellen haben und das Vorzeichen wechseln können, z.B. im Ausdruck  $\frac{1}{x-1}$ .

Beispiel 1:

Die Ungleichung

$$|2x + 5| \leq 25x - 3$$

ist zu lösen. Genauer: Wir wollen  $L = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 5| \leq 25x - 3\}$  identifizieren. Wir erkennen mit  $x = -\frac{5}{2}$  den kritischen Punkt und unterscheiden die Fälle  $x < -\frac{5}{2}$  und  $x \geq -\frac{5}{2}$ .

Fall I,  $x < -\frac{5}{2}$ . Wir ermitteln  $L_I = L \cap (-\infty, -\frac{5}{2})$ ,

$$|2x + 5| \leq 25x - 3 \iff -(2x + 5) \leq 25x - 3 \iff -2 \leq 27x \iff x \geq -\frac{2}{27}.$$

Damit erhalten wir mit

$$L_I = \{x < -\frac{5}{2} \mid x \geq -\frac{2}{27}\} = \emptyset$$

als Lösungsmenge des Falles I.

Fall II,  $x \geq -\frac{5}{2}$ . Wir ermitteln  $L_{II} = L \cap [-\frac{5}{2}, \infty)$ ,

$$|2x + 5| \leq 25x - 3 \iff 2x + 5 \leq 25x - 3 \iff 8 \leq 23x \iff x \geq \frac{8}{23},$$

womit sich für den Fall II die Lösungsmenge

$$L_{II} = [\frac{8}{23}, \infty) \cap [-\frac{5}{2}, \infty) = [\frac{8}{23}, \infty)$$

ergibt. Als Lösungsmenge der Ausgangsungleichung erhalten wir schließlich

$$L = L_I \cup L_{II} = [\frac{8}{23}, \infty).$$

Beispiel 2:

Erhöhen wir die Schwierigkeit, und betrachten die Ungleichung

$$|x - 3| > \frac{1}{x - 1}.$$

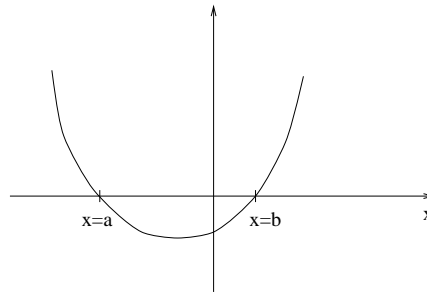
Wie oben bemerkt, müssen wir den Wert  $x = 1$  von vorneherein ausschließen, damit  $\frac{1}{x-1}$  einen vernünftigen Wert hat. Zur Behandlung bzw. Beseitigung des Betrages haben wir eben die Fälle I und II erhalten, die wir nun genauer analysieren möchten.

Fall I,  $x > 3$ ,  $L_{\text{cand}} = (3, \infty)$ :

$$|x - 3| > \frac{1}{x - 1} \iff x - 3 > \frac{1}{x - 1}.$$

An dieser Stelle wird evtl. eine weitere Fallentscheidung nötig, denn wir müssen die Ungleichung mit  $x - 1$  multiplizieren, um der Isolation von  $x$  näher zu kommen. Beim Fall I ist  $x > 3$ , so daß  $x - 1$  in jedem Fall positiv ist.

$$\begin{aligned} x - 3 > \frac{1}{x - 1} &\iff (x - 3)(x - 1) > 1 \iff x^2 - 4x + 3 > 1 \\ &\iff x^2 - 4x + 2 > 0. \end{aligned}$$

Abbildung 5: Parabel schneidet die  $x$ -Achse bei  $a = -\sqrt{2} + 2$ ,  $b = \sqrt{2} + 2$ 

$x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$  beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, die die  $x$ -Achse an den Stellen  $x_1 = -\sqrt{2} + 2$  und  $x_2 = \sqrt{2} + 2$  schneidet ( $x_1, x_2$  sind die Lösungen der Gleichung  $x^2 - 4x + 2 = 0$ , auch die Nullstellen des Polynoms  $x^2 - 4x + 2$  genannt). Hieraus kann man nun schlußfolgern, daß  $x^2 - 4x + 2 > 0$  für  $x < -\sqrt{2} + 2$  und  $x > \sqrt{2} + 2$  gilt.

Erinnern wir uns nun daran, daß beim Fall I generell  $x > 3$  zu gelten hat, so erhalten wir als Lösungsmenge im Fall I

$$L_I = L_{cand} \cap ((-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)) = (2 + \sqrt{2}, \infty).$$

Fall II,  $x \leq 3, x \neq 1$ :

$$|x - 3| > \frac{1}{x - 1} \iff 3 - x > \frac{1}{x - 1}.$$

An dieser Stelle wird eine weitere Fallentscheidung nötig, denn wir müssen die Ungleichung mit  $x - 1$  multiplizieren, um der Isolation von  $x$  näher zu kommen.

IIa  $1 < x \leq 3$ , d.h.  $x - 1 > 0$ ,  $L_{cand} = (1, 3]$ :

$$\begin{aligned} 3 - x > \frac{1}{x - 1} &\iff (3 - x)(x - 1) > 1 \iff 4x - x^2 - 3 > 1 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 < 0. \end{aligned}$$

Die Parabel  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$  hat die doppelte Nullstelle  $x_1 = x_2 = 2$ , d.h. die Parabel schneidet die  $x$ -Achse nicht, sondern berührt sie nur, so daß die Ungleichung  $x^2 - 4x + 4 < 0$  für keine reelle Zahl  $x$  erfüllt ist. Damit erhalten wir im Fall IIa die Lösungsmenge

$$L_{IIa} = \emptyset \cap L_{cand} = \emptyset.$$

IIb  $x < 1$ , d.h.  $x - 1 < 0$ ,  $L_{cand} = (-\infty, 1)$ :

$$\begin{aligned} 3 - x > \frac{1}{x - 1} &\iff (3 - x)(x - 1) < 1 \iff 4x - x^2 - 3 < 1 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 > 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung  $x^2 - 4x + 4 > 0$  gilt für alle  $x \neq 2$ , so daß wir aufgrund der Forderung von  $x < 1$  im Fall IIb die Lösungsmenge

$$L_{IIb} = ((-\infty, 2) \cup (2, \infty)) \cap L_{cand} = (-\infty, 1)$$

erhalten.

Als Lösungsmenge der Ungleichung  $|x - 3| > \frac{1}{x-1}$  erhalten wir nach der Auswertung aller Fälle

$$L = L_I \cup L_{IIa} \cup L_{IIb} = (2 + \sqrt{2}, \infty) \cup (-\infty, 1) = (-\infty, 1) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty).$$

Wenn die Ungleichungen mehrere Betragsterme oder Glieder mit veränderlichen Nennern haben, erhöht sich die Zahl der zu diskutierenden Fälle. Bei der Ungleichung

$$\frac{|x-1|}{x} + \frac{2}{x} - |x+1| < 5$$

stellen wir die kritischen Punkte  $x = 1$  und  $x = -1$  hinsichtlich der vorkommenden Betragsterme fest, so daß die Fälle

$$\text{I } x < -1 \implies |x-1| = -(x-1) \wedge |x+1| = -(x+1),$$

$$\text{II } -1 \leq x \leq 1, x \neq 0 \implies |x-1| = x-1 \wedge |x+1| = -(x+1) \text{ und}$$

$$\text{III } x > 1 \implies |x-1| = x-1 \wedge |x+1| = x+1$$

bei der Lösung der Ungleichung zu unterscheiden sind. Bei Fall II sind aufgrund des Vorzeichenwechsels von  $x$  die zwei "Unterfälle" IIa mit  $x < 0$  und IIb mit  $x > 0$  zu unterscheiden. Die Lösung der Ungleichung sei als gute Übung empfohlen.

#### 1.6.4 Geometrische Lösung von Ungleichungen mit einer Variablen

Bei den eben durchgeführten Fallunterscheidungen ist die Gefahr groß, einen Fall zu vergessen oder ungenügend zu würdigen.

Eine Methode, die weniger fehleranfällig ist als die oben beschriebene algebraische Methode, wollen wir geometrische Methode nennen. Zur Erläuterung der Methode betrachten wir das Beispiel 2 aus dem vorigen Abschnitt, also die Ungleichung

$$|2x + 5| \leq 25x - 3. \quad (1)$$

Wenn wir  $g(x) = |2x + 5|$  und  $f(x) = 25x - 3$  setzen, dann bedeutet die Lösung der Ungleichung (1) nichts anderes, als die Bestimmung der Intervalle oder Punkte  $x$  auf der reellen Zahlengeraden, für die

$$g(x) \leq f(x)$$

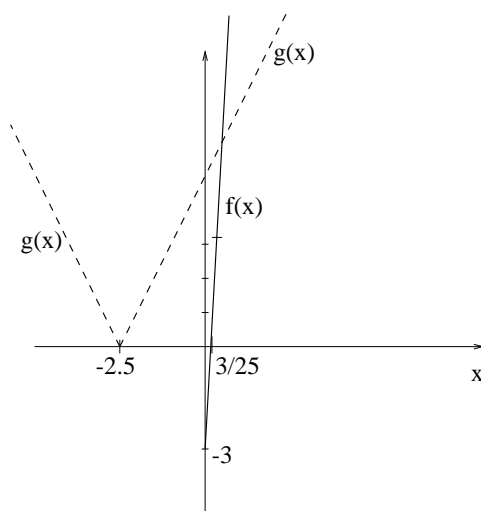
ist. Wenn wir die Funktionsgraphen aufzeichnen, können wir die Lösung der Zeichnung entnehmen. Die Abb. 6 verdeutlicht die geometrische Methode und ergibt, ebenso wie die algebraische Methode, die Lösungsmenge  $L = [\frac{8}{23}, \infty)$ , wobei der Intervallendpunkt  $\frac{8}{23}$  genau die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes der Funktionen  $g(x)$  und  $f(x)$  ist, also die Gleichung  $g(x) = f(x)$  erfüllt.

Als weiteres Beispiel für die geometrische Lösung betrachten wir die Ungleichung

$$|x + 1| - |x - 2| < 1.$$

Während wir bei der algebraischen Betrachtung 3 Fälle aufgrund der 2 kritischen Punkte  $x = -1$  und  $x = 2$  zu betrachten haben, geht es geometrisch recht einfach. Wir setzen  $g(x) = |x + 1|$  und  $f(x) = |x - 2| + 1$  und suchen Intervalle auf der reellen Zahlengeraden, für die  $g(x) < f(x)$



Abbildung 6: geometrische Lösung von  $|2x + 5| \leq 25x - 3$ 

gilt.

Aus der Grafik liest man sofort

$$L = (-\infty, 1)$$

als Lösungsmenge der Ungleichung ab.

### 1.6.5 Ungleichungen mit 2 Variablen

Während die Lösungen von Ungleichungen mit *einer* Variablen in Intervallen auf der reellen Zahlengeraden zu suchen waren, sind die Lösungsmengen von Ungleichungen, in denen *zwei* reelle Variablen  $x$  und  $y$  vorkommen, Teilmengen der reellen Zahlenebene. Hilfreich bei der Lösung von Ungleichungen mit 2 Variablen ist in vielen Fällen eine geometrische Betrachtung oder eine graphische Lösung. Die Ungleichung

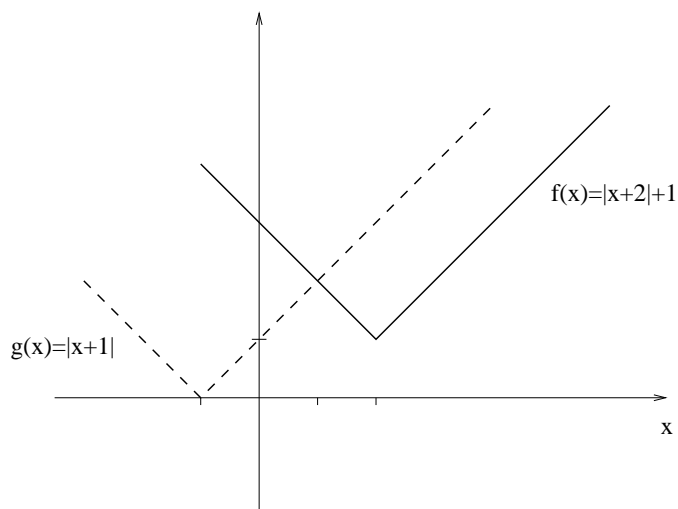
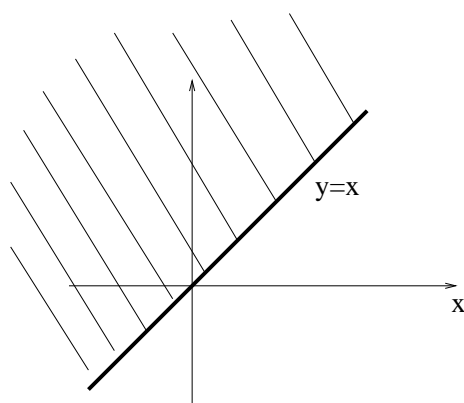
$$x \leq y$$

beschreibt die Menge aller Paare  $(x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x \leq y$ . In der reellen Zahlenebene sind dies alle Punkte, die auf und oberhalb der Geraden  $y = x$  liegen. Diese Lösungsmenge bezeichnet man auch als Halbebene  $x \leq y$ .

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Ungleichung  $x^2 - 4x + 4 < y$ , d.h., wir interessieren uns für

$$L = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 4 < y\}.$$

Wenn wir die Funktion  $y = f(x) := x^2 - 4x + 4$  und ihren Verlauf betrachten, ergibt sich die schraffierte Fläche der Abb. 9 als Lösungsmenge, wobei die Parabel nicht mit zur Lösungsmenge gehört.

Abbildung 7: geometr. Lösung von  $|x + 1| - |x - 2| < 1$ Abbildung 8: Halbebene  $x \leq y$ 

Hat man es mit Systemen von Ungleichungen, etwa mit

$$\begin{aligned} 2x + 5 &< y \\ x + y &< 1 \end{aligned} \quad (2)$$

zu tun, bestimmt man die Lösungsmengen  $L_1$  und  $L_2$  der beteiligten Ungleichungen und erhält die gesamte Lösungsmenge als Durchschnitt der Lösungsmengen

$$L = L_1 \cap L_2.$$

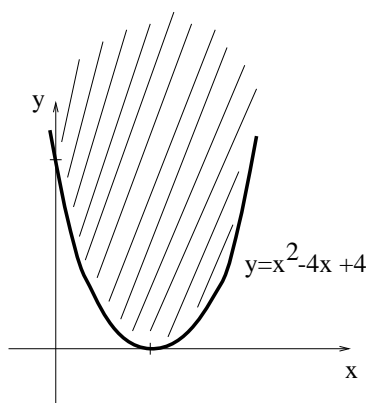
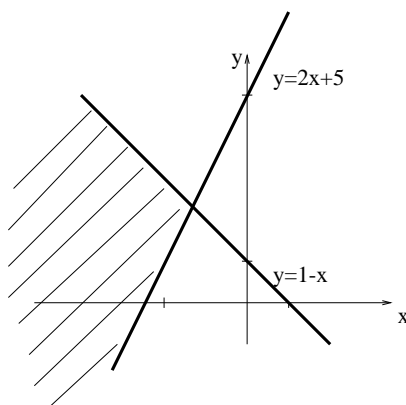
Abbildung 9: Lösungsmenge von  $x^2 - 4x + 4 < y$ 

Abbildung 10: Lösungsmenge des Ungleichungssystems (2)

## 1.7 Die komplexen Zahlen

### 1.7.1 Einführung der komplexen Zahlen

Die hierarchische Einführung der Zahlssysteme

- $\mathbb{N}$ ,
- $\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{Q}$ ,
- $\mathbb{R}$

läßt sich mit dem Wunsch, Gleichungen zu lösen motivieren. Die Gleichung

$$n + x = 0$$

hat in  $\mathbb{N}$  für  $n \in \mathbb{N}$  keine Lösung, allerdings in  $\mathbb{Z}$ , nämlich die eindeutige Lösung  $x = -n$ . Betrachtet man mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  die Gleichung

$$ax = b,$$

so ist diese i. allg. nicht in  $\mathbb{Z}$  lösbar, allerdings für  $a \neq 0$  eindeutig lösbar in  $\mathbb{Q}$  mit der Lösung  $x = \frac{b}{a}$ .

Aus der Schule ist die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (3)$$

mit der  $p$ - $q$ -Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bekannt. Allerdings kann die Wurzel in  $\mathbb{R}$  nur im Fall  $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$  gezogen werden. Mit der Einführung des Körpers der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind auch Wurzeln aus negativen Zahlen erklärt und die Gleichung (3) wird in  $\mathbb{C}$  lösbar.

**Definition 1.23.**

Die durch  $i^2 = -1$  erklärte Größe  $i$  nennt man **imaginäre Einheit**.

**Definition 1.24.**

a) Die Menge  $\mathbb{C} := \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ , ausgestattet mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation, wobei  $i^2 = -1$  zu beachten ist, heißt Körper der komplexen Zahlen, d.h. es gelten die gleichen Gesetze wie im Falle der reellen Zahlen (Kommutativgesetz für die Addition und Multiplikation, Distributivgesetz und Assoziativgesetze Addition und Multiplikation).

b) Sei  $z = a + bi$ , dann heißt  $a =: \operatorname{Re} z$  Realteil von  $z$  und  $b =: \operatorname{Im} z$  Imaginärteil von  $z$ .

c)  $\bar{z} = a - bi$  heißt die zu  $z = a + bi$  konjugiert komplexe Zahl ( $z$  und  $\bar{z}$  bilden ein Paar konjugiert komplexer Zahlen).

d) Durch

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

definieren wir den **Betrag** der komplexen Zahl  $z$ , und rechnen für  $z = a + bi$

$$|z| = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 + b a i - a b i - i^2 b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

aus.

Die Division zweier komplexer Zahlen  $z$  und  $w$ ,  $|w| \neq 0$ , wird durch

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \bar{w}$$

erklärt. Zur Motivation der Definition der Division betrachten wir  $z = 1 + i$  und  $w = 2 - i$ . Für  $\frac{z}{w}$  schreiben wir nun formal  $\frac{1+i}{2-i}$ . Die Rechnung (Erweiterung)

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}(2+3i+i^2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

führt auf die bekannte Darstellungsform  $\frac{z}{w} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$  der komplexen Zahlen, und bedeutet nichts anderes als den "Nenner reell zu machen", unter Berücksichtigung des Faktes, daß das Produkt einer komplexen Zahl mit der konjugiert komplexen Zahl immer reell ist.

*Bemerkung 1.25.*

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  ist ein Unterkörper.

**Satz 1.26.**

Für  $z$  und  $\bar{z}$  gelten die Regeln

$$(i) \quad \overline{\bar{z}} = z,$$

$$(ii) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$(iii) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Gleichheit von komplexen Zahlen  $z_1 = a + bi$  und  $z_2 = c + di$  liegt vor, genau dann, wenn  $a = c$  und  $b = d$  gilt.

Unter Nutzung der komplexen Zahlen können wir nun die Gleichung (3) auch für den Fall  $\frac{p^2}{4} - q < 0$  lösen und können mit

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

zwei komplexe Lösungen angeben ( $x_1$  ist dabei die zu  $x_2$  konjugiert komplexe Zahl).

Bei der weiteren Beschäftigung mit den komplexen Zahlen stellt man fest, daß auch Gleichungen höherer Ordnung im Bereich der komplexen Zahlen lösbar sind, so daß man von der *algebraischen Abgeschlossenheit* der komplexen Zahlen spricht, und der folgende Satz gilt:

**Satz 1.27. (Fundamentalsatz der Algebra)**

Sei  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  ein komplexes Polynom.

Dann gibt es genau  $n$  komplexe Nullstellen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ , die nicht notwendigerweise paarweise verschieden sein müssen, und es gilt

$$p(z) = (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n).$$

*Bemerkung 1.28.*

Betrachten wir noch einmal die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ . Nach Satz 1.27 muß gelten

$$p(z) = z^2 + pz + q = (z - x_1)(z - x_2).$$

Das rechnet man mit

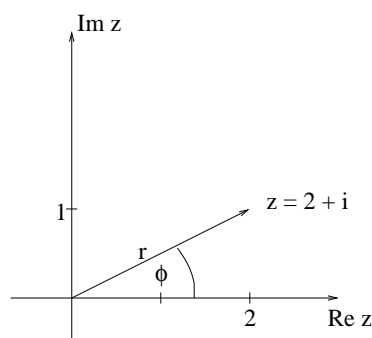
$$\begin{aligned} (z - x_1)(z - x_2) &= \left(z + \frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)\left(z + \frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right) \\ &= z^2 + z\frac{p}{2} + zi\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} + \frac{p}{2}z - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}z + \frac{p^2}{4} - i^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \\ &= z^2 + pz + q, \end{aligned}$$

auch erfolgreich nach.

**1.7.2 Die GAUSSsche Zahlenebene**

Wenn wir in der Ebene ein kartesisches  $(x, y)$ -Koordinatensystem einführen und auf der  $x$ -Achse den Realteil und auf der  $y$ -Achse den Imaginärteil einer komplexen Zahl  $z = a + bi$  auftragen, entspricht jede komplexe Zahl einem Punkt in der Ebene, die man *GAUSSsche Zahlenebene* nennt.

In der GAUSSschen Zahlenebene ist eine komplexe Zahl auch durch ihre *Polarkoordinaten*  $(r, \phi)$ ,

Abbildung 11: komplexe Zahl  $z = 2 + i$  in der GAUSSschen Ebene

also den Radius  $r$  und einen Winkel  $\phi$ , charakterisiert.  $r = |z|$  ist der absolute Betrag (Abstand des Punktes in der GAUSSschen Zahlenebene vom Ursprung) von  $z$  und  $\text{Arg } z := \phi$  nennt man Argument von  $z$  ( $\text{arg } z$  ist der Hauptwert von  $\text{Arg } z$  aus dem Intervall  $(-\pi, \pi]$ ).

Der Übergang von den Polarkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten einer komplexen Zahl  $z$  wird durch die Gleichungen

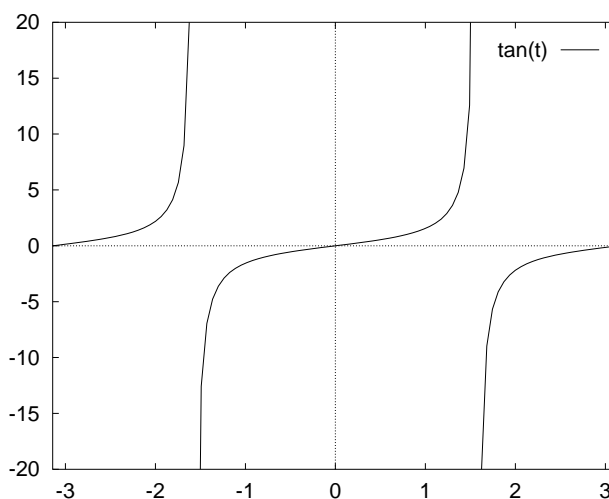
$$a = r \cos \phi$$

$$b = r \sin \phi$$

hergestellt, und ausgehend von den kartesischen Koordinaten  $a, b$  erhält man

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$\tan \phi = \frac{b}{a}.$$

Abbildung 12: Graph der Tangens-Funktion im Intervall  $[-\pi, \pi]$ 

Da  $\tan \phi = \frac{b}{a}$  im Intervall  $(-\pi, \pi]$  zwei Lösungen hat, ist durch den Quadranten (Vorzeichen von  $a$  und  $b$ ), in dem die Zahl  $z$  liegt, zu entscheiden, welche Lösung die richtige ist (Abstand der Lösungen ist  $\pi$ , siehe auch Abbildung 12).

Beispiele:

- a)  $z = 2 + i \implies$   
 $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,  $\tan \phi = \frac{1}{2} \rightarrow \phi = 26.56^\circ$ ,  
 da die komplexe Zahl im ersten Quadranten liegt, also  
 $z = \sqrt{5}(\cos 26, 56^\circ + i \sin 26, 56^\circ)$ ,
- b)  $z = -2 + i \implies$   
 $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,  $\tan \phi = \frac{1}{-2} \rightarrow \phi = -26, 56^\circ + 180^\circ$ ,  
 da die Zahl im zweiten Quadranten liegt, also  
 $z = \sqrt{5}(\cos 153, 44^\circ + i \sin 153, 44^\circ)$ ,
- c)  $z = 1 - i \implies$   
 $|z| = \sqrt{2}$ ,  $\tan \phi = -1 \rightarrow \phi = -45^\circ$ ,  
 $z = \sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$ ,
- d)  $z = -i \quad (a \neq 0) \implies$   
 $|z| = 1$ ,  $\tan \phi = -\infty \rightarrow \phi = -90^\circ$ ,  
 $z = (\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ)) = \cos 90^\circ - i \sin 90^\circ$ .

Im Ergebnis der Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten erhält man die Polarkoordinatendarstellung (trigonometrische Darstellung) der Zahl  $z$  mit

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (4)$$

Die Multiplikation der komplexen Zahlen  $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$  und  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$  ergibt unter Nutzung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|((\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) + i(\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi)) \\ &= |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen, mit der Multiplikation ihrer Beträge und der Addition ihrer Argumente.

Für die Division zweier komplexer Zahlen  $z$  und  $w$ , ( $|w| \neq 0$ ) erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i \sin(\phi - \psi)),$$

also bedeutet die Division zweier komplexer Zahlen die Division ihrer Beträge und die Subtraktion ihrer Argumente.

Von L. EULER stammt die Verabredung

**Definition 1.29.** EULERSche Formel

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi. \quad (5)$$

Mit der EULERSchen Formel ergibt sich für eine komplexe Zahl  $z$  ihre Exponentialdarstellung

$$z = |z|e^{i\phi},$$

wobei die gleichen Potenzgesetze für komplexe Exponenten wie bei reellen Exponenten verabredet werden. Wir werden später feststellen, daß somit die Exponentialdarstellung das Rechnen mit komplexen Zahlen und die Lösung komplexer Gleichungen angenehm vereinfacht.

*Bemerkung 1.30.*

Aufgrund der Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion gilt für eine komplexe Zahl  $z$

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \phi + i \sin \phi) = r(\cos(\phi + k2\pi) + i \sin(\phi + k2\pi)) \text{ bzw.} \\ z &= re^{i\phi} = re^{i(\phi + k2\pi)}, \end{aligned}$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 1.7.3 Potenzieren und Radizieren

Wir können bisher komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Mit der Kenntnis der Multiplikation können wir auch ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen bilden. Die Berechnung von  $z^{12}$ , z.B. für  $z = 2 + 2i$  ist allerdings auf dem Wege

$$z^{12} = z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$$

recht mühselig und es lohnt sich, über einen eleganteren Weg nachzudenken, der neben dem Potenzieren auch eine elegante Methode des Radizierens beinhaltet.

Wir erinnern uns an die Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl und schreiben  $z = 2 + 2i$  in der Form (Radius von  $z$  ist hier  $\sqrt{8}$  und  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ )

$$z = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

auf. Mit der Anwendung der aus der Schule bekannten Potenzgesetze erhält man

$$z^{12} = (\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} = (\sqrt{8})^{12}(e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} = 8^6e^{i3\pi}.$$

Ist die Gleichung  $z^3 = w = -3 + \sqrt{3}i$  zu lösen, sind alle komplexen Zahlen zu ermitteln, für die die Gleichung gilt. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, daß es genau 3 Lösungen geben muß. Zur Bestimmung dieser 3 Lösungen betrachten wir nun die Exponentialdarstellung von  $w = -3 + \sqrt{3}i$  (Radius ist  $\sqrt{12}$  und  $\arg z = \frac{5\pi}{6}$ )

$$w = \sqrt{12}e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

und erinnern uns an die Bemerkung 1.30, wonach auch

$$w = \sqrt{12}e^{i(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)} \quad (6)$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  gilt.

#### Definition 1.31.

Für die weitere Betrachtung verabreden wir, dass jede Zahl  $a$   $n$ -te Wurzel der komplexen Zahl  $b$  heißt, für die  $a^n = b$  gilt. Für  $a$  wird auch die Bezeichnung  $\sqrt[n]{b}$  verwendet.

Wenn wir nun die 3. Wurzel aus der Zahl  $w = -3 + \sqrt{3}i$  ziehen, und die Beziehung (6) berücksichtigen, erhalten wir mit

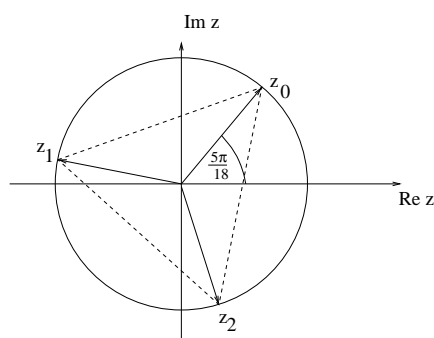
$$z_k = (\sqrt{12})^{\frac{1}{3}}(e^{i(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)})^{\frac{1}{3}} = 12^{\frac{1}{6}}e^{i(\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3})}$$

für  $k \in \mathbb{Z}$  die Lösungen der Gleichung  $z^3 = w = -3 + \sqrt{3}i$ , und stellen fest, daß  $z_0 = z_3 = z_6 = z_9 = \dots$ ,  $z_1 = z_4 = z_7 = \dots$  und  $z_2 = z_5 = z_8 = \dots$  gilt, so daß wir entsprechend dem Fundamentalsatz der Algebra auf dem beschrifteten Weg tatsächlich nur die drei Lösungen  $z_0, z_1$  und  $z_2$  der Gleichung erhalten.

In der GAUSSSchen Zahlenebene liegen  $z_0, z_1, z_2$  auf einem Kreis mit dem Radius  $12^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{12}$ . Die Positionen von  $z_0, z_1, z_2$  auf dem Kreis markieren ein regelmäßiges Dreieck (siehe auch Abb. 13).

Das Ergebnis der Überlegungen zum Potenzieren und Radizieren fassen wir im folgenden Satz zusammen.



Abbildung 13: 3. Wurzeln der Zahl  $w$  in der GAUSSschen Zahlenebene**Satz 1.32.** (Formeln von MOIVRE)Sei  $n \in \mathbb{N}$ .a) Die  $n$ -te Potenz von  $z = a + bi = r(\cos\phi + i \sin\phi) = re^{i\phi}$  ergibt sich zu

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) = r^n e^{in\phi}.$$

b) Für jede komplexe Zahl  $w = re^{i\phi} \neq 0$  hat die Gleichung  $z^n = w$  genau  $n$  verschiedene Lösungen, nämlich die  $n$   $n$ -ten Wurzeln

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) \right) = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)}$$

für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .Die  $n$ -ten Wurzeln liegen auf einem Kreis mit dem Radius  $\sqrt[n]{r}$  um den Nullpunkt der GAUSSschen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges  $n$ -Eck. $z_0$  nennt man Hauptwert von  $\sqrt[n]{z}$ .

Beispiele:

a) Zu bestimmen sind die komplexen Zahlen, für die

$$\frac{z+1}{4} = \frac{1+i}{z-1}$$

gilt. Wegen des Nenners der rechte Seite suchen wir nur nach komplexen Zahlen, die ungleich 1 sind. Nach der Beseitigung der Nenner durch Multiplikation mit  $4(z-1)$  erhält man die Gleichung  $z^2 - 1 = 4 + 4i$  bzw.  $z^2 = 5 + 4i$ . Um die beiden Wurzeln aus  $5 + 4i$  zu bestimmen, rechnen wir Radius  $r = |5 + 4i| = \sqrt{41}$  und Argument  $\phi = \arctan\frac{4}{5} = 38,65^\circ$  aus und erhalten mit der MOIVRESchen Formel

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{41}(\cos 0,67474 + i \sin 0,67474) \\ &= 2,53(0,78086 + i 0,62469) \text{ und} \\ z_1 &= \sqrt[4]{41}(\cos(0,67474 + \pi) + i \sin(0,67474 + \pi)) \\ &= 2,53(-0,78086 - i 0,62469). \end{aligned}$$

Bei der Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl liegen die beiden Lösungen um  $\pi$  auf dem Kreis in der GAUSSschen Zahlenebene versetzt, so daß man hier ein "2-Eck", sprich die geradlinige Verbindung der 2 Punkte in der Ebene erhält.

- b) Es sind alle Lösungen der Gleichung  $z^4 = 1$  zu ermitteln. Wir erhalten  $|1| = 1$  und  $\arg 1 = \arctan 0 = 0$ . Die Anwendung der MOIVRESchen Formel ergibt die 4 Wurzeln

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ z_1 &= \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = i \\ z_2 &= \cos(0 + \pi) + i \sin(0 + \pi) = -1 \\ z_3 &= \cos\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -i \end{aligned}$$

Mit den 4 Wurzeln können wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra das komplexe Polynom  $p(z) = z^4 - 1$  in Linearfaktoren zerlegen, und erhalten

$$p(z) = z^4 - 1 = (z - 1)(z - i)(z + 1)(z + i).$$

- c) Es sind alle  $z \in \mathbb{C}$  zu bestimmen, die der Gleichung

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0$$

genügen. Wir bemerken  $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$ , so daß wir nur nach den Nullstellen von  $z^2 + 1$  zu suchen haben. Diese sind uns allerdings mit

$$z_0 = i \text{ und } z_1 = -i$$

bekannt. In diesem Fall sind  $z_0 = i$  und  $z_1 = -i$  doppelte Nullstellen, d.h.,  $z_0$  und  $z_1$  haben jeweils die algebraische Vielfachheit 2, und die Zerlegung nach dem Hauptsatz der Algebra lautet

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z - i)(z + i)(z - i)(z + i) = (z - i)^2(z + i)^2.$$

## 1.8 Polynome

### 1.8.1 Definition und Grundlagen

Über dem Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  wollen wir Polynome definieren. Es sei daran erinnert, daß wir den Begriff Polynom schon im Abschnitt "Komplexe Zahlen" beim Fundamentalsatz der Algebra verwendet haben und ihn sicherlich auch aus der Schule kennen.

#### Definition 1.33.

- a) Ein *Polynom über  $\mathbb{C}$*  (Körper der komplexen Zahlen) ist eine Abbildung  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

- b) Die Elemente  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  heißen *Koeffizienten* von  $p$ .  
 c) Ist  $a_n \neq 0$ , so heißt  $n$  der *Grad* von  $p$  und wird mit  $\deg p$  bezeichnet.  
 d) Ein Element  $\alpha \in \mathbb{C}$  heißt *Nullstelle* von  $p$ , wenn  $p(\alpha) = 0$ .  
 e) Die Menge aller Polynome über  $\mathbb{C}$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{C}(x)$ .

**Satz 1.34.**

Sei  $p$  ein Polynom mit dem Grad  $n$ , und  $\alpha \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle, so existiert ein Polynom  $q$  mit dem Grad  $n - 1$  und  $p(x) = q(x)(x - \alpha)$ .

**Satz 1.35.**

Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit einem Grad kleiner oder gleich  $n$  und  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden und gilt  $p(x_i) = q(x_i)$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dann gilt  $p(x) = q(x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}$ .

**Satz 1.36.** (Polynomdivision)

Seien  $p$  ein Polynom aus  $\mathbb{C}(x)$  mit dem Grad  $n$  und  $q$  ein Polynom aus  $\mathbb{C}(x)$  mit dem Grad  $m$ , und sei  $n > m$ . Dann existiert genau ein Polynom  $s \in \mathbb{C}$  und ein Polynom  $r \in \mathbb{C}$  mit  $\deg r < \deg q$ , so daß

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

gilt.

**Beispiel für die Polynomdivision:**

Gegeben seien die Polynome  $p(x) = x^4 + 2i$  und  $q(x) = x^2 + 2ix - 1$ . Die Division  $\frac{p(x)}{q(x)}$  ergibt

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2i) : (x^2 + 2ix - 1) = x^2 - 2ix - 3 \\ -(x^4 + 2ix^3 - x^2) \\ \hline (-2ix^3 + x^2 + 2i) \\ -(-2ix^3 + 4x^2 + 2ix) \\ \hline (-3x^2 - 2ix + 2i) \\ -(-3x^2 - 6ix + 3) \\ \hline 4ix - 3 + 2i \end{array}$$

und damit gelten  $s(x) = x^2 - 2ix - 3$  und  $r(x) = 4ix - 3 + 2i$ , und

$$\frac{x^4 + 2i}{x^2 + 2ix - 1} = x^2 - 2ix - 3 + \frac{4ix - 3 + 2i}{x^2 + 2ix - 1}.$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse der elementaren Teilbarkeitstheorie (EUKLIDISCHER Algorithmus) mit dem Satz 1.36 gewissermaßen auf Polynome übertragen werden.

**Satz 1.37.** (LAGRANGE-Interpolation)

Seien  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden und  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{C}$  beliebig. Dann gibt es genau ein Polynom  $L(x)$  mit  $\deg L \leq n$  und  $L(x_i) = y_i$  für alle  $i = 0, \dots, n$ .

Da der Beweis konstruktiv ist, und eine nützliche Formel enthält, soll er kurz dargelegt werden.

*Beweis.* Wir definieren mit

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \in \mathbb{C}(x), \quad j = 0, \dots, n,$$

die LAGRANGE-Koeffizientenpolynome. Die  $L_j$  sind Polynome vom Grad  $n$ . Man rechnet leicht

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

nach und erhält mit

$$L(x) := \sum_{j=0}^n y_j L_j(x)$$

ein Polynom mit den im Satz geforderten Eigenschaften. Die Einzigkeit folgt direkt aus dem Satz 1.35.  $\square$

Beispiel:

Gegeben seien mit  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 3$  drei Stützwerte, und mit  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 3$  und  $y_2 = 2$  drei Meßwerte an den Positionen  $x_0, x_1$  und  $x_2$ . Gesucht ist ein Polynom  $L(x)$  mit  $L(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Aus dem Satz 1.37 folgt für die Lagrange-Koeffizientenpolynome

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3 \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} = -x^2 + 4x - 3, \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3\right) + 3 \cdot (-x^2 + 4x - 3) + 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 4 \end{aligned}$$

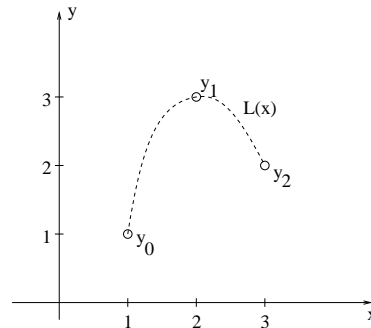


Abbildung 14: Interpolation von Meßwerten nach Satz 1.37

Der nachfolgende Satz kann im Unterschied zu allen anderen Aussagen dieses Kapitels (, die elementar gezeigt werden können) im Rahmen der HM nicht bewiesen werden.

**Satz 1.38.**

Jedes nichtkonstante Polynom  $p \in \mathbb{C}(x)$  hat mindestens eine Nullstelle.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt der

**Satz 1.39.**

Sei  $p$  ein Polynom über  $\mathbb{C}$  mit dem Grad  $n$ , dann existiert für  $p(x)$  eine Zerlegung in Linearfaktoren

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

wobei  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  die Nullstellen von  $p$  sind. Wenn Indizes  $i \neq j$  mit  $z_i = z_j$  existieren, dann werden  $z_i$  und  $z_j$  zu einer Nullstelle zusammengefaßt, und man erhält

$$p(x) = a_n(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2} \cdots (x - z_r)^{m_r},$$

wobei die, möglicherweise mehrfachen Nullstellen, nun paarweise verschieden sind. Weiterhin gilt

$$r \leq n, \quad m_i \geq 1, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

$m_i$  heißt Vielfachheit der Nullstelle  $z_i$ .

### 1.8.2 Polynome mit reellen Koeffizienten

Wir betrachten nun die Polynome  $p \in \mathbb{C}(x)$  mit reellen Koeffizienten, d.h.,  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Auf diesen wichtigen Spezialfall werden wir unser Wissen aus dem vorangegangenen Abschnitt über komplexe Polynome anwenden, um Zerlegungen in ein Produkt reeller Polynome möglichst kleinen Grades zu erhalten.

#### Satz 1.40.

Sei  $p \in \mathbb{C}(x)$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $p$ , also  $p(\alpha) = 0$ .

Dann ist  $\bar{\alpha}$  ebenfalls Nullstelle mit  $p(\bar{\alpha}) = 0$ .

*Beweis.*

Wir führen den Beweis nur für  $m = 1$ .

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= \sum_{j=0}^n a_j \bar{\alpha}^j = \sum_{j=0}^n \overline{a_j \alpha^j} \\ &= \overline{\sum_{j=0}^n a_j \alpha^j} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 1.41.*

Als Schlußfolgerung aus dem Satz 1.40 ergibt sich für ein Polynom  $p \in \mathbb{C}(x)$  mit reellen Koeffizienten mit dem Grad  $n$ , daß mit einer Nullstelle  $z_i$  der Vielfachheit  $m_i$ , auch  $\bar{z}_i$  eine Nullstelle von  $p$  mit der Vielfachheit  $m_i$  ist.

Ist der Grad des Polynoms  $p$  ungerade, so hat  $p$  mindestens eine reelle Nullstelle, denn nach dem man alle Paare konjugiert komplexer Nullstellen gebildet hat, muß mindestens eine Nullstelle übrig bleiben, für die kein konjugiert komplexer Partner mehr vorhanden ist (was ja nach dem Satz 1.40 für jede komplexe Nullstelle möglich sein muß).

Ist Grad des Polynoms  $p$  gerade, so ist die Zahl  $r$  der reellen Nullstellen ebenfalls gerade (möglicherweise gibt es auch überhaupt keine reelle Nullstelle ( $r = 0$ )).

#### Lemma 1.42.

Das Produkt der Linearfaktoren  $(x - z_j)$  und  $(x - \bar{z}_j)$  ist ein Polynom 2. Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

*Beweis.*

Man erhält

$$\begin{aligned} (x - z_j)(x - \bar{z}_j) &= x^2 - x\bar{z}_j - xz_j + z_j\bar{z}_j \\ &= x^2 - (z_j + \bar{z}_j)x + z_j\bar{z}_j, \end{aligned}$$

also ein Polynom mit den reellen Koeffizienten  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -(z_j + \bar{z}_j) = -2 \operatorname{Re} z_j$  und  $a_0 = z_j \bar{z}_j = |z_j|^2$ .  $\square$

Beispiel:

Wir betrachten das konjugiert komplexe Zahlenpaar  $z = 2 + 5i$  und  $\bar{z} = 2 - 5i$ . Dann ergibt die Rechnung

$$\begin{aligned} (x - (2 + 5i))(x - (2 - 5i)) &= x^2 - (2 + 5i)x - (2 - 5i)x + (2 + 5i)(2 - 5i) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 25i^2 = x^2 - 4x + 29, \end{aligned}$$

also ein Polynom mit den reellen Koeffizienten  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -4 = -2 \operatorname{Re} z$  und  $a_0 = 29 = |z|^2$ .

Im direkten Ergebnis des Fundamentalsatzes der Algebra, des Satzes 1.40 und des Lemmas 1.42 können wir den folgenden Satz zur Zerlegbarkeit von Polynomen mit reellen Koeffizienten formulieren.

**Satz 1.43.**

*Ein Polynom  $p \in \mathbb{C}(x)$   $n$ -ten Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten kann man in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen. Es gilt die Zerlegungsformel*

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^r (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}, \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n.$$

*Beweis.*

Da mit jeder komplexen Nullstelle  $w_j$  auch  $\bar{w}_j$  Nullstelle des Polynoms  $p$  ist, findet man insgesamt  $s$  komplexe Nullstellenpaare  $w_j, \bar{w}_j$ , deren Vielfachheit jeweils  $n_j$  sein soll.

Die restlichen  $r$  Nullstellen sind reell. Wir bezeichnen sie mit  $z_k$ , wobei mit  $m_k$  die Vielfachheit von  $z_k$  bezeichnet wird.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra bzw. Satz 1.39 gibt es für das Polynom  $p$  die Darstellung

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \dots (x - z_r)^{m_r} \\ &\quad (x - w_1)^{n_1} (x - \bar{w}_1)^{n_1} (x - w_2)^{n_2} (x - \bar{w}_2)^{n_2} \dots (x - w_s)^{n_s} (x - \bar{w}_s)^{n_s}. \end{aligned} \quad (7)$$

Wenn wir das Produkt der Linearfaktoren  $x - w_j$  und  $x - \bar{w}_j$  bilden, erhalten wir nach Lemma 1.42 mit

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - w_j)(x - \bar{w}_j)$$

ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten. Damit folgt aus (7) die behauptete Zerlegungsformel.

Die Anzahl und die Vielfachheit der reellen Nullstellen und komplexen Nullstellenpaare erklärt die Formel  $\sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n$ .  $\square$

Beispiel 1:

Wir betrachten das Polynom  $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$  und finden mit  $z_1 = 1$  durch genaues Hinsehen eine Nullstelle. Beim zweiten Hinsehen finden wir mit  $z_2 = i$  eine Nullstelle und können mit dem Satz 1.40 schlußfolgern, daß auch  $z_3 = \bar{z}_2 = -i$  eine Nullstelle ist, da unser Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten hat. Wir erhalten also die Faktorisierung

$$p(x) = (x - 1)(x - i)(x + i),$$

bzw. nach der Produktbildung  $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$  mit

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

die Zerlegung in einen Linearfaktor und einen quadratischen Faktor. In diesem Fall gilt für die Zahlen des Satzes 1.43

$$n = 3, \quad k = 1, \quad m_1 = 1, \quad s = 1, \quad n_1 = 1,$$

und damit  $m_1 + 2n_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 = n$ .

Beispiel 2:

Sei das Polynom  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  gegeben. Wir finden mit einem kommerziellen Programm die Nullstelle  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Da wir wissen, daß  $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ebenfalls eine Nullstelle ist, können wir das Polynom  $p(x)$  ohne Rest durch  $(x - z_1)(x - z_2)$  dividieren, und erhalten ein Polynom  $q(x)$ , so daß

$$p(x) = q(x)(x - z_1)(x - z_2)$$

gilt. Konkret ergibt sich

$$(x - z_1)(x - z_2) = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = x^2 - x + 1,$$

und

$$\begin{array}{r} (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1 \\ -(x^4 - x^3 + x^2) \\ \hline (-x^3 + 2x^2 - 2x + 1) \\ -(-x^3 + x^2 - x) \\ \hline (x^2 - x + 1) \\ -(x^2 - x + 1) \\ \hline 0. \end{array}$$

Damit haben wir für  $p(x)$  die Zerlegung

$$p(x) = (x^2 - x + 1)^2$$

erhalten, und mit den Bezeichnungen des Satzes 1.42 haben wir

$$n = 4, \quad k = 0, \quad s = 1, \quad n_1 = 2,$$

und damit  $2n_1 = 2 \cdot 2 = 4 = n$ .

### 1.8.3 Berechnung von Polynomwerten - HORNERSchema

Die Berechnung des Wertes eines Polynoms  $p(x)$  für eine vorgebene Zahl  $x \in \mathbb{C}$  oder  $x \in \mathbb{R}$  läßt sich auf verschiedene Weise durchführen, jedoch ist das HORNERSchema eine besonders effektive Methode. Dabei überlegt man, daß für ein Polynom  $p(x)$  mit dem Grad  $n$  gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\ &= x(\dots(x(x(x((x a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + a_{n-3}) + \dots + a_1) + a_0) \dots \end{aligned}$$

Betrachten wir konkret ein Polynom 4. Grades  $q(x) = \sum_{j=0}^4 a_j x^j$ , so gilt

$$\begin{aligned} q(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x(x(x(x a_4 + a_3) + a_2) + a_1) + a_0, \end{aligned}$$

womit sich die rekursive Berechnung des Polynomwertes  $q(x_0)$  durch die Berechnung von

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 \\ b_3 &= a_3 + b_4 x_0 \\ b_2 &= a_2 + b_3 x_0 & b_4 &= a_4, \\ b_1 &= a_1 + b_2 x_0 & b_j &= a_j + b_{j+1} x_0, \quad j = 3, 2, 1, 0 \\ b_0 &= a_0 + b_1 x_0 \end{aligned}$$

mit  $b_0 = q(x_0)$  ergibt. Man kann das HORNERSchema in der Tabelle

	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
+		$b_4 x_0$	$b_3 x_0$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0^*$	$b_4 \nearrow$	$b_3 \nearrow$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = q(x_0)$

zusammenfassen. Für das Polynom  $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - 20x + 4$  berechnet man  $q(4)$  mit dem HORNERSchema

	3	2	0	-20	4
+		12	56	224	816
4*	3 $\nearrow$	14 $\nearrow$	56 $\nearrow$	204 $\nearrow$	820 = $q(4)$ .

(8)

Für ein Polynom  $p(x)$  mit dem Grad  $n$  notieren wir zur Berechnung des Wertes von  $p(x_0)$  das HORNERSchema

	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
+		$b_n x_0$	$\dots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0^*$	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\dots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0)$ .

(9)

Die Schlußzahl der dritten Zeile des HORNERSchemas (9) ist der Wert  $p(x_0)$  und die übrigen Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms  $g(x)$ , das man bei der Division von  $p(x)$  durch den Linearfaktor  $x - x_0$  erhält. Es gilt der Satz

**Satz 1.44.**

Mit

$$b_n = a_n, \quad b_j := a_j + b_{j+1} x_0, \quad j = n - 1, n - 2, \dots, 0, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^j,$$

gilt

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}, \quad x \neq x_0. \tag{10}$$

*Beweis.*

Wir errechnen auf direkte Weise

$$\begin{aligned} (x - x_0)g(x) + b_0 &= \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^{j+1} - x_0 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^j + b_0 = \sum_{k=1}^n b_k x^k - x_0 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^j + b_0 \\ &= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k - x_0 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^j = a_n x^n + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - x_0 b_{j+1}) x^j \\ &= a_n x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = \sum_{j=0}^n a_j x^j = p(x). \end{aligned}$$



Die Division durch  $(x - x_0)$  ergibt die Behauptung. □

*Bemerkung 1.45.*

Ist  $x_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $p(x)$ , so sieht man mit dem Satz 1.44 sofort, daß  $p(x)$  durch  $x - x_0$  ohne Rest teilbar ist, da  $b_0 = p(x_0) = 0$ .

Beispiel:

Betrachten wir das Polynom  $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - 20x + 4$ . Zur Berechnung von  $\frac{q(x)}{x-4}$  nehmen wir die Zahlen der 3. Reihe des HORNERSchemas (8) und finden nach Satz 1.44

$$\frac{q(x)}{x-4} = 3x^3 + 14x^2 + 56x + 204 + \frac{820}{x-4}.$$

Mit dem HORNERSchema berechnet man also mit minimalem Aufwand

- 1) den Funktionswert  $p(x_0)$  eines Polynoms  $p$ , und
- 2) die Division von  $p(x)$  durch den Linearfaktor  $x - x_0$ .

Desweiteren ist es möglich, mit iterierter Anwendung des HORNERSchemas ein Polynom  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  nach Potenzen von  $x - x_0$  umzuordnen, d.h., Zahlen  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  zu berechnen, so daß

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

gilt<sup>3</sup>. Ohne an dieser Stelle näher auf den Begriff der Ableitung einer Funktion einzugehen, sei darauf hingewiesen, daß für die Koeffizienten  $c_j$  die Beziehung

$$c_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

gilt, wobei  $p^{(n)}$  für  $n$ -te Ableitung der Funktion  $p$  steht.

Wir schreiben das sogenannte vollständige HORNERSchema für das Polynom  $p(x) = 2x^4 - x^3 - x - 18$  auf und wollen zum einen  $p(2)$  berechnen, und zweitens  $p$  nach Potenzen von  $x - 2$  umordnen.

	2	-1	0	-1	-18	
+		4	6	12	22	
2*	2 ↗	3 ↗	6 ↗	11 ↗	4 =: $c_0$	$\Rightarrow \frac{p^{(0)}(2)}{0!} = 4$
+		4	14	40		
2*	2 ↗	7 ↗	20 ↗	51 =: $c_1$		$\Rightarrow \frac{p^{(1)}(2)}{1!} = 51$
+		4	22			
2*	2 ↗	11 ↗	42 =: $c_2$			$\Rightarrow \frac{p^{(2)}(2)}{2!} = 42$
+		4				
2*	2 ↗	15 =: $c_3$				$\Rightarrow \frac{p^{(3)}(2)}{3!} = 15$
+						
2*	2 =: $c_4$					$\Rightarrow \frac{p^{(4)}(2)}{4!} = 2$

<sup>3</sup>Die Beziehung (11) heißt auch die TAYLORentwicklung von  $p(x)$  an der Stelle  $x - x_0$ .

Mit den Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  können wir das Polynom nach Potenzen von  $x-2$  umordnen und erhalten

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - x^3 - x - 18 \\ &= 2(x-2)^4 + 15(x-2)^3 + 42(x-2)^2 + 51(x-2) + 4. \end{aligned}$$

#### 1.8.4 Zerlegungssatz für komplexe Polynombrüche\*

Zum Abschluß des Kapitels "Polynome" soll noch auf eine wichtige Zerlegung von "Polynombrüchen" hingewiesen werden, die etwas später, im Vorfeld der Berechnung von Integralen, noch ausführlicher diskutiert wird.

**Definition 1.46.** (rationale Funktion)

Seien  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome aus  $\mathbb{C}(x)$  mit  $\deg p = n$  und  $\deg q = m$ .  
Quotienten von  $p$  und  $q$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißen **rationale** Funktionen.

Ist  $n < m$ , nennt man den "Polynombruch"  $f(x)$  eine **echte** rationale Funktion.

Nach Satz 1.36 kann man jede rationale Funktion  $f(x)$  darstellen als Summe einer echten rationalen Funktion  $g(x)$  und einem Polynom  $s(x)$ .  $g(x)$  und  $s(x)$  erhält man im Ergebnis der Polynomdivision.

Für echte rationale Funktionen bzw. Polynombrüche gilt der folgende Satz.

**Satz 1.47.** (komplexe Partialbruchzerlegung)

Seien  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome aus  $\mathbb{C}(x)$  mit  $\deg p = n$  und  $\deg q = m$  und  $n < m$ .  $q(x)$  hat die Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_r$  mit den Vielfachheiten  $m_1, m_2, \dots, m_r$  und somit die Darstellung

$$q(x) = b_n(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2} \dots (x - z_r)^{m_r}.$$

Dann gibt es für die rationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  die Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_{11}}{x-z_1} + \frac{a_{12}}{(x-z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1m_1}}{(x-z_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{a_{21}}{x-z_2} + \frac{a_{22}}{(x-z_2)^2} + \dots + \frac{a_{2m_2}}{(x-z_2)^{m_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{a_{r1}}{x-z_r} + \frac{a_{r2}}{(x-z_r)^2} + \dots + \frac{a_{rm_r}}{(x-z_r)^{m_r}} \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(x-z_k)^j}, \end{aligned} \tag{13}$$

mit  $a_{kj} \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_k$ .

**Satz 1.48.**

Es mögen die Voraussetzungen und Konventionen des Satzes 1.47 gelten. Weiterhin seien die Koeffizienten der Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  reell.

Bezügl. der Partialbruchzerlegung gilt

- Ist eine Nullstelle  $z_k$  reell, so sind auch die Koeffizienten  $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km_k}$  reell.
- Ist eine Nullstelle  $z_k$  mit der Vielfachheit  $m_k$  komplex, dann gibt es eine Nullstelle  $z_l$  mit  $z_k = \overline{z_l}$  und  $z_l$  mit der gleichen Vielfachheit  $m_k$ , und für die Koeffizienten  $a_{kj}$  und  $a_{lj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_k$ , gilt

$$a_{kj} = \overline{a_{lj}}.$$

Statt des Beweises der Sätze 1.47 und 1.48 wollen wir uns die Zerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$$

überlegen. Wir erinnern uns daran, daß das Nenner-Polynom  $q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  die Nullstellen

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

mit den Vielfachheiten  $m_1 = 2$  und  $m_2 = 2$  hat, so daß es nach dem Satz 1.47 die Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} &= \frac{x^2 + x - 1}{(x - z_1)^2(x - z_2)^2} \\ &= \frac{a_{11}}{x - z_1} + \frac{a_{12}}{(x - z_1)^2} + \frac{a_{21}}{x - z_2} + \frac{a_{22}}{(x - z_2)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

geben muß. Wenn wir die Gleichung (14) mit  $(x - z_1)^2$  multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - z_2)^2} = a_{11}(x - z_1) + a_{12} + \frac{a_{21}}{x - z_2}(x - z_1)^2 + \frac{a_{22}}{(x - z_2)^2}(x - z_1)^2,$$

und können  $a_{12}$  für  $x = z_1$  bestimmen als

$$a_{12} = \frac{z_1^2 + z_1 - 1}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

Aus Satz 1.48 folgt für  $a_{22}$

$$a_{22} = \overline{a_{12}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

Wenn wir nun die Beziehung (14) umschreiben zu

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - z_1)^2(x - z_2)^2} - \frac{a_{12}}{(x - z_1)^2} = \frac{a_{11}}{x - z_1} + \frac{a_{21}}{x - z_2} + \frac{a_{22}}{(x - z_2)^2},$$

muß die "linke" Seite nach Satz 1.47 mit einem Polynom  $s(x)$  in der Form

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - z_1)^2(x - z_2)^2} - \frac{a_{12}}{(x - z_1)^2} = \frac{s(x)}{(x - z_1)(x - z_2)^2}$$

darstellbar sein. Nach einigem Rechnen erhält man für  $s(x)$

$$s(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i.$$

Aus

$$\frac{s(x)}{(x - z_1)(x - z_2)^2} = \frac{a_{11}}{x - z_1} + \frac{a_{21}}{x - z_2} + \frac{a_{22}}{(x - z_2)^2}$$

ergibt sich durch Multiplikation mit  $x - z_1$

$$a_{11} = \frac{s(z_1)}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}i}{2} + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}i}{6}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{9}i,$$

und damit nach Satz 1.48

$$a_{21} = \overline{a_{11}} = \frac{\sqrt{3}}{9}i.$$

Zusammenfassend erhalten wir die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}i}{9}}{x - z_1} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i}{(x - z_1)^2} + \frac{\frac{\sqrt{3}i}{9}}{x - z_2} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i}{(x - z_2)^2}. \quad (15)$$

Mit Blick auf die Nutzung der Partialbruchzerlegung bei der Integration fassen wir die Glieder der rechten Seite der Gleichung (15) paarweise zusammen, wir erhalten

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}i}{9}}{x - z_1} \cdot \frac{x - z_2}{x - z_2} + \frac{\frac{\sqrt{3}i}{9}}{x - z_2} \cdot \frac{x - z_1}{x - z_1} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2 - x + 1},$$

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i)(x - z_2)^2}{(x - z_1)^2 (x - z_2)^2} + \frac{(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i)(x - z_1)^2}{(x - z_2)^2 (x - z_1)^2} &= \frac{\frac{2}{3}(x^2 + 2x - 2)}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} + \frac{2x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}, \end{aligned}$$

und damit letztendlich mit

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{2x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

eine Zerlegung in reelle Anteile, die uns bei der Integration rationaler Funktionen die Arbeit sehr erleichtern wird.

## 2 Lineare Algebra I

In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe und grundlegenden Techniken zur Lösung von linearen Gleichungssystemen behandelt.

Im einfachsten Fall hat man es mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten zu tun, also etwa

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 3. \end{aligned} \tag{16}$$

Mit der Elimination von  $y$  durch die Subtraktion des Vierfachen der ersten Gleichung von dem Dreifachen der zweiten erhält man  $x = -\frac{5}{11}$  und der Elimination von  $x$  durch die Subtraktion des Fünffachen der zweiten Gleichung von dem Dreifachen der ersten Gleichung erhält man  $y = \frac{12}{11}$ . Wenn wir statt der konkreten Koeffizienten 5, 3, 4,... nun allgemeine Koeffizienten und das allgemeine lineare algebraische Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten in der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \tag{17}$$

betrachten, erhalten wir nach der oben beschriebenen Elimination von  $x_2$  bzw.  $x_1$  die Lösung in der Form

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \tag{18}$$

An den Beziehungen (18) erkennt man sofort, daß man nur dann diese Lösung erhält, wenn der Ausdruck  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  von Null verschieden ist.

Bevor wir zu den Begriffen und Lösungstechniken für "größere" Gleichungssystem kommen, sei auf die geometrische Bedeutung von Gleichungssystemen hingewiesen. Wenn wir die beiden Gleichungen (16) nach  $y$  auflösen haben wir mit  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$  und  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$  zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  oder zwei Geraden in der Ebene. Die Lösung der Gleichungssystem (16) ist der Schnittpunkt der beiden Geraden. Aus der Skizze 15 findet man den Schnittpunkt  $(x_s, y_s) = (-\frac{5}{11}, \frac{12}{11})$ . Der Fall  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$  bedeutet geometrisch die Parallelität der Geraden (es existiert kein Schnittpunkt und damit keine Lösung oder die beiden Geraden sind gleich und wir haben unendlich viele Lösungen).

### 2.1 Determinanten

Bei der Betrachtung von linearen Gleichungssystemen (2 Gleichungen, 2 Unbekannte) haben wir festgestellt, daß das Koeffizientenschema

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

mit den Elementen  $a_{ij}$ ,  $i$  steht für die Zeile und  $j$  für die Spalte im Schema, das Gleichungssystem beschreibt, und, abhängig von den "rechten Seiten" der Gleichungen  $b_i$ , für die Lösung in der Form (18) verantwortlich ist. Wir verabreden wir, daß die Koeffizienten Elemente aus dem Körper  $K$  sind, wobei  $K$  für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  stehen soll.

Wir wollen uns nun mit Koeffizientenschemata der allgemeinen Form

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{array} \tag{19}$$

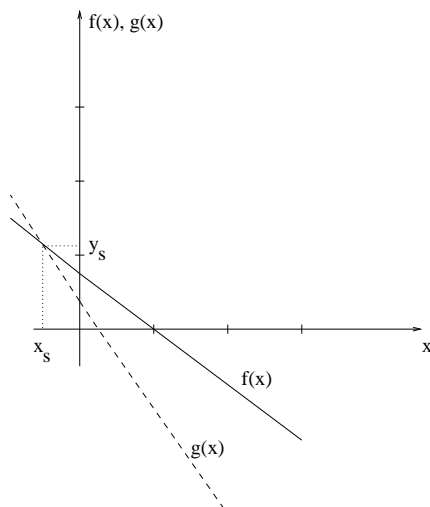


Abbildung 15: Geometrische Lösung von (16)

also Schemata zur Beschreibung von linearen Gleichungssystemen mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten der Form

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + \dots & +a_{nn}x_n = b_n, \end{array}$$

und ihren Eigenschaften befassen.

### 2.1.1 Determinantendefinition

**Definition 2.1.** (Determinante  $n$ -ter Ordnung)

Als Determinante  $n$ -ter Ordnung bezeichnet man den Wert, der einem geordneten Koeffizientenschema mit  $n \times n$  Elementen durch

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{20}$$

$$:= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$$

zugeordnet wird.

Mit  $A_{ij}$  bezeichnet man die Adjunkte des Elements  $a_{ij}$ , die erklärt ist durch

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{21}$$

also die mit  $(-1)^{i+j}$  zu multiplizierende Determinante des  $(n-1) \times (n-1)$ -Koeffizientenschemas, das durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus einem  $n \times n$ -Koeffizientenschema entsteht.

*Bemerkung 2.2.* (Determinante 1. Ordnung)

Entsprechend der Determinatendefinition ergibt sich

$$\det(a_{11}) = |a_{11}| := a_{11} \quad \text{!!keine Betragsstriche, sondern Determinantensymbolik!!}$$

als Determinante 1. Ordnung.

*Bemerkung 2.3.* (Determinante 2. Ordnung)

Als Determinante 2. Ordnung erhält man aufgrund der obigen Definition den Wert, der einem geordnetem Koeffizientenschema mit  $2 \times 2$  Elementen durch

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (22)$$

zugeordnet wird. Die Determinante 2. Ordnung ist also eine Abbildung von der Menge der  $2 \times 2$ -Koeffizientenschema in die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

Indem wir die Determinante 1. bzw. 2. Ordnung einfach berechnen können, und die Berechnung der Determinante  $n$ -ter Ordnung auf die Berechnung von Determinanten  $(n-1)$ -ter Ordnung zurückgeführt haben, können wir Determinanten  $n$ -ter Ordnung **rekursiv** berechnen.

Beispiele für die Berechnung von Determinanten:

- 1) Die Berechnung einer Determinante 3. Ordnung wird auf die Berechnung von Determinanten 2. Ordnung zurückgeführt:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 3 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) - (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 5(2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) \\ & = -9 - 0 + 15 = 6. \end{aligned}$$

- 2) Berechnung einer parameterabhängigen Determinante:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \\ & = a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ & = a(a^2 - 9) - 2(2a - 3) + (6 - a) = a^3 - 14a + 12. \end{aligned}$$

### 2.1.2 Regeln zur Determinantenberechnung

Bei der rekursiven Definition der Determinante  $n$ -ter Ordnung wurde die Determinante nach der **ersten** Zeile entwickelt. Die Berechnung einer Determinante  $n$ -ter Ordnung kann man auch durch eine Entwicklung nach einer anderen Zeile oder Spalte vornehmen. Es gilt der

**Satz 2.4. Determinantenentwicklungssatz.**

Eine Determinante  $n$ -ter Ordnung kann durch eine Entwicklung nach einer beliebigen Zeile  $i_0$  oder Spalte  $j_0$  berechnet werden. Es gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} A_{i_0 j} = \sum_{i=1}^n a_{i j_0} A_{i j_0}. \quad (23)$$

Beispiel (Beispiel 1 von oben), Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = -(2-2) - (3-5) - (6-10) = -0 + 2 + 4 = 6. \end{aligned}$$

### 2.1.3 SARRUSSCHE REGEL

Für Determinanten 3. Ordnung gibt es eine Berechnungsregel, die sich leicht einprägt und keine Entwicklung nach Zeilen oder Spalten erforderlich macht. Wir schreiben das  $3 \times 3$ -Koeffizientenschema auf und ergänzen es, indem wir die erste und zweite Spalte als 4. und 5. Spalte neben das ursprüngliche Schema schreiben:

$$\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{11} & a_{12} \\ & \searrow & \times & \times & & \nearrow \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{21} & a_{22} \\ & \nearrow & \times & \times & & \searrow \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad (24)$$

Die Determinante 3. Ordnung berechnet man nun durch die Summe der durch die südöstlich gerichteten Pfeile durch Multiplikation verknüpften Elemente, also

$$SP = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

minus der Summe der durch die nordöstlich gerichteten Pfeile durch Multiplikation verknüpften Elemente, also

$$SM = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12},$$

so daß sich für die Determinante 3. Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = SP - SM$$



ergibt.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - (2 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 2) \\ = -20 + 24 + 9 + 6 - 24 - 30 = -35.$$

Mit der SARRUSSchen Regel kann man Determinanten höherer Ordnung durch sukzessive Reduktion auf Determinanten 3. Ordnung berechnen. Es empfiehlt sich jedoch in jedem Fall nach "günstigen" Zeilen oder Spalten **mit möglichst vielen Nullen** zu suchen, um den Aufwand bei der Determinantenberechnung möglichst gering zu halten. Wenn wir die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

berechnen wollen, entwickelt man sinnvollerweise nach der 4. Spalte und erhält

$$D = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{5+4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Die Determinanten 4. Ordnung entwickelt man nun jeweils nach der 2. Spalte und erhält

$$D = (-1)(-1)^5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^5(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ + 2(-1)^9(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^9(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Von hier ab kann mit der SARRUSSchen Regel der Werte der Determinante 5. Ordnung schnell berechnet werden.

Im Folgenden werden Eigenschaften von Determinanten diskutiert, die oft zu drastischen Vereinfachungen bei der Berechnung von Determinanten genutzt werden können. Die Beweise der Eigenschaften ergeben sich aus dem Entwicklungssatz.

**Definition 2.5.** (Vereinfachung der Schreibweise)

Zur Vereinfachung der Darstellung von Determinanten verabreden wir für die  $j$ -te Spalte eines Koeffizientenschemas

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{array} \quad (25)$$

die Bezeichnung

$$\underline{a}_j,$$

und sprechen auch von Spaltenvektor  $\underline{a}_j$ , so daß wir das Koeffizientenschema (25) auch in der Form

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_n) \quad ,$$

und die Determinante in der Form

$$\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

aufschreiben können.

**Satz 2.6.**

*Die Determinanten eines Koeffizientenschemas und des an der Hauptdiagonale gespiegelten Koeffizientenschemas sind gleich, d.h.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

**Satz 2.7.**

*Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt*

$$\begin{aligned} & \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \lambda \underline{a}_i + \underline{b}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) \\ &= \lambda \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{b}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n). \end{aligned} \quad (26)$$

Aus der Determinantendefinition und dem Satz 2.7 ergeben sich die Folgerungen

**Korollar 2.8.**

*Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $i \neq k$ , dann gilt*

$$\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1}, \dots, \underline{a}_k + \lambda \underline{a}_i, \underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_n),$$

*d.h., man kann das  $\lambda$ -Fache der  $i$ -ten Spalte zu der  $k$ -ten Spalte addieren, ohne daß sich der Wert der Determinante ändert.*

**Korollar 2.9.**

*Tauscht man zwei Spalten eines Koeffizientenschemas aus, so wechselt die Determinante das Vorzeichen, also gilt für  $i \neq k$*

$$\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = -\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_k, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_{k-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_n).$$

**Korollar 2.10.**

*Sind zwei Spalten eines Koeffizientenschemas gleich oder sind alle Elemente einer Spalte gleich Null, so ist die Determinante gleich Null, d.h., für  $i \neq k$  gilt*

$$\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_{k-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_n) = 0.$$

Aufgrund des Satzes 2.6 gelten die Eigenschaften 2.7 und 2.8 und die Schlußfolgerungen auch im Falle der Kombination von Zeilen, d.h., man kann in den Sätzen 2.7, 2.8 und 2.9 die Bezeichnung  $\underline{a}_k$  auch als eine Bezeichnung für eine Zeile verstehen. Als Oberbegriff für **Spalten und Zeilen** führen wir deshalb den Begriff der **Reihe** ein.

Beispiele zur Anwendung der Regeln:

1.) Anwendung des Satzes 2.8 (Spaltenoperationen)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{=[(3):=(2)+(3)]}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{=[(4):=(4)-(3)]}{=} \\ & = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2(16 + 18 + 15 - (30 + 6 + 24)) = 22. \end{aligned}$$

2.) Anwendung des Satzes 2.8 (Zeilenoperationen) zur Berechnung von

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Die Subtraktion des 2-fachen der 2. Zeile von der 1., 3. und 4. Zeile ergibt

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \\ & = -2 \begin{vmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -4 & -5 & -7 \\ -3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -2(-150 + 0 - 36 - (-45 - 105 + 0)) = 72. \end{aligned}$$

3.) Ein glücklicher Umstand.

Zu berechnen ist die Determinante 8. Ordnung

$$D_8 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1075 & -99 & 25 & 1 & 999 & 2 \\ 0 & 2 & 773 & 1 & 0 & 12 & 4 & 61 \\ 0 & 0 & 4 & 33 & 21 & 1 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 23 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Die konsequente mehrfache Anwendung des Determinantenentwicklungssatzes bzw. der rekursiven Definition ergibt für  $D_8$  genau das Produkt der Diagonalelemente, also

$$D_8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 21 \cdot 3 = 136080.$$

*Bemerkung 2.11.*

Dieses Beispiel zeigt uns den Vorteil von sogenannten "oberen" oder "unteren" Dreiecksschemen, deren Determinanten man sofort durch das Produkt der Diagonalelemente aufschreiben kann. Es ist also immer sinnvoll, durch die geschickte (zulässige) Kombination von Zeilen oder Spalten eine weitestgehende Dreiecksgestalt des Koeffizientenschemas anzustreben, um dadurch die Berechnung von Determinanten zu erleichtern.

## 2.2 CRAMERSche Regel

Mit der Fähigkeit, Determinanten zu berechnen, ist es nun möglich, die eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt, ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{27}$$

mit der CRAMERSchen Regel zu lösen.

Dazu definieren wir das Koeffizientenschema

$$\begin{aligned} A_j &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}, \end{pmatrix} \\ &= (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

als das Schema, das aus dem Schema

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}, \end{pmatrix} \\ &= (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{a}_j, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

durch das Ersetzen der  $j$ -ten Spalte durch die "rechte Seite", also die Spalte  $\underline{b}$ , entsteht.

**Satz 2.12.** (CRAMERSche Regel)

Das lineare Gleichungssystem (27) ist unter der Voraussetzung  $\det(A) \neq 0$  eindeutig lösbar und für die Lösung gilt

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} = \frac{\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n)}{\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{28}$$

*Beweis.*

Wir beschränken uns darauf, die Gültigkeit der Formel (28) für eine Lösung des linearen Gleichungssystems (27) zu zeigen. Sei also  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Lösung. Dann gilt  $\underline{b} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{a}_k$  und damit

$$\det(A_j) = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n) \tag{29}$$

$$= \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k \underline{a}_k, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n).$$

Zur  $j$ -ten Spalte in (29) addiert man nacheinander

$$-x_1 \underline{a}_1, \dots, -x_{j-1} \underline{a}_{j-1}, -x_{j+1} \underline{a}_{j+1}, \dots, -x_n \underline{a}_n.$$

Aufgrund der Determinanteneigenschaften bleibt der Wert der Determinante unverändert, und damit folgt

$$\det(A_j) = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, x_j \underline{a}_j, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n) = x_j \cdot \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = x_j \cdot \det(A),$$

bzw.

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

also die Gültigkeit der Formel. □

Beispiel:

Es soll das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -5x_4 & = 2 \\ & 7x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +8x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array}$$

mit der CRAMERSchen Regel gelöst werden. Zuerst ist die Determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

zu berechnen, man erhält

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & -15 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & -15 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -16 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -13 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 10 & -13 \end{vmatrix} = -7 \cdot 147 = -1029.$$

Die Berechnung von  $\det(A_1)$  ergibt

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 56. \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $\det(A_2)$  ergibt

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -70. \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $\det(A_3)$  ergibt

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 14 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot 14 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 126 - 28 = 98. \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $\det(A_4)$  ergibt

$$\begin{aligned} \det(A_4) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 360 + 32 = 392. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$x_1 = -\frac{56}{1029}, \quad x_2 = \frac{70}{1029}, \quad x_3 = -\frac{98}{1029}, \quad x_4 = -\frac{392}{1029}.$$

Glücklicherweise gibt es neben der CRAMERSchen Regel noch andere Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme, denn schon bei einem Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten hat man mit der Berechnung von 5 Determinanten 4. Ordnung schon sehr viel zu tun. Die CRAMERSche Regel sollte man auf die Lösung von Systemen mit 3 Gleichungen beschränken. Alles was darüber hinaus geht, wird besser mit dem weiter unten diskutierten GAUSSschen Eliminationsverfahren behandelt.

## 2.3 Matrizen

Nachdem wir Determinanten von quadratischen Koeffizientenschemata erklärt haben, wollen wir den allgemeineren Begriff der Matrix einführen und die Verknüpfung von Matrizen durch Operationen mit dem Ziel der systematischen Beschreibung von linearen Gleichungssystemen und deren Lösung erklären.

### 2.3.1 Definition und Operationen

Wir verabreden, daß die Elemente der Koeffizientenschemata bzw. Matrizen Elemente aus einem Körper  $K$  sind, also im Falle  $K = \mathbb{R}$  reelle Zahlen, und im Fall  $K = \mathbb{C}$  komplexe Zahlen.

#### Definition 2.13.

Seien  $a_{ij} \in K$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  und  $j = 1, 2, \dots, m$ . Dann heißt das rechteckige Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit  $m$  Spalten und  $n$  Zeilen über  $K$ , und wird auch durch  $(a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$  bezeichnet. Man nennt solche Matrizen auch  $n \times m$ -Matrizen und bezeichnet die Menge aller Matrizen des Types  $n \times m$  über dem Körper  $K$  auch mit  $M(n, m, K)$ . Wenn der Typ der Matrix unstrittig ist, verwenden wir auch die Kurzbezeichnung  $A = (a_{ij})$  für eine Matrix. In der Informatik oder Numerik ist eine Matrix ein zweidimensionales Feld (Array).

#### Definition 2.14.

Sei  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$  eine Matrix (über  $K$ ), dann heißt

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

die zu  $A$  transponierte Matrix. Ist  $A \in M(n, m, K)$ , so gilt  $A^T \in M(m, n, K)$ .

Die Addition von Matrizen gleichen Typs und die Multiplikation von Matrizen mit skalaren Größen (reelle oder komplexe Zahlen, also Elementen aus dem Körper, über den die Matrizen erklärt sind), ist leicht vorstellbar, d.h., zwei Matrizen addiert man, indem man die Elemente addiert. Das Produkt einer skalaren Größe  $\lambda$  mit einer Matrix  $A$  erhält man, indem man sämtliche Elemente der Matrix mit  $\lambda$  multipliziert.

#### Definition 2.15. (Matrizenaddition)

Seien  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  Matrizen gleichen Typs, dann heißt die Matrix  $C = (c_{ij})$  die Summe der Matrizen  $A$  und  $B$ ,  $C = A + B$ , wenn

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

gilt.

#### Definition 2.16. (Multiplikation einer Matrix mit einer skalaren Größe)

Sei  $\lambda \in K$  und  $A = (a_{ij})$  eine Matrix über  $K$ , dann heißt die Matrix  $C = (c_{ij})$  das Produkt der skalaren Größe  $\lambda$  mit  $A$ ,  $C = \lambda A$ , wenn

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

gilt.

**Definition 2.17.** (Matrixmultiplikation)

Betrachten wir die Matrix  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$  vom Typ  $n \times m$  und die Matrix  $B = (b_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, p}$  vom Typ  $m \times p$  über  $\mathbb{R}$ . Dann definieren wir die Matrix

$$C = (c_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, p},$$

vom Typ  $n \times p$  mit

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj},$$

als das Produkt der Matrizen  $A$  und  $B$ ,  $C = A \cdot B$ , also

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{kp} \end{pmatrix}.$$

Merkregel: Zeile  $\times$  Spalte.

**Definition 2.18.**

Die Matrix des Typs  $n \times m$ , deren Elemente alle gleich Null sind, heißt Nullmatrix  $\mathbf{0}$ .

Die quadratische Matrix vom Typ  $n \times n$

$$I_n = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nennen wir Einheitsmatrix.

**Definition 2.19.** (KRONECKER-Symbol)

Das Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

heißt KRONECKER-Symbol.

*Bemerkung 2.20.*

Mit Hilfe des KRONECKER-Symbols kann man die Einheitsmatrix vom Typ  $n \times n$  in der Form

$$E = (\delta_{ij})$$

aufschreiben.

Beispiel:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$



2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 5,$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 32 & 9 \\ 5 & 4 \\ 30 & 9 \end{pmatrix}, \quad \lambda B = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 10 & 0 \\ 25 & 5 \end{pmatrix}.$$

3)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 \\ 10 & 15 & 5 \\ 36 & 32 & 40 \end{pmatrix}.$$

4)

$$(4 \ 5 \ 6) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -77, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 5 \ 6) = \begin{pmatrix} -16 & -20 & -24 \\ -20 & -25 & -30 \\ -24 & -30 & -36 \end{pmatrix}$$

**Satz 2.21.**

1) Das Matrizenprodukt ist assoziativ und distributiv, d.h.,

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

2) Es gilt für alle  $m \times n$ -Matrizen  $A$  und  $n \times p$ -Matrizen  $B$ 

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

*Bemerkung 2.22.*

- Das Matrizenprodukt ist i.allg. **nicht kommutativ** (siehe dazu Beispiel 4).
- Aus der Gleichung  $A \cdot B = \mathbf{0}$ , kann man im allgemeinen nicht schlußfolgern, daß  $A$  oder  $B$  gleich der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  sind.

### 2.3.2 Spezielle Matrizen

Eine besondere Rolle spielen Matrizen des Types  $n \times 1$  bzw.  $1 \times n$ . In diesem Fall spricht man von Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Unter Nutzung der Matrixmultiplikation kann man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + \dots & +a_{nn}x_n = b_n, \end{array}$$

auch als Matrixgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (30)$$

darstellen.

Wichtige Eigenschaften der Einheitsmatrix  $E$  bzw. Nullmatrix  $\mathbf{0}$ , die sich unmittelbar aus der Definition der Matrixmultiplikation ergeben, fassen wir im folgenden Satz zusammen.

**Satz 2.23.**

Sei  $E$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix, dann gilt für Matrizen  $A$  vom Typ  $n \times p$  bzw. Matrizen  $B$  vom Typ  $p \times n$

$$E \cdot A = A, \quad B \cdot E = B.$$

Das Produkt einer Matrix  $A$  mit der Nullmatrix oder umgekehrt, sofern es gebildet werden kann, ist gleich der Nullmatrix.

**Definition 2.24.**

Die Elemente der  $a_{jj}$  der Matrix  $A = (a_{ij})$  vom Typ  $n \times n$  heißen Diagonalelemente von  $A$ .

**Definition 2.25.**

Eine Matrix  $A = (a_{ij})$  vom Typ  $n \times n$  heißt obere Dreiecksmatrix, falls

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i > j \quad \text{gilt, also}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt (die untere Dreiecksmatrix ist analog definiert).

**Korollar 2.26.**

Für obere bzw. untere Dreiecksmatrizen  $A = (a_{ij})$  gilt

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n a_{jj}.$$

**Definition 2.27.** (reguläre Matrix)

Gilt für die Determinante der Matrix  $A$  vom Typ  $n \times n$

$$\det(A) \neq 0,$$

dann heißt  $A$  regulär oder nicht singulär.

Ist die Determinante  $\det(A) = 0$ , so heißt  $A$  singulär.

**Definition 2.28.** (inverse Matrix)

Sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $n \times n$ . Wenn es eine Matrix  $B$  vom Typ  $n \times n$  mit der Eigenschaft

$$B \cdot A = E$$

gibt, heißt  $B$  linksinverse Matrix von  $A$ .

Wenn es eine Matrix  $C$  vom Typ  $n \times n$  mit der Eigenschaft

$$A \cdot C = E$$

gibt, heißt  $C$  rechtsinverse Matrix von  $A$ .

*Bemerkung 2.29.*

Aufgrund der Assoziativität der Matrixmultiplikation folgt aus

$$A \cdot C = E$$

nach der Multiplikation mit der Linksinversen  $B$  von links die Beziehung

$$C = B =: A^{-1},$$

und wir können, die Existenz vorausgesetzt, von **der** inversen Matrix  $A^{-1}$  sprechen. Es gilt  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

Mit dem Matrixkalkül können wir nun die Lösung eines linearen Gleichungssystems von  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

auf die Bestimmung der inversen Matrix zurückführen, immer vorausgesetzt, daß diese existiert, denn nach der Multiplikation mit  $A^{-1}$  von links ergibt sich sofort

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}.$$

**Satz 2.30.** (Determinantenmultiplikationssatz)

Seien  $A$  und  $B$  Matrizen vom Typ  $n \times n$ , dann gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

**Korollar 2.31.**

Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt für eine invertierbare Matrix

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

### 2.3.3 Inversenformel

#### Korollar 2.32.

Jede reguläre Matrix ist invertierbar und hat genau eine inverse Matrix.

Die Bestimmung der inversen Matrix  $X = A^{-1}$  bedeutet die Lösung des Matrixgleichungssystems

$$A \cdot X = E \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrixgleichungssystem entspricht nun  $n$  linearen Gleichungssystemen der Form

$$A \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j,$$

wobei  $\underline{e}_j$  der Spaltenvektor ist, der nur in der  $j$ -ten Zeile eine 1 zu stehen hat und in allen anderen Zeilen Nullen, und

$$\underline{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern uns an die Definition der Adjunkten (21) eines Matricelements und erhalten mit der CRAMERSchen Regel für  $\underline{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T$

$$\underline{x}_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(bei  $A_{ij}$  handelt es sich jeweils um die Adjunkten des Matricelements 1, das bei der speziellen rechten Seite  $\underline{e}_j$  in der CRAMERSchen Regel das Matricelement  $a_{ij}$  ersetzt). Schließlich erhalten wir für  $X = A^{-1}$

$$X = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

die sogenannte **Inversenformel** (in Worten: Die Inverse von  $A$  ist  $\frac{1}{\det(A)}$  mal die Transponierte der Adjunktenmatrix von  $A$ ).

Beispiel:

Zu berechnen ist die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $A$  haben wir weiter oben schon mit  $\det(A) = -1029$  berechnet. Die Berechnung der Adjunkten ("vorzeichenbehaftete Unterdeterminanten") ergibt:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 7 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 - 280 - 20 - 16 + 21 = -305,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -(3 + 2 + 10 + 8) = -23,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 21 + 4 + 70 - 4 = 91,$$

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -(-56 + 4 - 14 - 4) = 70,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 4 - 8 - 21) = 28,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 - 24 = -35,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -(-63 + 2 + 12) = 49,$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 168 + 2 + 14 + 12 = 196,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 20 + 40 - 6 = 11,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -(-9 + 10 + 120 + 3) = -124,$$

•

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 10 - 60 - 3 = -91,$$

•

$$A_{34} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -(48 + 2 - 4 + 4 + 12 + 8) = -70,$$

•

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 35 + 5 + 2) = -43,$$

•

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 15 = 17,$$

•

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -(6 + 1 + 105) = -112,$$

•

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 7 - 21 + 1 = -7,$$

so daß sich die inverse Matrix

$$A^{-1} = -\frac{1}{1029} \begin{pmatrix} -305 & 28 & 11 & -43 \\ -23 & -35 & -124 & 17 \\ 91 & 49 & -91 & -112 \\ 70 & 196 & -70 & -7 \end{pmatrix}$$

ergibt.

### 2.3.4 Rang einer Matrix

**Definition 2.33.** (Unterdeterminante)

Sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $n \times m$ . Die Determinante einer  $k$ -reihigen Untermatrix von  $A$  heißt Unterdeterminante von  $A$  mit der Zeilenzahl  $k$ , oder eine Unterdeterminante der Ordnung  $k$  von  $A$ .

**Definition 2.34.** (Rang einer Matrix)

Sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $n \times m$ .  $A$  hat den Rang  $p$ , wenn gilt

- a) Es gibt eine nichtverschwindende Unterdeterminante der Ordnung  $p$  von  $A$ .

b) Jede Unterdeterminante von  $A$ , deren Ordnung größer als  $p$  ist, verschwindet.

Man schreibt

$$\text{Rang } A = \text{rg } A = p.$$

*Bemerkung 2.35.*

Der Rang einer Matrix  $A$  vom Typ  $n \times m$  ist die größte Zeilenzahl nichtverschwindender Unterdeterminanten von  $A$ . Es gilt

$$\text{rg } A \leq \min\{n, m\}.$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Man findet mit

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -155$$

eine nichtverschwindende 3-reihige Unterdeterminante von  $A$ , stellt aber durch die Subtraktion des 3-fachen der 2. Zeile von der 4. Zeile sofort fest, daß  $\det(A) = 0$  ist. Daraus folgt, daß  $A$  den Rang 3 hat.

**Satz 2.36.**

*Der Rang einer Matrix  $A$ ,  $\text{rg } A$ , bleibt bei*

- a) *der Vertauschung von parallelen Reihen<sup>4</sup>,*
- b) *Multiplikation einer Reihe mit einem Element  $\lambda \in K$ ,  $\lambda \neq 0$ ,*
- c) *Addition des Vielfachen einer Reihe zu einer Parallelreihe,*
- d) *Transponieren von  $A$*

*unverändert.*

**Satz 2.37.**

*Jedes Koeffizientenschema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

---

<sup>4</sup>Wir hatten den Begriff der Reihe als Oberbegriff für Zeile und Spalte eingeführt.

vom Typ  $n \times m$  läßt sich durch die zielgerichtete Anwendung der Operationen a), b) und c) in ein Trapezschemata der Form

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r-1} & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1m} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r-1} & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2m} \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{3r-1} & a'_{3r} & a'_{3r+1} & \cdots & a'_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rm} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (31)$$

mit  $a'_{jj} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , überführen.

*Beweis.* (GAUSSscher Algorithmus)

Da  $A \neq \mathbf{0}$  gilt, kann man durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen auf jeden Fall aus  $A$  eine Matrix

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1m}^{(1)} \\ \tilde{a}_{21}^{(1)} & \tilde{a}_{22}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

mit  $\tilde{a}_{11}^{(1)} \neq 0$  erhalten.

Nun können wir alle Zeilen  $i$ ,  $i \geq 2$  jeweils durch

$$\text{Zeile } i - \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \times \text{Zeile } 1$$

ersetzen, und erhalten

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1m}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

mit  $a_{11}^{(1)} = \tilde{a}_{11}^{(1)} \neq 0$  und einer Matrix  $B^{(2)}$  vom Typ  $(n-1) \times (m-1)$ . Mit  $B^{(2)}$  verfahren wir im Fall  $B^{(2)} \neq \mathbf{0}$  nun so wie mit  $A$ , und erhalten nach endlich vielen Schritten das angestrebte Trapezschemata

$$A^{(k)} = \left( \begin{array}{cccc|ccc} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1r-1}^{(k)} & a_{1r}^{(k)} & a_{1r+1}^{(k)} & \cdots & a_{1m}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2r-1}^{(k)} & a_{2r}^{(k)} & a_{2r+1}^{(k)} & \cdots & a_{2m}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3r-1}^{(k)} & a_{3r}^{(k)} & a_{3r+1}^{(k)} & \cdots & a_{3m}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rr}^{(k)} & a_{rr+1}^{(k)} & \cdots & a_{rm}^{(k)} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right),$$

mit  $a_{jj}^{(k)} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ .

□



Da die Zeilen- bzw. Spaltenoperationen den Rang von  $A$  nicht verändern, kann man aus dem Trapezschemata den Rang von  $A$  ablesen.

**Korollar 2.38.** (*Algorithmus zur Rangbestimmung*)

Im Ergebnis des Algorithmus' zur Erzeugung eines Trapezschemas der Form (31) erhält man mit  $r$  den Rang der Matrix  $A$ .

Beispiel:

Wir wollen den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Nach dem Vertauschen der Zeilen 1 und 4 erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir ersetzen nun

$$(II) := (II) - 2 * (I) \quad \text{und} \quad (III) := (III) - 2 * (I),$$

mit dem Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir

$$(III) := (III) - \frac{9}{6} * (II), \quad (IV) := (IV) - \frac{2}{6} * (II) \quad \text{und} \quad (V) := (V) - \frac{2}{6} * (II),$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 5/3 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die Zeilen 3 und 5 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$



die aus  $A$  durch Vertauschen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile entsteht.

Beispiel:

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wollen die Zeilen 1 und 3 tauschen. Dazu betrachten wir die Matrix  $L_{13}$

$$L_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Ergebnis der Multiplikation  $L_{13} \cdot A$  erhalten wir

$$L_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

also die gewünschte Vertauschung.

Für  $i \neq j$  betrachten wir nun die Matrix

$$S_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & \\ \dots & \ddots & \dots & \lambda & \dots & \\ & & \ddots & \dots & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \dots & 1 & \end{pmatrix}, \quad (33)$$

also eine Einheitsmatrix vom Typ  $n \times n$ , in der an der Position  $(ij)$  die Zahl  $\lambda$  statt einer Null eingefügt wurde. Die Multiplikation  $S_{ij}(\lambda) \cdot A$  ergibt eine Matrix

$$\tilde{A} = S_{ij}(\lambda) \cdot A,$$

die aus  $A$  durch die Addition des  $\lambda$ -fachen der  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile entsteht.

Beispiel:

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

und wollen zur Erzeugung möglichst vieler Nullen die 4. Zeile mit dem  $(-2)$ -fachen der 2. Zeile kombinieren. Dazu betrachten wir die Elementarmatrix  $S_{42}(-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten nach der Multiplikation  $S_{42}(-2) \cdot A$

$$S_{42}(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

das gewünschte Ergebnis.

Die Multiplikation der  $i$ -ten Zeile der Matrix  $A$  mit einer Zahl  $\lambda$  wird durch die Multiplikation  $E_i(\lambda) \cdot A$  erreicht, wobei  $E_i(\lambda)$  die Matrix

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

ist, die aus der Einheitsmatrix  $E$  durch das Ersetzen der 1 an der Position  $(ii)$  durch die Zahl  $\lambda$  entsteht.

**Definition 2.39.**

Eine Matrix  $A$  vom Typ  $n \times m$  hat den **vollen Rang**, wenn

$$rg A = \min\{n, m\}$$

gilt.

**Korollar 2.40.**

Eine quadratische Matrix  $A$  vom Typ  $n \times n$  hat den vollen Rang, genau dann, wenn die Determinante von  $A$  verschieden von Null ist.

**Satz 2.41.**

Für die Elementarmatrizen vom Typ (32), (33) und (34) gilt

- 1)  $\det(L_{ij}) = -1$ ,
- 2)  $\det(S_{ij}(\lambda)) = 1$ ,
- 3)  $\det(E_i(\lambda)) = \lambda$ .

Die Elementarmatrizen vom Typ (32), (33) und (34) haben alle den vollen Rang.

**Korollar 2.42.** (Elementare Umformungen)

Die Operationen a), b) und c) des Satzes 2.36 zur Vereinfachung einer Matrix  $A$  entsprechen der Multiplikation der Matrix  $A$  mit Elementarmatrizen des Typs (32), (33) und (34).

Der GAUSSsche Algorithmus, bei dem **nur Zeilenoperationen zugelassen werden**, zur Vereinfachung einer Matrix  $A$  bzw. zur Erzeugung eines Trapezschemas bedeutet die Multiplikation von  $A$  mit einem Produkt von Elementarmatrizen des Typs (32), (33) und (34).

### 2.3.6 Bestimmung der Inversen einer Matrix mit dem GAUSSschen Algorithmus

Aus der Definition des Ranges einer Matrix ergibt sich die Voraussetzung für die Existenz der Inversen einer Matrix  $A = (a_{ij})$  vom Typ  $n \times n$  mit

$$\text{rg } A = n,$$

d.h., die Matrix muß den vollen Rang haben. Im Ergebnis des GAUSSschen Algorithmus, unter ausschließlicher Verwendung von **Zeilenumformungen**, erhält man im Falle  $\text{rg } A = n$  die Matrix

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

mit  $a_{jj}^{(k)} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Nun ist es offensichtlich, daß man durch elementare Zeilenoperationen die obere Dreiecksmatrix weiter zu einer Matrix

$$A^{(l)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(l)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(l)} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(l)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

umformen kann. Wenn wir nun mit dem GAUSSschen Algorithmus nicht nur die Matrix  $A$  umformen, sondern das Schema  $[A|E]$ , also

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

umformen in das Schema

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right],$$

haben wir mit

$$A^{-1} := X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

die Inverse der Matrix  $A$  erhalten.

Hinsichtlich der Interpretation des GAUSSschen Algorithmus als Multiplikation der Matrix  $A$  mit einem Produkt von Elementarmatrizen kann man die Bestimmung der Inversen folgendermaßen beschreiben.

Es ist möglich, nach  $l$  elementaren Umformungen die Matrixgleichung  $A \cdot X = E$  umzuformen in

$$P^{(l)}A \cdot X = P^{(l)} \cdot E \iff X = P^{(l)}, \quad (35)$$

wobei  $P^{(l)}$  das Produkt der Elementarmatrizen vom Typ (32), (33) und (34) ist, das den  $l$  elementaren Umformungen der Matrix  $A$  in die Einheitsmatrix  $E$  ( $P^{(l)}A = E$ ) entspricht. Aus der Gleichung (35) erkennt man sofort, daß  $P^{(l)}$  die Matrix  $A$  invertiert, also

$$A^{-1} = P^{(l)} \quad (36)$$

gilt.

Beispiel:

Wir wollen mit dem GAUSSschen Algorithmus die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

bestimmen, und werden die den Eliminationsschritten entsprechenden Elementarmatrizen notieren.

Wir gehen von dem Schema  $[A|E]$  aus, also

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

und tauschen erstmal die 1. und die 3. Zeile und erhalten

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

was der Multiplikation mit der Matrix  $L_{13}$  entspricht. Im nächsten Schritt ist das 3-fache der 1. Zeile von der 2. Zeile zu subtrahieren, wir erhalten

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -17 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Diese Zeilenoperation entspricht der Multiplikation mit der Elementarmatrix  $S_{21}(-3)$ . Im nächsten Schritt ist das  $\frac{2}{5}$ -fache der 2. Zeile von der 3. zu subtrahieren, man erhält

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -17 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{39}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{array} \right],$$

was der Multiplikation mit der Elementarmatrix  $S_{32}(-\frac{2}{5})$  entspricht. Jetzt multiplizieren wir die 2. Zeile mit  $\frac{1}{5}$  und die 3. Zeile mit  $\frac{5}{39}$ , und erhalten

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{5} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{6}{39} \end{array} \right].$$

Diese Operationen entsprechen der Multiplikation mit dem Elementarmatrizen  $E_2(\frac{1}{5})$  und  $E_3(\frac{5}{39})$ . Als nächstes addieren wir die 2. Zeile zur 1. und erhalten

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{13}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{5} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{6}{39} \end{array} \right].$$

Diese Operation entspricht der Multiplikation mit der Elementarmatrix  $S_{12}(1)$ . Jetzt ist das  $\frac{13}{5}$ -fache der 3. Zeile von der 1. Zeile zu subtrahieren, man erhält

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{5} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{6}{39} \end{array} \right],$$

(Multiplikation mit der Elementarmatrix  $S_{13}(-\frac{13}{5})$ ). Schließlich ist das  $\frac{17}{5}$ -fache der 3. Zeile zur 2. Zeile zu addieren. Es ergibt sich

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{85}{195} & \frac{5}{195} & -\frac{15}{195} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{6}{39} \end{array} \right],$$

was der Multiplikation mit der Elementarmatrix  $S_{23}(\frac{17}{5})$  entspricht. Vorausgesetzt wir haben uns nicht verrechnet, haben wir mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{85}{195} & \frac{5}{195} & -\frac{15}{195} \\ \frac{5}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{6}{39} \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} -13 & 13 & 0 \\ 17 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

die Inverse der Matrix  $A$  erhalten. In der Erinnerung an die jeweilige Multiplikation mit Elementarmatrizen erhält man für die Inverse die Darstellung

$$A^{-1} = S_{23}(\frac{17}{5}) \cdot S_{13}(-\frac{13}{5}) \cdot S_{12}(1) \cdot E_3(\frac{5}{39}) \cdot E_2(\frac{1}{5}) \cdot S_{32}(-\frac{2}{5}) \cdot S_{21}(-3) \cdot L_{13}.$$

### 2.3.7 Determinanten-Berechnung mit dem GAUSSschen Algorithmus

Beschränken wir uns bei Umformung einer Matrix  $A$  (quadratisch, mit vollem Rang) zu einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix auf die Reihenoperationen (32) und (33), mit dem Resultat

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

ergibt sich die Determinante der Matrix  $A$  zu

$$\det(A) = (-1)^v \prod_{j=1}^n a_{jj},$$

wobei  $v$  die Zahl der Reihenvertauschungen ist.

Beispiel:

Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich damit zu

$$\det(A) = (-1) \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{39}{5} = 39,$$

wie aus dem Dreiecksschema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{39}{5} \end{bmatrix}$$

sofort bei einer vorausgegangenen Zeilenvertauschung zu ersehen ist.

## 2.4 Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung

Für den Fall eines Gleichungssystems mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \quad \det(A) \neq 0,$$

hatten wir weiter oben mit der CRAMERSchen Regel eine Lösung bestimmt. Wir haben aber bemerkt, daß der Aufwand der CRAMERSchen Regel für  $n \geq 4$  schon beträchtlich ist.

Im Folgenden wollen wir uns der Lösung allgemeinerer linearer Gleichungssysteme mit  $n$  Gleichungen und  $m$  Unbekannten widmen. In diesem allgemeinen Fall haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nm}x_m = b_n, \end{array}$$

bzw.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \tag{37}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

zu diskutieren und zu lösen.

Beispiel:

$n = 3, m = 4,$

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 = 3 \\ x_1 & +2x_2 & & +2x_4 = 2, \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +6x_4 = 4 \end{array}$$



also

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.43.**

Wenn die "rechte Seite"  $\underline{b}$  des Gleichungssystems (37) gleich  $\mathbf{0}$  (also  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ ) ist, heißt das Gleichungssystem **homogen**, und im Fall  $\underline{b} \neq \mathbf{0}$  heißt es **inhomogenes** Gleichungssystem.

Zu den Lösungen bzw. zur Lösbarkeit des Gleichungssystems (37) können wir folgende Aussagen machen, die weitestgehend durch die bisher gemachten Überlegungen erklärt werden können.

**2.4.1 Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme**

**Satz 2.44.** (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)

- Das homogene lineare Gleichungssystem (37) ist immer lösbar, denn mit  $\underline{x} = \mathbf{0}$  existiert zumindest die "triviale" Lösung.  
Entweder es existiert genau eine Lösung, oder es existieren unendlich viele Lösungen.
- Beim inhomogenen System (37) unterscheiden wir 3 Fälle.
  - a) (37) ist nicht lösbar,
  - b) es gibt genau eine Lösung von (37),
  - c) es existieren unendlich viele Lösungen.

**Definition 2.45.**

Mit

$$A|\underline{b} := \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right),$$

führen wir den Begriff der **erweiterten** Koeffizientenmatrix ein.

**Satz 2.46.** (Lösbarkeitskriterium)

Das lineare Gleichungssystem (37) ist genau dann lösbar, wenn

$$rg A|\underline{b} = rg A$$

gilt (d.h., wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist).

*Bemerkung 2.47.*

Es gilt offensichtlich  $rg A \leq rg A|\underline{b} \leq rg A + 1$ , so daß nur die Fälle

- $rg A|\underline{b} = rg A + 1 \implies$  (37) hat keine Lösung,
- $rg A|\underline{b} = rg A \implies$  (37) hat mindestens eine Lösung

möglich sind.

Beispiel:

Betrachten wir

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & +5x_2 & +4x_3 = 6 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 = 2 \\ 5x_1 & +7x_2 & +8x_3 = 1 \end{array}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rangbetrachtung

$$rg A|\underline{b} = rg \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 1 \end{array} \right) = rg \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) = 3,$$

ergibt

$$rg A = 2 \neq 3 = rg A|\underline{b}.$$

*Bemerkung 2.48.*

Im vorigen Kapitel hatten wir den GAUSSschen Algorithmus als Algorithmus zur rangerhaltenden Umformung von Matrizen eingeführt und zur Erzeugung von Trapezschemata benutzt. Die darin verwendeten Umformungen (Multiplikation mit Elementarmatrizen) bedeuten mit Blick auf die erweiterte Koeffizientenmatrix linearer Gleichungssysteme

äquivalente Umformungen, die die Lösungsmenge des jeweiligen Gleichungssystems **nicht verändern!**

Das Vertauschen von Zeilen entspricht der Vertauschung von Gleichungen, die Addition des vielfachen einer Zeile zu einer anderen entspricht der Addition des vielfachen einer Gleichung zu einer anderen. Die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl bedeutet das Durchmultiplizieren einer Gleichung mit dieser Zahl.

Vorsicht ist in jedem Fall bei der Vertauschung von Spalten geboten. Zum einen darf die "rechte" Seite  $\underline{b}$  in keinem Fall vertauscht werden. Die Umordnung anderer Spalten bedeutet die Umordnung von Unbekannten.

Wenn wir den GAUSSschen Algorithmus auf die erweiterte Matrix  $A|\underline{b}$  mit dem Ziel, ein trapezförmiges Schema zu erzeugen, anwenden, erhalten wir in jedem Fall ein Schema der Art

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc|c} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1r-1}^{(k)} & a_{1r}^{(k)} & a_{1r+1}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2r-1}^{(k)} & a_{2r}^{(k)} & a_{2r+1}^{(k)} & \dots & a_{2m}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3r-1}^{(k)} & a_{3r}^{(k)} & a_{3r+1}^{(k)} & \dots & a_{3m}^{(k)} & b_3^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(k)} & a_{rr+1}^{(k)} & \dots & a_{rm}^{(k)} & b_r^{(k)} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^{(k)} \end{array} \right), \quad (38)$$

mit  $a_{jj}^{(k)} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ . Dieses Schema steht für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{11}^{(k)} x_1 & + a_{12}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{1r}^{(k)} x_r & + a_{1r+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{1m}^{(k)} x_m & = b_1^{(k)} \\
 & a_{22}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{2r}^{(k)} x_r & + a_{2r+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{2m}^{(k)} x_m & = b_2^{(k)} \\
 & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{rr}^{(k)} x_r & + a_{rr+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{rm}^{(k)} x_m & = b_r^{(k)} \\
 \hline
 & & & & & & 0 & = b_{r+1}^{(k)} \\
 & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & = b_n^{(k)}
 \end{array} \quad (39)$$

das äquivalent zu dem Ausgangsgleichungssystem (37) ist. Aus dem Schema (38) und dem Gleichungssystem (39) kann man nun sofort die Lösungssituation beschreiben.

**Satz 2.49.**

- a) Ist eines der Elemente  $b_j^{(k)}$ ,  $j = r+1, \dots, n$  ungleich Null, dann hat das Gleichungssystem (39) bzw. (37) keine Lösung.
- b) Gilt  $b_j^{(k)} = 0$ ,  $j = r+1, \dots, n$ , dann ist das Gleichungssystem (39) bzw. (37) lösbar.
- b.1) Gilt  $r = m = n$ , so existiert genau eine Lösung von (39) bzw. (37),
- b.2) Ist  $r < m$ , dann hat das Gleichungssystem (39) bzw. (37) unendlich viele Lösungen.

*Beweis.*

- a) Es gilt  $rg A|b = rg A + 1$ . Damit hat das System keine Lösung. Anders gesagt existiert mindestens ein Index  $j$ ,  $r < j \leq n$ , mit  $b_j^{(k)} \neq 0$ , was im Widerspruch zu dem System (39) steht.
- b) Es gilt  $b_j^{(k)} = 0$ ,  $j = r+1, \dots, n$ .

b.1) Ist  $r = m$ , so ergibt sich aus (39) das System

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}^{(k)} x_1 & + a_{12}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{1m}^{(k)} x_m & = b_1^{(k)} \\
 & a_{22}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{2m}^{(k)} x_m & = b_2^{(k)} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{mm}^{(k)} x_m & = b_m^{(k)}
 \end{array} \quad (40)$$

mit  $a_{jj}^{(k)} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Man kann nun beginnend mit  $x_m = \frac{b_m^{(k)}}{a_{mm}^{(k)}}$  und dem Einsetzen in die  $(m-1)$ -te Gleichung  $x_{m-1}$  ausrechnen usw.

b.2) Aus dem System (39) erhält man im Fall  $r < m$

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{11}^{(k)} x_1 & + a_{12}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{1r}^{(k)} x_r & + a_{1r+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{1m}^{(k)} x_m & = b_1^{(k)} \\
 & a_{22}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{2r}^{(k)} x_r & + a_{2r+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{2m}^{(k)} x_m & = b_2^{(k)} \\
 & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{rr}^{(k)} x_r & + a_{rr+1}^{(k)} x_{r+1} & + \dots & + a_{rm}^{(k)} x_m & = b_r^{(k)}
 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}^{(k)} x_1 & + a_{12}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{1r}^{(k)} x_r & = b_1^{(k)} & - a_{1r+1}^{(k)} x_{r+1} & - \dots & - a_{1m}^{(k)} x_m \\
 & a_{22}^{(k)} x_2 & + \dots & + a_{2r}^{(k)} x_r & = b_2^{(k)} & - a_{2r+1}^{(k)} x_{r+1} & - \dots & - a_{2m}^{(k)} x_m \\
 & & \ddots & & & \vdots & \dots & \vdots \\
 & & & a_{rr}^{(k)} x_r & = b_r^{(k)} & - a_{rr+1}^{(k)} x_{r+1} & - \dots & - a_{rm}^{(k)} x_m
 \end{array} \quad (41)$$

Da  $a_{jj}^{(k)} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , gilt, kann man für alle rechten Seiten des Gleichungssystems (41) Lösungen  $x_1, x_2, \dots, x_r$  bestimmen, und somit die "Unbekannten"  $t_1 := x_{r+1}, \dots, t_{m-r} := x_m$  als Parameter frei wählen. Daraus folgt die Existenz von unendlich vielen Lösungen.

Die  $x_1, x_2, \dots, x_r$  bestimmt man bei vorgegebenen  $t_1, t_2, \dots, t_{m-r}$  auf die gleiche rekursive Art wie im Fall b.1).  $\square$

#### 2.4.2 Praktische Anwendung des GAUSSSchen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Beispiel 1:

Betrachten wir das Gleichungssystem, das wir weiter oben schon mal mit der CRAMERSchen Regel gelöst haben, also

$$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ -1x_1 & +2x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & 2 \\ & 7x_2 & +x_3 & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +8x_3 & -3x_4 & = & 0 \end{array},$$

wir erhalten die erweiterte Koeffizientenmatrix ( $n = m = 4$ )

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

(I):=(I)+3\*(II), (IV):=(IV)+2\*(III) und der Tausch der ersten und zweiten Zeile ergeben

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -15 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -13 & 4 \end{array} \right),$$

(III):=(III)-(II) ergibt

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & -13 & 4 \end{array} \right),$$

(IV):=(IV)+10\*(III) führt schließlich zu dem gewünschten Trapezschemata

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 147 & -56 \end{array} \right),$$

aus dem wir  $rg A|\underline{b} = rg A = 4$  und damit die eindeutige Lösbarkeit erkennen. Für die Lösung erhalten wir

$$x_4 = -\frac{56}{147}, \quad x_3 = 6 - \frac{16 \cdot 56}{147} = -\frac{14}{147},$$

$$x_2 = \left(6 - \frac{15 \cdot 56}{147} + \frac{2 \cdot 14}{147}\right) / 7 = \frac{10}{147},$$

$$x_1 = -2 + \frac{5 \cdot 56}{147} - \frac{14}{147} + \frac{2 \cdot 10}{147} = -\frac{8}{147}.$$

Beispiel 2:

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 2 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ 4x_1 & +6x_2 & & = 0 \\ & 7x_2 & +x_3 & = 0 \end{array},$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix ( $n = 4$ ,  $m = 3$ )

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

(II):=(II)+3\*(I), (III):=(III)+4\*(I) ergeben

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

(III) := (III) -2\*(II), (IV):= (IV) -(II) und die Vertauschung der dritten und vierten Zeile liefert

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

das Trapezschemata, aus dem sich  $rg A = 3$  und  $rg A|\underline{b} = 4$  ergibt. Damit existiert keine Lösung des Gleichungssystems.

Beispiel 3:

Das System

$$\begin{array}{cccc} 5x_1 & +x_2 & -x_3 & -23x_4 = 7 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -5x_4 = 2 \end{array}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix ( $m = 4$ ,  $n = 2$ )

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -1 & -23 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right).$$

(I):=(I) +5\*(II) und die Vertauschung der Zeilen ergibt

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & -48 & 17 \end{array} \right).$$

Der Rang  $r$  von  $A$  ist gleich dem Rang von  $A|\underline{b}$  ( $r = 2$ ). Damit ist das Gleichungssystem lösbar. Wir haben die Situation  $2 = r < m = 4$ , woraus die Existenz unendlich vieler Lösungen folgt. Aus dem letzten Schema ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -5x_4 = 2 \\ & 11x_2 & +4x_3 & -48x_4 = 17 \end{array}.$$

Wir können  $t := x_3$  und  $s := x_4$  als Parameter frei wählen und erhalten

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{11}(17 - 4t + 48s) = \frac{17}{11} - \frac{4}{11}t + \frac{48}{11}s \\x_1 &= -2 + \frac{2}{11}(17 - 4t + 48s) + t - 5s = \frac{12}{11} + \frac{3}{11}t + \frac{41}{11}s\end{aligned}$$

oder in der Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{17}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{41}{11} \\ \frac{48}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

die uns die Struktur der Lösung zeigt.

Beispiel 4:

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2 \\6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2, \\4x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 &= 2\end{aligned}$$

mit dem reellen Parameter  $\alpha$ , und wollen die Lösbarkeit in Abhängigkeit von  $\alpha$  untersuchen. Ausgehend von der erweiterten Koeffizientenmatrix ( $n = m = 3$ )

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & \alpha & 2 \end{array} \right)$$

erhalten wir nach (II):=(II)-3\*(I) und (III):=(III)-2\*(I)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 13 & -4 \\ 0 & -3 & \alpha + 6 & -2 \end{array} \right).$$

Nach (III):=(III)- $\frac{1}{2}$ \*(II) ergibt sich

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

Im Fall  $\alpha = \frac{1}{2}$  gilt  $r = \text{rg } A|\underline{b} = \text{rg } A = 2$  und  $r < m$ , d.h., es existieren unendlich viele Lösungen. Mit dem frei wählbaren Parameter  $t := x_3$  erhält man

$$x_2 = (4 + 13t)/6 = \frac{2}{3} + \frac{13}{6}t, \quad x_1 = (2 - 3(\frac{2}{3} + \frac{13}{6}t) + 3t)/2 = -\frac{7}{4}t,$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{13}{6} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Im Fall  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  gilt  $r = \text{rg } A|\underline{b} = \text{rg } A = 3$  und  $r = m$ , d.h. es existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdiskussion zur Lösung von Gleichungssystemen wird im folgenden Abschnitt eine bedeutende Rolle spielen.

## 2.5 Eigenwertprobleme

Sei  $A$  eine quadratische Matrix vom Typ  $n \times n$  und  $\underline{x}$  ein Spaltenvektor vom Typ  $n \times 1$ . Man erhält einen klaren Einblick in die Struktur der linearen Abbildung, die durch  $A$  gegeben wird, wenn man (möglichst viele) Vektoren  $\underline{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  findet mit  $A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$  für einen "Proportionalitätsfaktor"  $\lambda \in \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ . Dieser spezielle Vektor  $\underline{x}$  wird also durch  $A$  auf ein Vielfaches abgebildet.

**Definition 2.50.** (Eigenwert, Eigenvektor)

$\lambda \in K$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) heißt Eigenwert einer Matrix  $A$  vom Typ  $n \times n$ , wenn es wenigstens einen Spaltenvektor  $\underline{x} \neq \mathbf{0}$  mit

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad (42)$$

gibt.

Ein Vektor  $\underline{x} \neq \mathbf{0}$ , der die Gleichung (42) erfüllt, heißt zum Eigenwert  $\lambda$  gehörender Eigenvektor.

**Satz 2.51.**

$\lambda \in K$  ist genau dann ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $\det(A - \lambda E) = 0$  gilt.

*Beweis.*

Falls  $\det(A - \lambda E) \neq 0$ , ist  $A - \lambda E$  regulär, und es gibt keinen Vektor  $\underline{x} \in K^n \setminus \{0\}$  mit  $\underline{0} = (A - \lambda E)\underline{x}$ , d.h., mit  $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ . Also ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A$ .

Falls  $\det(A - \lambda E) = 0$ , so besitzt das homogene Gleichungssystem  $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$  mindestens eine Lösung  $\underline{x} \in K^n \setminus \{0\}$ , d.h., es gilt  $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ . Also ist  $\lambda$  ein Eigenwert.  $\square$

**Definition 2.52.** (charakteristisches Polynom)

$$\det(A - \lambda E)$$

heißt charakteristisches Polynom der Matrix  $A$ .

*Bemerkung 2.53.*

Im Falle einer Matrix  $A$  vom Typ  $n \times n$  ist  $\det(A - \lambda E)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades.

**Korollar 2.54.**

Die Eigenwerte von  $A$  sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt die Existenz von  $p$  Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  mit den **algebraischen Vielfachheiten**  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , für die

$$\sum_{j=1}^p m_j = n$$

gilt.

**Definition 2.55.** (Eigenraum)

Sei  $\lambda$  ein Eigenwert einer Matrix  $A$ . Die Menge der Vektoren<sup>5</sup>

$$V_\lambda := \{\underline{x} \mid A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}\}$$

heißt zum Eigenwert  $\lambda$  gehörender Eigenraum.

<sup>5</sup>Auf den Begriff des abstrakten Vektorraumes als einer Menge von Vektoren über einem Körper, ausgestattet mit einer "Addition" als Verknüpfung von Vektoren, einer Multiplikation von Zahlen des Körpers mit Vektoren, wird im weiteren Verlauf der Vorlesung noch detaillierter eingegangen.

**Definition 2.56.** (geometrische Vielfachheit)

$$g(\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda E),$$

also die Zahl der freien Parameter bei der Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E) \cdot \underline{x} = \mathbf{0}$$

heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes  $\lambda$ .

*Bemerkung 2.57.*

Sei  $n = 2$  oder  $n = 3$ . In diesem Fall sind die Eigenräume von Eigenwerten interpretierbar als "Unterräume" des  $\mathbb{R}^2$  bzw. des  $\mathbb{R}^3$ , d.h.  $V_\lambda$  kann eine Gerade, eine Ebene oder auch den gesamten dreidimensionalen Raum ausfüllen. In den genannten Fällen können wir die Dimension von  $V_\lambda$  angeben, wir verabreden

- ist  $V_\lambda$  eine Gerade, hat der Eigenraum die Dimension 1 und der Eigenwert  $\lambda$  die geometrische Vielfachheit  $\dim(V_\lambda) = 1$ ,
- ist  $V_\lambda$  eine Ebene, hat der Eigenraum die Dimension 2 und der Eigenwert  $\lambda$  die geometrische Vielfachheit  $\dim(V_\lambda) = 2$ ,
- füllt  $V_\lambda$  den gesamten dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  aus, hat der Eigenraum die Dimension 3 und der Eigenwert  $\lambda$  die geometrische Vielfachheit  $\dim(V_\lambda) = 3$ .

Die oben definierte geometrische Vielfachheit  $g(\lambda)$  eines Eigenwertes  $\lambda$  ist gleich der Dimension des zu  $\lambda$  gehörenden Eigenraumes  $V_\lambda$ , also

$$g(\lambda) = \dim(V_\lambda).$$

Beispiel 1:

Die Eigenwerte der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sind zu bestimmen. Es ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda),$$

woraus sich die doppelte Nullstelle bzw. der Eigenwert  $\lambda = 1$  mit der algebraischen Vielfachheit 2 ergibt. Zur Berechnung der Eigenvektoren von  $\lambda$  ist das "Gleichungssystem" bzw. die Gleichung

$$x_2 = 0$$

zu lösen, und man findet die Lösung

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

so daß

$$V_{\lambda=1} := \left\{ \underline{x} \mid t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\},$$

eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  ist. Damit hat der Eigenwert  $\lambda = 1$  die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1.



Beispiel 2:

Wir suchen die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1),$$

mit den Nullstellen  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  und  $\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  (Eigenwerte mit der algebraischen Vielfachheit 1).

Zur Bestimmung der Eigenvektoren für  $\lambda_1$  ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$V_{\lambda_1=1} = \{ \underline{x} \mid t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \},$$

eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  und die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_1 = 1$  ist 1.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von  $\lambda_2$  ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x_1 - x_2 &= 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Die Subtraktion des  $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$ -fachen der 2. Zeile von der 3. ergibt das System

$$\begin{aligned} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x_1 - x_2 &= 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

mit dem freien Parameter  $t = x_3$  und der Lösung

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Eigenvektoren von  $\lambda_3$  ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x_1 & -x_2 & = 0 \\ & \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2 & +x_3 = 0 \\ & x_2 & +\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x_3 = 0 \end{array}$$

zu

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

## 2.6 Allgemeine Vektorräume

In diesem Abschnitt werden einige Aussagen und Begriffe der Vektorrechnung verallgemeinert. In den vergangenen Kapiteln haben wir z.B. mit den Zahlbereichen oder Matrizen Mengen betrachtet, auf denen Operationen wie Addition oder Multiplikation von Elementen dieser Mengen erklärt waren. Beispielsweise haben wir bei Matrizen gleichen Types die Addition von Matrizen und die Multiplikation von Matrizen mit Zahlen oder Elementen eines Körpers (z.B.  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ ) erklärt. Im vergangenen Kapitel haben wir Vektoren im Raum der Anschauung erklärt. Die Rechenregeln der Addition und der Multiplikation mit Skalaren für Matrizen unterscheiden sich nicht von denen der komplexen und reellen Zahlen, oder den Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ . Deshalb ist es sinnvoll den Begriff des abstrakten Vektorraumes einzuführen.

**Definition 2.58.** (Vektorraum oder linearer Raum über dem Körper  $K$ )

Sei  $V$  eine nichtleere Menge, mit  $''+'' : V \times V \rightarrow V$  eine "Addition" und mit  $''\cdot'' : K \times V \rightarrow V$  eine skalare "Multiplikation" erklärt, dann heißt  $(V, +, \cdot)$  Vektorraum (oder linearer Raum), wenn für beliebigen Elemente  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$  und  $\lambda, \gamma \in K$  die Axiome

- 1)  $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$  (Kommutativgesetz der Addition),
- 2)  $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$  (Assoziativgesetz der Addition),
- 3) Es existiert ein Nullelement der Addition  $\mathbf{0}$ , d.h.,  $\underline{a} + \mathbf{0} = \underline{a}$ ,
- 4) Existenz eines inversen Elements der Addition  $-\underline{a}$  mit  $\underline{a} + (-\underline{a}) = \mathbf{0}$ ,
- 5) Existenz eines Einselements  $1 \in K$  mit  $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ ,
- 6)  $\lambda(\gamma \cdot \underline{a}) = \lambda\gamma \cdot \underline{a}$  (Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation),
- 7)  $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ ,
- 8)  $(\lambda + \gamma)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \gamma\underline{a}$  (Distributivgesetze),

gelten. Die Elemente des Vektorraumes heißen Vektoren.

**Definition 2.59.** (Linearkombination)

Ein Summe der Form

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K)$$

heißt eine *Linearkombination* der Vektoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ .

**Definition 2.60.** (lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit)

Die Vektoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$  heißen *linear abhängig*, wenn wenigstens einer unter ihnen als Linearkombination der übrigen geschrieben werden kann, oder wenn einer der Vektoren gleich dem Nullvektor  $\underline{0}$  ist.

Anderenfalls heißen die Vektoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$  *linear unabhängig*.

**Definition 2.61.**

Die maximale Zahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes  $V$  heißt Dimension des Vektorraumes.

**Definition 2.62.** (Basis)

Es sei  $m$  die Dimension eines Vektorraumes  $V$ . Dann wird jedes  $m$ -Tupel  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$  von linear unabhängigen Vektoren aus  $V$  eine *Basis* von  $V$  genannt.

*Bemerkung 2.63.* (Koordinaten)

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$  eine Basis von  $V$ . Zu jedem Element  $\underline{v} \in V$  existieren Koeffizienten  $x_1, \dots, x_m$  mit

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^m x_i \underline{v}_i.$$

Man nennt  $x_1, \dots, x_m$  die Koordinaten von  $\underline{v}$  bezüglich der Basis.

**Definition 2.64.** (Unterraum)

Sei  $V$  ein Vektorraum, der  $U$  umfaßt, also  $U \subset V$ . Ist  $U$  selbst wieder ein Vektorraum, so heißt  $U$  Unterraum von  $V$ .

Beispiele für Vektorräume:

- 1) Die Menge der Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation aller Komponenten mit einer Zahl (Skalar). Die Dimension des  $\mathbb{R}^3$  ist 3.
- 2) Die Menge der Polynome  $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  des Grades 2 über  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein dreidimensionaler Vektorraum. Man findet mit  $x^2$ ,  $x^1$  und  $x^0$  drei linear unabhängige Elemente, denn aus  $p_2(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ .

### 2.6.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Die Elemente des  $\mathbb{R}^3$  waren Spaltenvektoren, bzw. Tripel reeller Zahlen. Wir führen den  $\mathbb{R}^n$  als Raum der  $n$ -Tupel reeller Zahlen ein. Den  $\mathbb{R}^3$  als Spezialfall des  $\mathbb{R}^n$  behandeln wir später noch gesondert.

*Bemerkung 2.65.*

Die Elemente  $\vec{a}$  des  $\mathbb{R}^n$  führen wir durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

als Spaltenvektoren bzw. Matrizen des Types  $n \times 1$  ein.

Mit der normalen Matrixaddition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweisen skalaren Multiplikation

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

wird der  $\mathbb{R}^n$  zum Vektorraum.

**Definition 2.66.** (Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ )

Für zwei Vektoren  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$  und  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$  definieren wir durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad (43)$$

das Skalarprodukt der Vektoren. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleichbedeutend mit der Matrix-Multiplikation eines Zeilenvektors (Matrix vom Typ  $1 \times n$ ) mit einem Spaltenvektor (Matrix vom Typ  $n \times 1$ ), also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j.$$

**Definition 2.67.**

Der mit dem Skalarprodukt (43) ausgestattete Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  heißt EUKLIDISCHER RAUM und wird mit  $E^n$  bezeichnet.

**Definition 2.68.**

Mit dem Skalarprodukt wird durch

$$|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

der Betrag eines Vektors  $\vec{a} \in E^n$  erklärt, und durch

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

in Verallgemeinerung zum  $\mathbb{R}^3$  der Kosinus des Winkels, den die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bilden.

**Definition 2.69.** (Orthogonalität)

Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heißen orthogonal, wenn

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

gilt.

**Definition 2.70.** (orthogonales Komplement)

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $U$  ein Unterraum von  $V$ .

$$U^\perp := \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \cdot \vec{u} = 0, \text{ für alle } \vec{u} \in U\}$$

heißt orthogonales Komplement von  $U$

*Bemerkung 2.71.* (lineare Unabhängigkeit im  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $E^n$ )

Nach der bekannten Definition sind  $m$  Vektoren  $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})^T$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{a}_j = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$  hat. Betrachten wir die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vom Typ  $n \times m$ , so ist das homogene Gleichungssystem  $A \cdot \underline{\lambda} = \mathbf{0}$  immer lösbar, da  $\text{rg } A = \text{rg } A | \underline{0}$  gilt. Das Gleichungssystem hat nur dann die triviale Lösung  $\underline{\lambda} = \mathbf{0}$  als einzige Lösung, wenn der Rang von  $A$  gleich  $m$  ist, d.h., nur im Fall  $\text{rg } A = m$  sind die  $m$  Vektoren linear unabhängig. Betrachten wir nun den Fall  $m > n$ , dann kann der Rang von  $A$  nicht größer als  $n$  sein, und wir haben die Situation

$$\text{rg } A \leq n < m,$$

und damit existiert aufgrund der Wahlmöglichkeit von  $m - r$  freien Parametern eine nichttriviale Lösung  $\underline{\lambda} \neq \mathbf{0}$ , also sind die  $m$  Vektoren linear abhängig.

Mit der gerade durchgeführten Betrachtung haben wir die folgende Aussage bewiesen.

**Satz 2.72.**

*Im  $\mathbb{R}^n$  können bis zu  $n$  Vektoren linear unabhängig sein. Jedes System von  $m$  Vektoren mit  $m > n$  ist linear abhängig.*

**Satz 2.73.**

*Im  $\mathbb{R}^n$  ist jedes System von  $n$  linear unabhängigen Vektoren eine Basis, d.h., für jeden Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  existieren genau  $n$  skalare Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , so daß*

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j \quad (44)$$

*gilt. Die Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  heißen Koordinaten von  $\vec{a}$  bezügl. der Basis  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ .*

*Beweis.*

Das lineare Gleichungssystem (44) mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten ist eindeutig lösbar, da  $\det(A) \neq 0$  gelten muß. Anderenfalls wären die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  linear abhängig.  $\square$

*Bemerkung 2.74.* (natürliche Basis)

Die  $n$  Vektoren

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ .  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$  heißt kanonische oder natürliche Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.6.2 Lineare Abbildungen, Koordinaten, Basiswechsel

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit speziellen, man kann auch sagen, ausgesprochen gutartigen Abbildungen befassen.

**Definition 2.75.** (lineare Abbildung)

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ , und mit

$$f : V \rightarrow W,$$

eine Abbildung von  $V$  in  $W$  gegeben. Die Abbildung  $f$  heißt linear, wenn für  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  und  $\lambda \in K$

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) \quad (45)$$

$$f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) \quad (46)$$

gilt<sup>6</sup>.

Beispiele linearer Abbildungen sind etwa

- 1) lineare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \gamma x, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

- 2) die Drehung einer Ebene um einen bestimmten Winkel  $\alpha$ , wobei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

jedem Vektor  $\underline{x}$  den um den Winkel  $\alpha$  in mathematisch positiver Richtung gedrehten Vektor  $\underline{y} = f(\underline{x})$  zuordnet (s.a. Abb. 16).

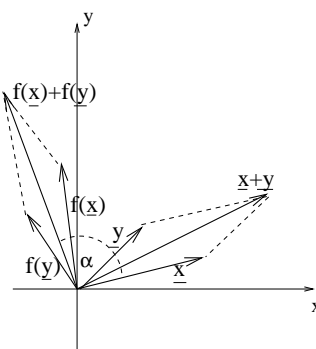


Abbildung 16: Drehung der  $x - y$ -Ebene

Wenn wir uns an die komplexen Zahlen erinnern und  $\underline{x}$  in Polarkoordinaten, also durch  $\underline{x} = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$  darstellen und die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen benutzen, finden wir

---

<sup>6</sup>Die lineare Abbildung  $f$  wird auch Homomorphismus genannt. Ist  $f$  eine bijektive Abbildung, heißt  $f$  Isomorphismus

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(\phi + \alpha) \\ r \sin(\phi + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \phi - r \sin \alpha \sin \phi \\ r \sin \alpha \cos \phi + r \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im folgenden wollen wir uns mit linearen Abbildungen der Art

$$f : V \rightarrow W$$

befassen, wobei  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n$  und  $W$  ein Vektorraum der Dimension  $m$  ist ( $n, m \in \mathbb{N}$ ). Mit  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  sei eine Basis von  $V$  und mit  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  sei eine Basis von  $W$  gegeben. Wir betrachten  $f(\underline{v}_j)$  für  $j = 1, 2, \dots, n$ , also die Bilder der Basisvektoren  $\underline{v}_j$ . Da  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  eine Basis von  $W$  ist, gibt es  $\alpha_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$ , so daß

$$f(\underline{v}_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \underline{w}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

gilt. Die  $\alpha_{ij}$  sind die Koordinaten der Bilder des Basisvektoren von  $V$  bezüglich der Basis  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  von  $W$ . Die Abbildung  $f$  ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

eindeutig bestimmt. Für  $\underline{x} \in V$  folgt

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \underline{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\underline{v}_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_j \underline{w}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Gesetze der Matrixmultiplikation ergibt sich, daß jede Matrix  $A$  vom Typ  $m \times n$  durch  $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$  eine lineare Abbildung  $V \rightarrow W$  erklärt. Die eben vorgenommenen Betrachtungen können wir im folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz 2.76.**

Sei  $F : V \rightarrow W$  linear, dann existiert genau eine Matrix  $A = (a_{ij})$  vom Typ  $n \times m$ , so daß

$$f(\underline{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \underline{w}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

$A$  heißt die Abbildungsmatrix oder darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  und  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  von  $V$  und  $W$ .

*Beweis.*

Da  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  eine Basis von  $W$  ist, kann man  $f(\underline{v}_j)$  als Linearkombination  $\sum_{i=1}^m a_{ij} \underline{w}_i$  mit eindeutig bestimmten  $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in K$  darstellen.  $\square$

*Bemerkung 2.77.*

Die Abbildungsmatrix hängt von der Basis  $\underline{v}_j$  von  $V$  und der Basis  $\underline{w}_i$  von  $W$ , sowie von der konkreten linearen Abbildung  $f$  ab.

Hat ein Element des Urbildraumes  $V$  bezügl. der Basis  $\underline{v}_j$  die Koordinaten

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so ergeben sich mit

$$\underline{y} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die Koordinaten des Bildes von  $\underline{y} = f(\underline{x})$  bezügl. der Basis  $\underline{w}_i$  des Bildraumes  $W$ .

Beispiel:

Betrachten wir die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Mit den Basen  $\underline{c}_j$  des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\underline{d}_i$  des  $\mathbb{R}^3$  erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\underline{c}_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\underline{d}_1 + 1\underline{d}_2 + 1\underline{d}_3 \\ f(\underline{c}_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\underline{d}_1 - 1\underline{d}_2 + 0\underline{d}_3 \end{aligned}$$

und damit die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hat ein Vektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  bezüglich der Basis  $(\underline{c}_1, \underline{c}_2)$  die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  so berechnet man die Koordinaten  $y_1, y_2$  und  $y_3$  des Bildes  $\underline{y} = f(\underline{x})$  bezügl. der Basis  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.78.** (Kern einer linearen Abbildung  $f$ )

$$\ker f := \{\underline{x} \in V \mid f(\underline{x}) = \mathbf{0}\}$$

heißt Kern der linearen Abbildung  $f$ .



**Definition 2.79.** (Bild einer linearen Abbildung  $f$ )

$$\text{im } f = f(V) := \{\underline{w} \in W \mid \text{es gibt ein } \underline{v} \in V \text{ mit } f(\underline{v}) = \underline{w}\}$$

heißt Bild der linearen Abbildung  $f$

*Bemerkung 2.80.*

Der Kern  $\ker f \subset V$  einer linearen Abbildung  $f$  ist ein Vektorraum (Unterraum von  $V$ ).  
Das Bild  $\text{im } f \subset W$  einer linearen Abbildung  $f$  ist ein Vektorraum (Unterraum von  $W$ ).

**Definition 2.81.** (Defekt und Rang einer linearen Abbildung  $f$ )

Mit  $\dim U$  bezeichnen wir die Dimension eines Vektorraumes  $U$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \text{def } f &:= \dim \ker f \quad \text{''Defekt'' und} \\ \text{rg } f &:= \dim \text{im } f \quad \text{''Rang''}. \end{aligned}$$

Der Rang einer linearen Abbildung ist gleich dem Rang der zugehörigen Matrix  $A$ . Defekt und Rang einer linearen Abbildung stehen in einem Zusammenhang mit der Dimension des Vektorraumes  $V$ , es gilt der

**Satz 2.82.**

Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann gilt

$$\text{rg } f + \text{def } f = \dim V.$$

Beispiel:

Zu berechnen ist der Kern der linearen Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Es ist das Gleichungssystem

$$f(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

zu lösen. Wir wählen die freien Parameter  $t = x_2$  und  $s = x_3$  und erhalten  $x_1 = -(t + s)$  und damit

$$\ker f = \{\underline{x} \mid \underline{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

$\ker f$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  der Dimension 2 ( $\text{def } f = 2$ , es handelt sich um eine Ebene, die durch den Nullpunkt geht). Die Dimension des Bildes der linearen Abbildung ist nach der Definition 2.82 gleich 1. Damit hat  $f$  den Rang 1. Die zu  $f$  gehörende Matrix  $A$  hat die einfache Form

$$A = (1 \ 1 \ 1)$$

und offensichtlich den Rang 1.

**Satz 2.83.**

Die Lösungen des linearen homogenen Gleichungssystems  $A \cdot \underline{x} = \mathbf{0}$  bilden einen Vektorraum.

Im Folgenden soll die Frage behandelt werden, wie sich die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung  $f$  im Falle eines **Basiswechsels** in den Vektorräumen  $V$  und/oder  $W$  verhält. Seien nun  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  eine weitere Basis von  $V$  (neben  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ ) und  $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m)$  eine weitere Basis von  $W$  (neben  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$ ). Wir wollen den Übergang von den Basen  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  und  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  zu diesen neuen Basen beschreiben. Wir definieren eine  $n \times n$ -Matrix  $B_v$  und eine  $m \times m$ -Matrix  $B_w$  mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = B_v \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_m \end{pmatrix} = B_w \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \vdots \\ \underline{w}_m \end{pmatrix}.$$

$B_v$  und  $B_w$  heißen *Matrizen des Basiswechsels*.

**Satz 2.84.**

(i) Sei  $\underline{v} \in V$ . Falls  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  der Koordinatenvektor von  $\underline{v}$  bezüglich  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  ist, so ist  $\tilde{x} = (B_v^T)^{-1} \underline{x}$  der Koordinatenvektor von  $\underline{v}$  bezüglich  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ .

(ii) Sei  $f : V \rightarrow W$  linear. Falls  $A$  die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  und  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  ist, so ist

$$\tilde{A} = (B_w^T)^{-1} A B_v^T$$

die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  und  $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m)$ .

*Beweis.*

(i) Sei  $\underline{v} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{v}_j$ . Wegen

$$\underline{v}_j = \left[ B_v^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_m \end{pmatrix} \right]_j = \sum_{i=1}^m (B_v^{-1})_{ji} \tilde{v}_i$$

gilt

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m (B_v^{-1})_{ji} \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i \sum_{j=1}^n (B_v^{-1})_{ji} x_j = \sum_{i=1}^m [(B_v^T)^{-1} \underline{x}]_i \tilde{v}_i.$$

(ii) Falls  $\tilde{x}$  der Koordinatenvektor von  $\underline{v} \in V$  bezüglich  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  ist, so ist  $\underline{x} = B_v^T \tilde{x}$  der Koordinatenvektor von  $\underline{v}$  bezüglich  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  (nach (i)). Da  $A$  die darstellende Matrix bezüglich  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  und  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$  ist, ist  $\underline{y} = A \underline{x}$  der Koordinatenvektor von  $f(\underline{v})$  bezüglich  $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$ . Nach (i) ist  $\tilde{y} = (B_w^T)^{-1} \underline{y}$  der Koordinatenvektor von  $f(\underline{v})$  bezüglich  $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m)$ . Wegen  $\tilde{y} = (B_w^T)^{-1} A B_v^T \tilde{x} = \tilde{A} \tilde{x}$  ist die Aussage bewiesen.  $\square$

**Beispiel:**

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

wobei wir uns auf  $\mathbf{e} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  als Basis des  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{d} = (\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  als Basis des  $\mathbb{R}^3$  beziehen. Als Abbildungsmatrix  $A$  erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun im  $\mathbb{R}^2$  die Basis  $\mathbf{a} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ , für die

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \\ \underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = B_v \cdot \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = B_v^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

gelten soll.

Im Bildraum  $\mathbb{R}^3$  wollen wir zu der Basis  $\mathbf{b} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$  übergehen, für die

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{pmatrix} = B_w \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{pmatrix} = B_w^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{pmatrix}$$

gelten soll. Die Beziehung (47) bedeutet nun

$$f(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) = (x_1 + 2x_2)\underline{d}_1 + (x_1 - x_2)\underline{d}_2 + 2x_2\underline{d}_3,$$

und wenn wir nun von den Basen  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  zu den Basen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  übergehen wollen, ergibt sich für die "linke" Seite

$$\begin{aligned} f(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) &= f\left(x_1\left(\frac{3}{5}\underline{a}_1 + \frac{2}{5}\underline{a}_2\right) + x_2\left(\frac{1}{5}\underline{a}_1 - \frac{1}{5}\underline{a}_2\right)\right) = \\ &= f\left(\left(x_1\frac{3}{5} + x_2\frac{1}{5}\right)\underline{a}_1 + \left(x_1\frac{2}{5} - x_2\frac{1}{5}\right)\underline{a}_2\right) =: f(x'_1\underline{a}_1 + x'_2\underline{a}_2). \end{aligned}$$

Für die "neuen" Koordinaten des Vektors  $\underline{x}$  ergibt sich damit

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (B_v^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Für die "rechte Seite" erhält man

$$\begin{aligned} (x_1 + 2x_2)\underline{d}_1 + (x_1 - x_2)\underline{d}_2 + 2x_2\underline{d}_3 &:= y_1\underline{d}_1 + y_2\underline{d}_2 + y_3\underline{d}_3 = \\ &= y_1(\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - 5\underline{b}_3) + y_2(\underline{b}_2 - 3\underline{b}_3) + y_3\underline{b}_3 = \\ &= y_1\underline{b}_1 + (2y_1 + y_2)\underline{b}_2 + (-5y_1 - 3y_2 + y_3)\underline{b}_3 = \end{aligned}$$

$$=: y'_1 \underline{b}_1 + y'_2 \underline{b}_2 + y'_3 \underline{b}_3.$$

Damit erhalten wir für die "neuen" Koordinaten von  $\underline{y} = f(\underline{x})$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (B_w^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Übergang von den Koordinaten der alten Basen zu den Koordinaten der neuen Basen erhält man die Abbildungsmatrix nach dem Basiswechsel.

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = (B_w^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (B_w^{-1})^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (B_w^{-1})^T \cdot A \cdot B_v^T \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = (B_w^{-1})^T \cdot A \cdot B_v^T \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} =: \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Abbildungsmatrix bei dem diskutierten Basiswechseln zu

$$\tilde{A} = (B_w^{-1})^T \cdot A \cdot B_v^T = (B_w^T)^{-1} \cdot A \cdot B_v^T.$$

**Definition 2.85.** (Ähnlichkeit von Matrizen)

Die Matrizen  $A$  und  $A'$  heißen ähnlich, wenn eine reguläre Matrix  $B$  existiert, so daß

$$A' = B \cdot A \cdot B^{-1}$$

gilt.

**Korollar 2.86.**

Die Abbildungsmatrizen  $A$  und  $A'$  einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  bezüglich zweier Basen  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{a}$  sind ähnlich.

## 2.7 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

In diesem Abschnitt werden Vektoren und Operationen mit Vektoren im Raum der Anschauung behandelt. Im folgenden werden einige Ausführungen zu Vektoren aus der Anschauung heraus in der Ebene und im Raum gemacht.

### 2.7.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

**Definition 2.87.**

Ein Vektor  $\vec{a}$  ist eine Größe, die durch einen Betrag und eine Richtung definiert ist. Den Betrag von  $\vec{a}$  bezeichnet man mit  $|\vec{a}|$ .

*Bemerkung 2.88.*

Bekannte Vektoren aus der Physik und der Mechanik sind die Kraft und die Geschwindigkeit, z.B. die Windgeschwindigkeit, die durch die Windstärke und die Windrichtung charakterisiert ist.

In der Physik wird bei Vektoren zwischen

- **gebundenen**, z.B. die Windgeschwindigkeit an einem festen Ortspunkt, und

- **linienflüchtigen** (z.B. Winkelgeschwindigkeit)

Vektoren unterschieden.

Neben der Bezeichnung  $\vec{a}$  werden auch die Bezeichnungen  $\underline{a}$ ,  $P_1\vec{P}_2$  für Vektoren verwendet.

Im  $\mathbb{R}^3$ , also dem dreidimensionalen Raum der Anschauung, stellt man sich Vektoren gemeinhin als im Raum liegende Pfeile vor, wobei der Vektor  $\vec{a} = P_1\vec{P}_2$  die Gesamtheit aller gerichteten Strecken der Länge  $|\vec{a}|$  ist, die parallel zu  $P_1\vec{P}_2$  sind!

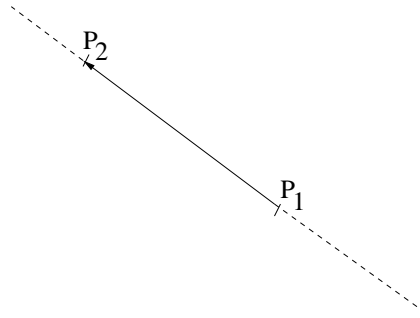


Abbildung 17: Vektor  $P_1\vec{P}_2$  im  $\mathbb{R}^3$

Zur Darstellung von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  benötigen wir den Begriff des Einheitsvektors und des Nullvektors.

**Definition 2.89.**

Unter einem Einheitsvektor versteht man einen Vektor mit dem Betrag 1. Ein Nullvektor ist ein Vektor, der den Betrag 0 hat. Dem Nullvektor wird keine Richtung zugeordnet.

Vektoren  $\vec{a} = P_1\vec{P}_2$  im  $\mathbb{R}^3$  sind durch die Koordinaten von 2 Punkten  $P_1$  und  $P_2$  charakterisierbar, indem wir den Betrag als den kürzesten Abstand der Punkte verstehen wollen, und die Richtung durch die Reihenfolge der Punkte, also von  $P_1$  nach  $P_2$  erklären.

**Satz 2.90.** (Vektordarstellung)

Seien  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  Einheitsvektoren im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht in einer Ebene liegen, dann gibt es für jeden Vektor  $\vec{a}$  genau ein Tripel von Zahlen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$ , so daß

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

gilt.

**Definition 2.91.**

Vektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ , die nicht in einer Ebene liegen, heißen Basisvektoren, und  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  heißen Koordinaten des Vektors  $\vec{a}$  bezüglich der Basis  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ .

Wählt man die kanonische oder natürliche Basis  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$  und  $\vec{e}_3 = \vec{k}$ , die in der Abb. 18 dargestellt ist, so gilt für den Vektor  $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

und

$$\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{i}), \\ a_y &= |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{j}), \\ a_z &= |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{k}), \end{aligned} \tag{48}$$

mit  $(\vec{a}, \vec{i}), (\vec{a}, \vec{j}), (\vec{a}, \vec{k}) \in [0, \pi]$ . Für den Betrag ergibt sich

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Repräsentiert man den Vektor  $\vec{a}$  durch  $P_1\vec{P}_2$ , wobei  $P_1$  die Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  und  $P_2$  die Koordinaten  $x_2, y_2, z_2$  hat, so erhält man für den Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wegen (48) ergibt sich für die Richtungskosinusse

$$\cos^2(\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{k}) = 1.$$

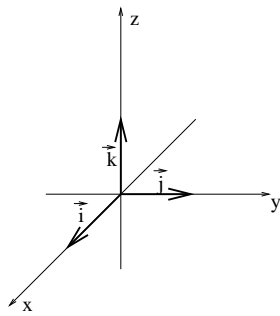


Abbildung 18: natürliche Basis im kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$

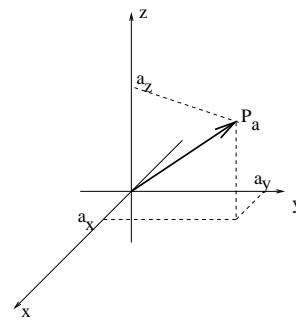


Abbildung 19: Ortsvektor des Punktes  $P_a$

Ist eine Basis vorgegeben, so sind für einen Vektor  $\vec{a}$  die Koordinaten  $a_x, a_y$  und  $a_z$  eindeutig festgelegt, und der Vektor kann mit der Matrix

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

vom Typ  $3 \times 1$  (Spaltenvektor) identifiziert werden.  $a_x, a_y$  und  $a_z$  bezeichnen wir auch als Komponenten des Vektors  $\vec{a}$ .

*Bemerkung 2.92.*

Verwendet man die natürliche Basis  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , so hat der Vektor  $\underline{a}$  als Repräsentanten den Vektor  $P_0\vec{P}_a$ , wobei  $P_0$  der Koordinatenursprung ist, und  $P_a$  die Koordinaten  $a_x, a_y$  und  $a_z$  im  $\mathbb{R}^3$  hat. Man spricht auch vom Ortsvektor des Punktes  $P_a$ .

Wenn wir Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  als Spaltenvektoren vom Typ  $1 \times 3$  identifizieren, so gelten für diese Vektoren auch die oben diskutierten Matrizen-Rechengesetze. Insbesondere sind 2 Vektoren gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen (bezüglich derselben Basis).

Für die kanonischen oder natürlichen Basisvektoren  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  gilt

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

und für Vektoren  $\vec{e}$  der Länge 1 ergibt sich

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(\vec{e}, x) \\ \cos(\vec{e}, y) \\ \cos(\vec{e}, z) \end{pmatrix}.$$

Mit den Beziehungen (49) errechnet man mit den üblichen Rechenregeln für Matrizen

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ &= a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im  $\mathbb{R}^3$  hatten wir eine Basis als ein System von 3 Vektoren, die nicht in einer Ebene liegen erklärt. Die Eigenschaft - nicht in einer Ebene zu liegen - kann man auch wie folgt beschreiben.

*Bemerkung 2.93.*

- 1) Die natürlichen Basisvektoren  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  und  $\vec{k}$  sind ebenso wie alle anderen Basen linear unabhängig.
- 2) Ist das System der  $k$  Vektoren  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$  linear abhängig, so ist jedes um irgend einen Vektor  $\vec{b}$  ergänzte System von Vektoren  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}\}$  ebenfalls linear abhängig.
- 3) Zwei Vektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  sind linear abhängig, wenn

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \mathbf{0}$$

mit  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$  ungleich Null gilt. Sei o.B.d.A.  $\alpha_1 \neq 0$ , dann erhalten wir die Beziehung

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2,$$

was geometrisch bedeutet, daß  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Solche Vektoren heißen kollinear und es wird die Konvention

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$$

verwendet.

- 4) Lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  bedeutet für die Gleichungssysteme

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \mathbf{0},$$

bzw.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

daß nur die triviale Lösung  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  existiert. Wenn wir uns der CRAMERSchen Regel erinnern, hat das Gleichungssystem (50) genau dann nur dann die triviale Lösung, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} \\ a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} \\ a_{z1} & a_{z2} & a_{z3} \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt.

**Satz 2.94.**

Die Vektoren  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  und  $\vec{a}_3$  sind genau dann linear unabhängig, wenn das durch die Beziehung

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) := \begin{vmatrix} a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} \\ a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} \\ a_{z1} & a_{z2} & a_{z3} \end{vmatrix} \quad (51)$$

definierte Spatprodukt der Vektoren ungleich 0 ist.

*Bemerkung 2.95.* Ist das Spatprodukt dreier Vektoren gleich 0, heißen die Vektoren komplanar, d.h., sie liegen in einer Ebene.

Geometrisch bedeutet das Spatprodukt dreier Vektoren das Volumen des Spates, der von den drei Vektoren aufgespannt wird<sup>7</sup>.

**Satz 2.96.**

4 oder mehr Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  sind immer linear abhängig.

*Beweis.*

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

mit  $k \geq 4$ . Der Rang der Koeffizientenmatrix ist gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, d.h.,

$$r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A|\underline{b} \leq 3,$$

und damit können zur Lösung von (52) mindestens  $k - 3$  freie Parameter, also auch von Null verschieden, gewählt werden. Damit existiert eine nichttriviale Lösung von (52) und die  $k$  Vektoren sind linear abhängig.  $\square$

**2.7.2 Skalar-, Vektor- und Spatprodukt****Definition 2.97.** (Skalarprodukt)

Das Skalarprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

bezeichnet und definiert man durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (53)$$

Geometrisch kann man das Skalarprodukt zweier Vektoren wie folgt interpretieren. Wir wählen ein orthogonales Koordinatensystem, dessen  $x$ - und  $y$ -Achsen die Eigenschaften haben, daß

- a) der Vektor  $\vec{a}$  in Richtung der  $x$ -Achse verläuft, und

<sup>7</sup>Dabei wird vorausgesetzt, daß die Vektoren in der Reihenfolge im Spatprodukt ein Rechtssystem bilden, ansonsten erhält man mit dem Betrag des Spatproduktes das Volumen des Spates.



b) der Vektor  $\vec{b}$  in der  $x - y$ -Ebene liegt.

In diesem Koordinatensystem haben die Vektoren die Darstellung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Skalarprodukt erhalten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|b_x = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad (54)$$

also das Produkt des Betrages von  $\vec{a}$  mit der vorzeichenbehafteten Länge der Projektion von  $\vec{b}$  auf die Richtung von  $\vec{a}$ .

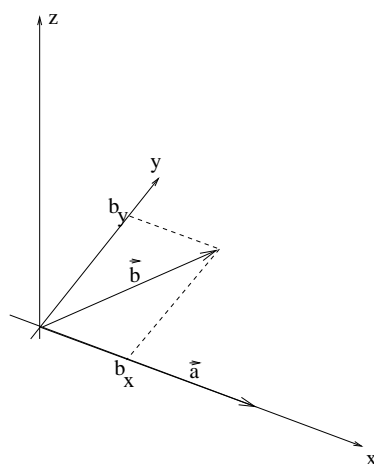


Abbildung 20: Geometrische Interpretation des Skalarproduktes

*Bemerkung 2.98.*

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß wir soeben das Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren definiert haben.

Wenn wir die Matrixmultiplikation zur Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren verwenden wollen, erhalten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := (a_x, a_y, a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \underline{a}^T \cdot \underline{b},$$

wobei wir mit  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  Spaltenvektoren oder besser Matrizen des Types  $(3 \times 1)$  bezeichnen.

**Korollar 2.99.**

*Aus der Definition und der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ergibt sich*

a) stehen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht aufeinander ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), dann folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

b) sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel ( $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ), dann folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

c)

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

d) Das Skalarprodukt ist kommutativ, Assoziativ- und Distributivgesetz gelten nicht.

**Definition 2.100.** (Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$ )

Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist definiert als der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

**Korollar 2.101.**

Für die Berechnung des Vektorproduktes  $\vec{a} \times \vec{b}$  kann man auch die Beziehung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

benutzen, wobei hier die Determinante "symbolisch" zu verstehen ist. Die Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k},$$

und damit die oben definierte Form.

*Bemerkung 2.102.*

Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist der Vektor mit den Eigenschaften

- $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ,
- $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem<sup>8</sup>,
- für den Betrag des Vektorproduktes gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Wenn wir wie bei der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes o.B.d.A ein spezielles Koordinatensystem so wählen, daß für die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, dann erhält man mit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}| & 0 & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = |\vec{a}| b_y \vec{k}$$

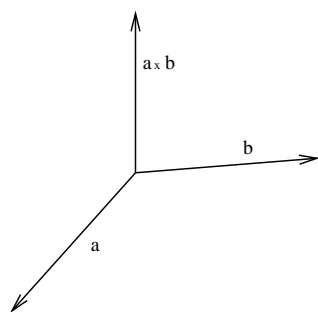


Abbildung 21: Rechtssystem  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$

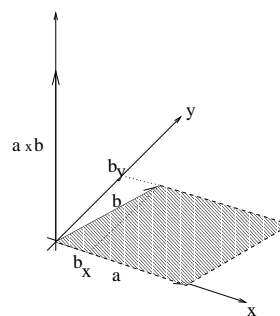


Abbildung 22: Geometrische Interpretation des Vektorproduktes

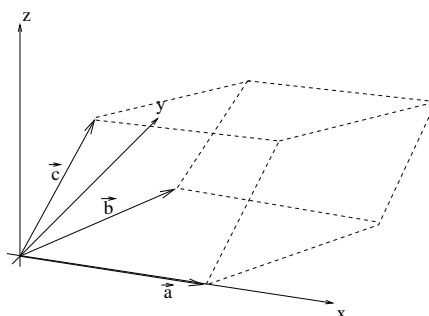


Abbildung 23: Von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  gebildeter Spat

die Parallelität von  $\vec{a} \times \vec{b}$  und  $\vec{k}$ , also mit  $\vec{a} \times \vec{b}$  einen auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht stehenden Vektor.

An dieser Stelle sei noch auf die geometrische Bedeutung des Spatproduktes hingewiesen. Das Spatprodukt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  ist gleich dem Volumen des Spates, der von den drei Vektoren aufgespannt wird<sup>9</sup>. Im folgenden Satz fassen wir die Eigenschaften von Vektorprodukt und Spatprodukt zusammen.

**Satz 2.103.**

a)  $\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0}$  genau dann, wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear sind.

b) Aufgrund der Determinateneigenschaften folgt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Dabei stelle man sich vor, daß  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  für den Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand stehen.

<sup>9</sup>Dabei wird vorausgesetzt, daß die Vektoren in der Reihenfolge im Spatprodukt ein Rechtssystem bilden

d) Aufgrund der geometrischen Bedeutung von Vektor- und Spatprodukt gilt

$$\begin{aligned} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| &= |\vec{c}| \cdot |(\vec{a} \times \vec{b})| \cdot |\cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})| \\ &= |\vec{c}| |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin(\vec{a}, \vec{b})| |\cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})| \end{aligned}$$

e) Ist  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ , dann bilden die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  ein Rechtssystem, ist  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$  bilden sie ein Linkssystem.

f) Es gilt das Antikommutativgesetz für das Vektorprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

g) Es gilt ein Distributivgesetz der Form

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

g) Es gilt ein Assoziativgesetz der Form

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Beispiel 1:

Es soll das Vektorprodukt

$$\vec{v} \times \vec{w}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

berechnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (5 \cdot 8 - 1 \cdot 1) \vec{i} + (1 \cdot 4 - 3 \cdot 8) \vec{j} + (3 \cdot 1 - 4 \cdot 5) \vec{k} = \begin{pmatrix} 39 \\ -20 \\ -17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Es ist zu prüfen, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

einen Spat aufspannen. Fall ja ist das Volumen zu berechnen und zu entscheiden, ob die Vektoren ein Rechtssystem bilden. Zu Lösung der 3 Aufgaben ist lediglich das Spatprodukt zu bilden.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 4 - 1 - 4 - 6 = -2,$$

damit kann man schlußfolgern, daß die Vektoren in der vorgegebenen Reihenfolge ein Linkssystem bilden. Das Volumen des aufgespannten Spates ist gleich 2.

Beispiel 3:

Gesucht ist ein Vektor  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$  mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 4 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_z - 4a_y \\ 4a_x - 3a_z \\ 3a_y - 5a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

und der GAUSSSCHE Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & -8 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 12 & -15 & -27 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 12 & -15 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{27}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{15}{12} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{27}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  für  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  ist, kann

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{nur bis auf einen zu} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

parallelen Vektor bestimmt werden.

### 2.7.3 Geraden im Raum

Eine Gerade  $g$  im  $\mathbb{R}^3$  ist eindeutig durch einen Punkt  $P_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^T$  und einen Vektor  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T \neq \mathbf{0}$ , der parallel zur Geraden ist, festgelegt. Für alle Punkte  $P = (p_x, p_y, p_z)^T$  der Geraden  $g$  existiert eine Zahl  $t \in \mathbb{R}$  mit

$$P = P_0 + t\vec{a}. \quad (55)$$

Bezeichnet man mit  $\vec{r}_0$  den Ortsvektor von  $P_0$ , und mit  $\vec{r}$  den Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $P$  der Geraden  $g$ , so gilt

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \quad (56)$$

Die Beziehungen (55) und (56) nennen wir Vektorform der Geradengleichung. Die Elimination des Parameters  $t$  ergibt für  $a_x \neq 0, a_y \neq 0, a_z \neq 0$  schließlich die parameterfreie Form der Geradengleichung

$$\frac{p_x - p_{0x}}{a_x} = \frac{p_y - p_{0y}}{a_y} \quad (57)$$

$$\frac{p_x - p_{0x}}{a_x} = \frac{p_z - p_{0z}}{a_z}. \quad (58)$$

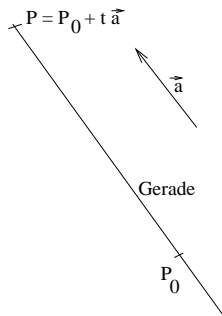


Abbildung 24: Durch  $P$  und  $\vec{a}$  definierte Gerade

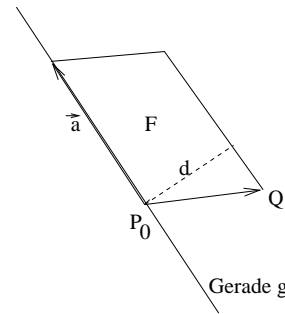


Abbildung 25: Abstand eines Punktes  $Q$  zu einer Geraden berechnet mit dem Vektorprodukt

Mit Blick auf die etwas später zu diskutierenden Ebenen im Raum ist anzumerken, daß (57) und (58) jeweils Ebenen beschreiben, und die Schnittmenge dieser Ebenen die Gerade ist.

Die Berechnung des kürzesten Abstandes  $d$  eines Punktes  $Q$  zu einer Geraden  $g$  kann man recht einfach über das Vektorprodukt vornehmen. Sei die Gerade durch den Punkt  $P_0$  und den Vektor  $\vec{a}$  definiert (s.a. Abb. 24), und  $\vec{b} = P_0\vec{Q}$  der Vektor, der die Punkte  $P_0$  und  $Q$  miteinander verbindet. Für den Flächeninhalt des durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms ergibt sich mit dem Vektorprodukt

$$F = |\vec{a} \times P_0\vec{Q}| = |\vec{a}|d$$

und damit für den Abstand die Beziehung

$$d = \frac{|\vec{a} \times P_0\vec{Q}|}{|\vec{a}|}.$$

Beispiel:

Die Gerade  $g$  sei durch  $P_0 = (1, 5, 2)^T$  und  $\vec{a} = (1, 2, 3)^T$  gegeben. Es soll der kürzeste Abstand des Punktes  $Q = (1, 1, 1)^T$  von der Geraden ermittelt werden. Es ergibt sich

$$P_0\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_0\vec{Q} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

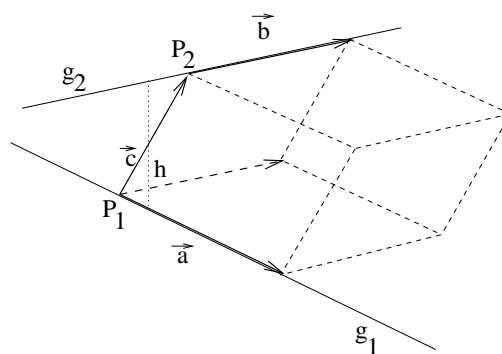
und damit

$$d = \frac{\sqrt{100 + 1 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \sqrt{\frac{117}{14}}.$$

Den kürzesten Abstand zweier nicht paralleler Geraden  $g_1$  und  $g_2$  bestimmt man auf ähnliche Weise wie den Abstand eines Punktes zur Geraden. Die geometrische Situation ist in der Abb. 26 dargestellt.

Wenn  $g_1$  durch den Punkt  $P_1$  und den Vektor  $\vec{a}$  beschrieben wird, und  $g_2$  durch  $P_2$  und  $\vec{b}$ , dann bilden  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c} := P_1\vec{P}_2$  einen Spat, dessen Höhe  $h$  der kürzeste Abstand der Geraden ist, denn für das Volumen  $V$  des Spates gilt

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{a} \times \vec{b}|h,$$

Abbildung 26: Von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  gebildeter Spat

und damit

$$h = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Betrachten wir zum Beispiel die Geraden

$$g_1: P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Abstand  $h$  erhält man mit  $\vec{c} = P_1\vec{P}_2 = (0, 0, -1)^T$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = 1.$$

#### 2.7.4 Ebenen im Raum

Eine Ebene  $E$  kann man durch einen Punkt  $P_0$  dieser Ebene und zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die zum einen parallel zur Ebene sind (oder Repräsentanten in der Ebene haben) und zum anderen nicht kollinear sind. Wenn wir mit dem Punkt  $P \in E$  einen beliebigen Punkt der Ebene betrachten, so sind die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c} = P_0\vec{P}$  komplanar, d.h. sie sind linear abhängig. Damit hat das Gleichungssystem

$$\lambda_1 P_0\vec{P} + \lambda_2 \vec{a} + \lambda_3 \vec{b} = \mathbf{0} \quad (59)$$

eine nichttriviale Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Es muß in jedem Fall  $\lambda_1 \neq 0$  gelten, da sonst  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear wären. Damit kann man aus (59) die Gleichung

$$P_0\vec{P} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \iff P = P_0 + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (60)$$

für alle Ebenenpunkte  $P$  herleiten. Die Gleichung (60) heißt Ebenengleichung in Vektorform. Eine weitere Möglichkeit der Beschreibung einer Ebene besteht in der Angabe eines Punktes  $P_0 \in E$  und eines Normalenvektors  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ , d.h. eines Vektors, der senkrecht auf der Ebene

steht. Betrachtet man konkret die Punkte  $P_0$  und  $P$  mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$  und  $\vec{r} = (x, y, z)^T$ , steht  $\vec{n}$  senkrecht auf  $\vec{r} - \vec{r}_0$ , was gleichbedeutend mit der Beziehung

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z = 0 \quad (61)$$

ist. Die Gleichungen (60) und (61) sind äquivalent, denn wenn man  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$  wählt, erhält man

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = ((\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{a}, \vec{b}) \\ &= \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Die Ebenendarstellung (61) heißt Koordinatendarstellung und wird in der Form

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = ax + by + cz = d \quad (62)$$

notiert. Zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes  $P$  zur Ebene  $E$  betrachten wir einen Normalenvektor  $\vec{n}$  und erhalten mit

$$|\vec{P_0P} \cdot \vec{n}| = \rho |\vec{n}| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{|\vec{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

den Abstand über eine Skalarproduktbildung, wobei  $P_0$  irgendein ein Punkt der Ebene ist.

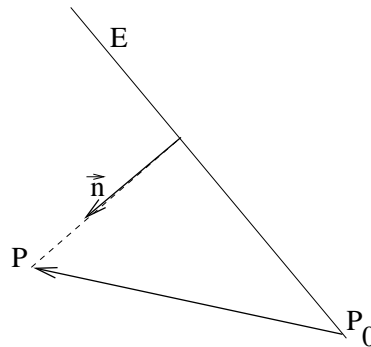


Abbildung 27: Abstand eines Punktes  $P$  zur Ebene  $E$

Hat nun der Normalenvektor  $\vec{n}$  den Betrag 1, d.h.  $|\vec{n}| = 1$ , und ist  $d$  positiv, heißt die Ebenendarstellung (62) HESSESche Normalform.

*Bemerkung 2.104.*

Aus (61) erhält man durch Multiplikation mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ , falls  $d \geq 0$  gilt, und mit dem Faktor  $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ , falls  $d < 0$  ist, die HESSESche Normalform für die Ebene.

Sei die Ebene  $E$  in der HESSESchen Normalform  $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$  gegeben, so ist die rechte Seite  $d$  der kürzeste Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung bzw. Nullpunkt. Geht man bei der Bestimmung des Abstandes eines Punktes  $P$  zur Ebene  $E$  von der HESSESchen Normalform aus, kann man  $\rho$  über die Beziehung

$$\rho = |\vec{r} \cdot \vec{n} - d|$$

ermitteln, wobei  $\vec{r}$  der Ortsvektor des Punktes  $P$  ist.



Beispiel:

Der Abstand des Punktes  $P_3 = (1, 2, 4)^T$  von der Ebene  $E$ , die durch die 3 Punkte  $P_0 = (1, 0, 1)^T$ ,  $P_1 = (1, 1, 0)^T$  und  $P_2 = (0, 1, 1)^T$  gegeben ist, ist gesucht. Für die Vektordarstellung der Ebene erhalten wir

$$P = P_0 + tP_0\vec{P}_1 + sP_0\vec{P}_2 \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Nach der skalaren Multiplikation der Vektorgleichung der Ebene mit einem Normalenvektor, den wir mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhalten, finden wir die Koordinatendarstellung

$$x + y + z = 2$$

der Ebene  $E$ . Aus der oben angegebenen Formel zur Abstandsbestimmung ergibt sich

$$\rho = \frac{|P_0\vec{P}_3 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(0, 2, 3) \cdot (1, 1, 1)^T|}{|\sqrt{3}|} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Die HESSEsche Normalform erhält man durch Multiplikation mit  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  in der Form

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

und findet mit  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  den Abstand der Ebene vom Ursprung.

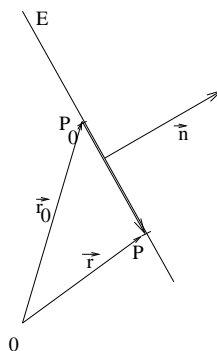


Abbildung 28: Normalenvektor der Ebene  $E$

Im folgenden überlegt man sich leicht, daß die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden  $g$  mit einer Ebene  $E$  gleichbedeutend mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems ist. Sei z.B.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

dann ergibt sich für den Schnittpunkt das lineare Gleichungssystem

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} 2\lambda - 2\alpha - 2\beta &= -1 \\ \lambda - \alpha &= 1 \\ 4\lambda - 4\beta &= -1 \end{aligned}$$

Man erkennt nun, daß genau eine Schnittpunkt existiert, wenn

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Für  $D$  erhält man  $D = -8 \neq 0$  und kann **den** Schnittpunkt allein durch die Bestimmung von  $\lambda$  berechnen. Nach CRAMER erhält man

$$\lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4} \quad \text{und damit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Der Übergang von der Vektordarstellung einer Ebene zur Koordinatendarstellung wurde im obigen Beispiel durch die skalare Multiplikation mit einem Normalenvektor praktisch erläutert. Abschließend soll der Übergang von der Koordinatendarstellung zur Vektordarstellung einer Ebene dargestellt werden. Dieser Übergang reduziert sich auf die Lösung des "Gleichungssystems"

$$ax + by + cz = d.$$

Wir haben eine Gleichung und 3 Unbekannte, und sinnvollerweise ist von den Koeffizienten  $a, b, c$  mindestens einer von Null verschieden. Sei o.B.d.A.  $a \neq 0$ . Damit hat die "Koeffizientenmatrix" den Rang 1, und wir können 2 freie Parameter mit  $t = y$  und  $s = z$  wählen. Als Lösung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} - t\frac{b}{a} - s\frac{c}{a} \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 3 Analysis

Der Hauptgegenstand der Analysis wird in der Befassung mit Funktionen reeller Veränderlicher und deren Eigenschaften bestehen. Dabei wird im Unterschied zur linearen Algebra auf die einschränkende Eigenschaft der Linearität verzichtet, denn die meisten funktionalen Zusammenhänge sind nichtlinear. Wenn wir z.B. vom exponentiellen Wachstum einer Bakterienkultur sprechen, meinen wir eigentlich eine Abbildung  $w : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $w(t) = c_0 e^{at}$ , wobei  $w(t)$  die Masse der Bakterien zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet. Man sieht sofort, daß  $w$  nicht linear ist, denn für 2 Zeitpunkte  $t_1 \in [t_0, T]$  und  $t_2 \in [t_0, T]$  ergibt sich

$$w(t_1 + t_2) = c_0 e^{a(t_1+t_2)} \neq c_0 e^{at_1} + c_0 e^{at_2} = w(t_1) + w(t_2).$$

Die Abbildung  $w$  bildet ein Intervall, also eine Teilmenge des  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ab. Abbildungen dieser Art nennen wir Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Man unterscheidet zwischen der aus der Schule bekannten Analysis von Funktionen einer reellen Veränderlichen und der Analysis von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher, auch mehrdimensionale Analysis genannt. Die Analysis untergliedert sich in die umfangreichen Teilgebiete der Differentialrechnung und Integralrechnung. Dazu kommt das Gebiet der Differentialgleichungen, die bei der Beschreibung von ingenieurphysikalischen Zusammenhängen von großer Bedeutung sind.

#### 3.1 Begriff der Funktion

Wir hatten soeben schon angemerkt, daß Funktionen spezielle Abbildungen sind, und fassen dies in der folgenden Definition zusammen.

**Definition 3.1.** reelle Funktion

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ , dann heißt eine Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

reellwertige Funktion von  $n$  unabhängigen Veränderlichen (Bezeichnung  $y = f(x)$  mit  $x \in D$  und  $y \in \mathbb{R}$  als dem Bild von  $x$ ).

$D = D(f) \subset \mathbb{R}^n$  heißt Definitionsbereich der Funktion  $f$  und

$$W = \{y \mid \text{es gibt ein } x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$$

heißt Wertebereich oder Wertevorrat von  $f$  (wird auch mit  $f(D)$  bezeichnet. Der größtmögliche Definitionsbereich einer Funktion wird natürlicher Definitionsbereich genannt.

Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $B \subseteq \mathbb{R}$  dann nennen wir

$$f(A) := \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$$

die Bildmenge von  $A$ , und

$$f^{-1}(B) := \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

die Urbildmenge von  $B$ .

**Definition 3.2.**

Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt **injektiv** (eindeutig), falls

$$f(a) = f(b) \implies a = b \text{ gilt.}$$

$f$  heißt **surjektiv** (Abbildung auf,  $f(A) = B$ ), falls es zu jedem  $b \in B$  ein  $a \in A$  gibt, so daß  $b = f(a)$  gilt.  $f$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv.

**Definition 3.3.**

Die Funktionen  $f$  und  $g$  sind gleich ( $f = g$ ), genau dann, wenn  $D(f) = D(g)$  und für alle  $x \in D(f)$   $f(x) = g(x)$  gilt.

Beispiele von Funktionen:

- a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $D = \mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ ,  $W = [0, \infty)$ , injektiv, surjektiv,
- b)  $y = e^x$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = (0, \infty)$ , injektiv, surjektiv,
- c)  $y = \cos x$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = [-1, 1]$ , surjektiv,
- d)  $y = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = \{0, 1\}$ , surjektiv.

Neben der in den Beispielen verwendeten analytischen Darstellungsform von Funktionen durch eine (oder auch mehrere) Formeln gibt es auch die Möglichkeit einer Parameterdarstellung. Wenn wir zum Beispiel die Funktion  $f$  einer oberen Kreisbogenhälfte (Radius  $r$ ) betrachten, können wir  $x \in [-r, r]$  und den dazugehörigen Funktionswert  $y = f(x)$  in Polarkoordinaten

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

in Abhängigkeit vom Parameter  $t$  (Winkel) aus dem Intervall  $[0, \pi]$  darstellen.

**Definition 3.4.** Graph einer Funktion  $f$ 

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann heißt

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Graph der Funktion  $f$ .

Eine weitere Darstellungsform von funktionalen Zusammenhängen ist durch Tabellen der Art

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

gegeben. Die Tabelle beschreibt die Funktion

$$f : \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_n\},$$

die durch die Zuordnungstabelle surjektiv ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß man eine Funktion  $f : D \rightarrow F$  auch durch das kartesische Produkt  $D \times f(D) \subset D \times F$  beschreiben kann. Im Falle der in der Tabelle notierten Funktion erhält man

$$D \times f(D) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

Die obige Tabelle ist in der Regel das Ergebnis von Messungen, Versuchen o.ä., also zum Beispiel das Ergebnis der Aufzeichnung der Temperaturen in Berlin am 5.12.1998 zu jeder zweiten Stunde

$t$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$\theta$	-15	-16	-17	-15	-14	-10	-8	-9	-9	-10	-10	-14

Weitere Möglichkeiten der Darstellung von Funktionen:

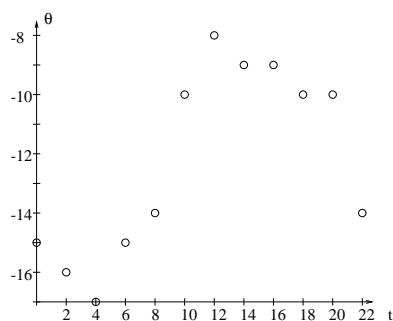


Abbildung 29: Temperaturreihe  $\theta(t)$  am 5.12.98

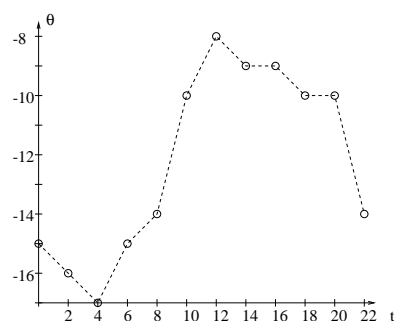


Abbildung 30: Temperaturreihe linear interpoliert

- Graphische Darstellung,
- Darstellung durch Computerprogramme (sin, cos, exp, int usw.) in Basic-, PASCAL-, C- oder FORTRAN-Programmen,
- Beschreibung durch eine DIFFERENTIALGLEICHUNG, etwa

$$\begin{aligned} mx'' + kx &= r(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x'(t_0) &= w_0 \end{aligned}$$

- Implizite Darstellung, z.B.,

$$F(x, y) = e^{y \ln x} - 1 = 0,$$

wodurch ein funktionaler Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  definiert sein kann, aber nicht sein muß.

**Definition 3.5.** (Umkehrfunktion  $f^{-1}$ )

Ist  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive (eindeutige) Funktion, so ist jedem  $x \in A$  ein  $y = f(x) \in B$  zugeordnet, und damit umgekehrt jedem  $y \in B$  genau ein  $x \in A$  zugeordnet. Die damit existierende Funktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  mit

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls } y = f(x),$$

heißt Umkehrabbildung oder inverse Funktion.

**Korollar 3.6.**

Die inverse Funktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ist ebenfalls bijektiv und es gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

für alle  $x \in A$ .

*Bemerkung 3.7.* (Berechnung der inversen Funktion)

Ist  $f : A \rightarrow B$  bijektiv, so ergibt sich  $f^{-1} : B \rightarrow A$  durch

$$1) \ y = f(x) \text{ nach } x \text{ auflösen } \rightarrow x = f^{-1}(y),$$

$$2) \ x \text{ und } y \text{ vertauschen } \rightarrow y = f^{-1}(x).$$

$f^{-1}$  und  $f$  liegen spiegelbildlich zur Geraden  $y = x$  (Spiegelung an der Geraden)

Beispiele:

- 1)  $y = x^2$ ,  $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$ , Inverse existiert,  $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ,
- 2)  $y = x^2$ ,  $A = \mathbb{R}$ , Inverse existiert nicht, da  $y = x^2$  nicht bijektiv ist,
- 3)  $y = \tan x$ ,  $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , Inverse existiert,  $y = f^{-1}(x) = \arctan x$ ,
- 4)  $y = \cos x$ ,  $A = \mathbb{R}$ , Inverse existiert nicht.

Mitunter ist ein funktionaler Zusammenhang im Rahmen einer Problemstellung erst zu erarbeiten. Als Beispiel betrachten wir dazu die Ermittlung der Abhängigkeit des Blickwinkels von der Sitzposition im Seitenrang eines Theaters oder Kinos<sup>10</sup>. Die Situation ist in der Skizze dargestellt.

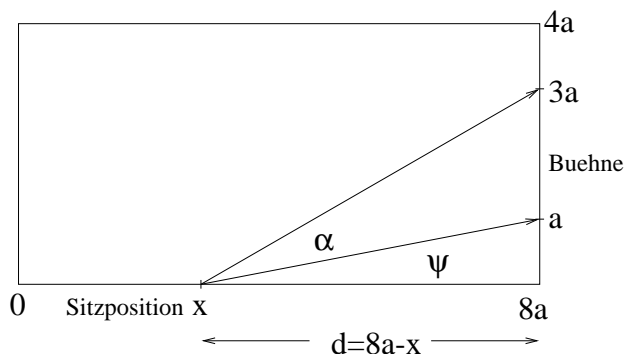


Abbildung 31: Blickwinkel  $\alpha$  und Sitzposition  $x$

Da man sinnvollerweise die Sitzposition so wählt, daß der Blickwinkel möglichst groß ist, lohnt sich die Beschäftigung mit dem funktionalen Zusammenhang  $\alpha = f(x)$  und den Eigenschaften dieser Funktion. Bevor Eigenschaften untersucht werden können, muß man die Funktion aufstellen. Wenn wir uns an die Vektorrechnung und das Skalarprodukt erinnern und ein Koordinatensystem mit dem Ursprung an der Position  $x$  betrachten, können wir den Winkel zwischen den Ortsvektoren  $\vec{v}$  des Punktes  $(8a - x, a)$  und  $\vec{w}$  des Punktes  $(8a - x, 3a)$  durch die aus dem Skalarprodukt resultierende Formel

$$\begin{aligned} \cos(\vec{v}, \vec{w}) &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \\ &= \frac{64a^2 - 16ax + x^2 + 3a^2}{\sqrt{64a^2 - 16ax + x^2 + a^2} \sqrt{64a^2 - 16ax + x^2 + 9a^2}} \\ &= \frac{67a^2 - 16ax + x^2}{\sqrt{65a^2 - 16ax + x^2} \sqrt{73a^2 - 16ax + x^2}} \end{aligned}$$

beschreiben. Nun hat die Cosinusfunktion mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$  wie im obigen Beispiel 4 angemerkt keine Umkehrfunktion. Schränkt man jedoch den Definitionsbereich auf das Intervall  $D = [0, \pi]$  ein, so existiert die Umkehrfunktion (bezeichnet mit  $\arccos x$ ). Damit erhalten wir mit

$$\alpha = \arccos\left(\frac{67a^2 - 16ax + x^2}{\sqrt{65a^2 - 16ax + x^2} \sqrt{73a^2 - 16ax + x^2}}\right)$$

den funktionalen Zusammenhang zwischen Sitzposition und Blickwinkel als Funktion  $f : [0, 8a] \rightarrow [0, \pi]$ .

<sup>10</sup>Man sollte sich nicht ausschließlich mit Höherer Mathematik beschäftigen. Gelegentliche Theater-, Kino- oder Konzertbesuche erhöhen die Lockerheit und machen meistens auch Spaß.

Eine zweite, etwas übersichtlichere Möglichkeit zur Aufstellung der Funktion  $\alpha = f(x)$  ergibt sich durch die Verwendung der Tangens- bzw. Arcustangensfunktion. Man erhält

$$\tan(\alpha + \psi) = \frac{3a}{8a - x} \quad \text{und} \quad \tan \psi = \frac{a}{8a - x}.$$

Die Winkel  $\psi$  und  $\alpha$  sind aus dem Intervall  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ , so daß die Umkehrfunktion des Tangens existiert. Für  $\alpha$  erhält man schließlich

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3a}{8a - x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{8a - x}\right). \quad (63)$$

Die weitere Untersuchung der Funktion  $\alpha = f(x)$  zur Ermittlung des "optimalen" Sitzplatzes wird fortgesetzt.

**Definition 3.8.** (Verkettung von Funktionen)

Seien die Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : C \rightarrow D$  mit  $B \subset C$  gegeben, so ist jedem  $x \in A$  durch  $f$  das Element  $f(x) \in B$  zugeordnet, und diesem durch die Funktion  $g$  das Element  $g(f(x)) \in D$  zugeordnet.

Das Nacheinanderausführen von  $f$  und  $g$  liefert eine Funktion

$$h = g \circ f : A \rightarrow D.$$

$h = g \circ f$  heißt zusammengesetzte oder verkettete Funktion

Beispiel:

- 1)  $f(x) = e^x, g(x) = x^2 \rightarrow h(x) = g \circ f(x) = (e^x)^2$
- 2)  $f(x) = e^x, g(x) = x^2 \rightarrow h(x) = f \circ g(x) = e^{x^2}$
- 3)  $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x} \rightarrow h(x) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$

*Bemerkung 3.9.*

Bei der Komposition von Funktionen muß man möglicherweise Definitionsbereiche einschränken, um die Verkettung durchführen zu können, beispielsweise kann man  $f(x) = \ln x$  und  $g(x) = 1 - x^2$  nur dann verketteten zu  $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(1 - x^2)$ , wenn der Definitionsbereich von  $g$  auf das Intervall  $(-1, 1)$  reduziert wird.

### 3.2 Eigenschaften von Funktionen

Bevor die zentralen Begriffe des Grenzwertes von Funktionen und der Stetigkeit besprochen werden, wollen wir einige grundlegende, aber im Vergleich zur Stetigkeit recht einfache Eigenschaften von Funktionen diskutieren.

**Definition 3.10.**

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf der Menge  $M \subset D$  beschränkt, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}, 0 < c < \infty$  gibt, so daß

$$|f(x)| \leq c, \quad \text{für alle } x \in M$$

gilt.

$f$  heißt auf  $M$  nach oben beschränkt, wenn es eine "obere Schranke"  $b_o \in \mathbb{R}, b_o < \infty$  gibt, so daß  $f(x) \leq b_o$  für alle  $x \in M$  gilt, und  $f$  heißt auf  $M$  nach unten beschränkt, wenn es eine "untere Schranke"  $b_u \in \mathbb{R}, b_u > -\infty$  gibt, so daß  $f(x) \geq b_u$  für alle  $x \in M$  gilt.

Beispiele:

- 1) Die Betragsfunktion  $y = |x|$  ist durch die Konstante  $b_u = 0$  nach unten beschränkt.
- 2) Die nach unten geöffnete Parabel  $y = -x^2 + 1$  ist durch die Konstante  $b_o = 3$  nach oben beschränkt (es gibt natürlich auch eine kleinere obere Schranke, nämlich  $b_o = 1$ ).
- 3) Die Funktion  $y = \arctan x$  ist durch die Konstante  $b = \frac{\pi}{2}$  beschränkt.

**Definition 3.11.**

Sei  $I \subset D$  ein Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion  $y = f(x)$ . Wenn für alle  $x, y \in I$  gilt

$$\text{aus } x < y \text{ folgt } f(x) \leq f(y),$$

dann spricht man von einer monoton steigenden Funktion. Folgt aus  $x < y$  sogar  $f(x) < f(y)$  so nennt man  $f$  eine streng monoton steigende Funktion.

Gilt für alle  $x, y \in I$

$$\text{aus } x < y \text{ folgt } f(x) \geq f(y),$$

dann spricht man von einer monoton fallenden Funktion. Folgt aus  $x < y$  sogar  $f(x) > f(y)$  so nennt man  $f$  eine streng monoton fallende Funktion.

Beispiele für monoton steigende Funktionen sind z.B.  $y = \arctan x$ ,  $y = x^3$  oder  $y = e^x$ , sie sind sogar streng monoton steigend. Die Funktion  $y = \frac{1}{x}$  mit dem Definitionsbereich  $D = (0, \infty)$  ist streng monoton fallend.

**Definition 3.12.**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , dann heißt  $f$  auf dem Intervall  $I \subset D$  konvex, wenn für alle  $x, y \in I$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

gilt.

$f$  heißt konkav, wenn für alle  $x, y \in I$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

gilt.

Beispielsweise ist die Funktion  $f(x) = x^2$  konvex, denn es gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Geometrisch bedeutet die Konvexität (bzw. die Konkavität), daß die Gerade durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$  in dem Intervall  $[x, y]$  immer oberhalb (unterhalb) der Funktion liegt.



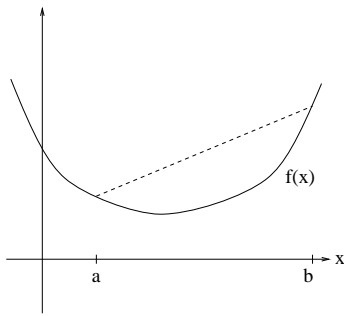


Abbildung 32: konvexe Funktion

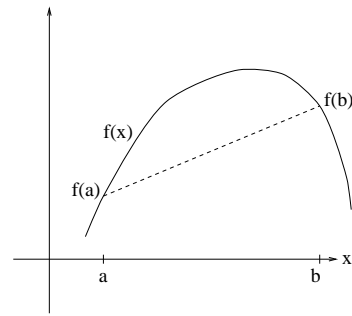


Abbildung 33: konkave Funktion

**Definition 3.13.**

Sei der Definitionsbereich  $D$  der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrisch bezügl. der  $y$ -Achse  $x = 0$  (mit jedem  $x \in D$  ist auch  $-x \in D$ ).

Gilt für alle  $x \in D$

$$f(x) = f(-x),$$

dann heißt  $f$  gerade Funktion.

Gilt für alle  $x \in D$

$$f(x) = -f(-x),$$

dann heißt  $f$  ungerade Funktion.

*Bemerkung 3.14.*

Der Graph einer geraden Funktion, z.B.  $y = \cos x$ , ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.

Bei einer ungeraden Funktion, z.B.  $y = x^3$  geht der Graph der Funktion für  $x > 0$  durch Drehung um  $180^\circ$  in den Graphen der Funktion für  $x < 0$  über.

Jede Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem um den Punkt  $x = 0$  symmetrischen Definitionsbereich  $D$  kann man als Summe  $f(x) = g(x) + u(x)$  einer geraden Funktion  $g$  und einer ungeraden Funktion  $u$  darstellen, denn mit

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

findet man Funktionen mit den geforderten Eigenschaften.

**Definition 3.15.**

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch, falls eine Zahl  $\alpha > 0$  existiert, so daß für alle  $x \in D$  auch  $x + \alpha \in D$  ist, und darüberhinaus

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

gilt.  $\alpha$  heißt Periode der Funktion  $f$ . Die kleinste Periode einer Funktion  $f$ , also

$$\alpha_{min} = \min \{ \alpha \}$$

nennt man primitive Periode der Funktion.

Die trigonometrischen Funktionen sind periodische Funktionen. Die Funktion  $y = \sin x$  hat die Perioden  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und die kleinste bzw. primitive Periode  $2\pi$ .

### 3.3 Elementare Funktionen

Oft lassen sich Funktionen auf die Komposition (arithmetische Verküpfung) von sogenannten elementaren Grundfunktionen zurückführen, so daß sich in diesen Fällen die Eigenschaften der "komponierten" Funktionen auf die Eigenschaften der Grundfunktionen zurückführen lassen. Im Folgenden werden die wesentlichen elementaren Grundfunktionen kurz diskutiert<sup>11</sup>.

- 1) Exponentialfunktion  $y = a^x$ ,  $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  
ist  $a = e$  (EULERSche Zahl), spricht man von der  $e$ -Funktion  $y = e^x$ ;
- 2) Logarithmusfunktion  $y = \log_a x$ ,  $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ,  $D = \mathbb{R}_{>0}$ ,  
definiert als die Zahl  $y$  mit der Eigenschaft  $a^y = x$ ,  
ist  $a = e$  (EULERSche Zahl), definiert man mit

$$y = \ln x := \log_e x$$

den natürlichen Logarithmus,  
aufgrund der Definition des Logarithmus über den Zusammenhang mit der Exponentialfunktion gelten die Gesetze

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \quad c \neq 0, \quad \log_a b^c = c \log_a b,$$

denn für die Exponentialfunktionen gilt ja

$$a^{(x+y)} = a^x a^y, \quad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{(x \cdot y)},$$

die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion und umgekehrt;

- 3) Potenzfunktion  $y = x^\nu$ ,  
 $\nu \in \mathbb{N}$ : natürlicher (größtmöglicher) Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ ,  
 $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu < 0$ :  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  
 $\nu \in \mathbb{R}$ :  $y = x^\nu := e^{\ln x^\nu} = e^{\nu \ln x}$ ,  $D = \mathbb{R}_{>0}$ ,  
die Umkehrfunktionen zu  $y = x^\nu$  sind mit  $y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$  wiederum Potenzfunktionen;

- 4) Trigonometrische Funktionen,  
 $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $D = \mathbb{R}$ , primitive Periode  $\alpha = 2\pi$ ,  
 $y = \tan x$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ , primitive Periode  $\pi$ ,  
 $y = \cot x$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , primitive Periode  $\pi$ ;  
Es gelten die wichtigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{aligned}$$

- 5) Inverse trigonometrische Funktionen,  
 $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $D = [-1, 1]$ ,  
 $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$ ,  $D = \mathbb{R}$ .

---

<sup>11</sup>An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß eine mathematisch korrekte Definition der Exponentialfunktion erst möglich ist, wenn wir den Begriff des Grenzwertes von Zahlenfolgen kennen. Die Definition der trigonometrischen Funktionen über die Beziehungen zwischen Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse des Dreiecks im Einheitskreis wird als Schulwissen vorausgesetzt.

**Definition 3.16.** (Elementare Funktionen)

Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Komposition der elementaren Grundfunktionen vom Typ 1 bis 5 darstellen lassen, heißen elementare Funktionen.

Beispiele für elementare Funktionen:

1) Ganze rationale Funktionen (Polynome)

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0, a_k, x \in \mathbb{R}.$$

2) Gebrochen rationale Funktionen (Polynombrüche)

$$y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen  $n$ -ten bzw.  $m$ -ten Grades  $p_n$  und  $q_m$ . Ist  $n < m$ , heißt  $y$  echt gebrochen rationale Funktion, und ist  $n \geq m$ , heißt  $y$  unecht gebrochen rationale Funktion.

*Bemerkung 3.17.*

Im Ergebnis einer Polynomdivision läßt sich eine unecht gebrochen rationale Funktion immer als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion darstellen.

3) Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}, & \text{ungerade,} \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & D = \mathbb{R}, W = [1, \infty), & \text{gerade,} \\ \tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & D = \mathbb{R}, W = (-1, 1), & \text{ungerade,} \\ \coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, & D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R} \setminus [-1, 1], & \text{ungerade,} \end{aligned}$$

An wichtigen Beziehungen errechnet man

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\ & & 1 - \tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \end{aligned}$$

die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**, z.B. wird mit

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

die Umkehrfunktion der sinus hyperbolicus Funktion  $\sinh x$  bezeichnet. Alle Areafunktionen lassen sich explizit durch Logarithmusfunktionen ausdrücken, z.B. gilt

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Die Funktionskurven der Hyperbelfunktionen und der Areafunktionen sieht man sich am besten im Bronstein/Semendjajew an.

### 3.4 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

#### 3.4.1 Motivation

Wie in vielen anderen Bereichen der Mathematik geht es auch in der Analysis oft um die Lösung von Gleichungen der Art

$$f(x) = 0, \quad (64)$$

wobei die reellwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I = [a, b]$  definiert ist, so daß bei der Lösung der Gleichung (64) alle  $x \in I$  gesucht sind, die die Gleichung erfüllen. Die Lösungen der Gleichungen nennt man sinnvollerweise Nullstellen der Funktion im Intervall  $I$ .

Die Lösung der Gleichung

$$x^4 + x^3 + 1.662x^2 - x - 0.25 = 0$$

hat den praktischen Hintergrund einer Standfestigkeitsberechnung, und es sind Lösungen aus dem Intervall  $I = [0, 1]$  gefragt. Es geht also um Nullstellen der Funktion  $p_4(x) = x^4 + x^3 + 1.662x^2 - x - 0.25$  im Intervall  $[0, 1]$ . Es ist naheliegend durch Probieren eine Idee über den Charakter der Funktion zu erhalten, z.B. sieht man sofort, daß

$$p_4(a) = p_4(0) < 0 \quad \text{und} \quad p_4(b) = p_4(1) > 0$$

gilt. Die Frage der Lösbarkeit der Gleichung ist nun gleichbedeutend mit der Frage, ob der Graph der Funktion eine ununterbrochene Linie ist, die im Punkt  $(a, p_4(a))$  unterhalb der  $x$ -Achse beginnt und im Punkt  $(b, p_4(b))$  oberhalb der  $x$ -Achse endet, und somit die  $x$ -Achse schneidet, wie die Anschauung und die Abb. 34 vermuten läßt.

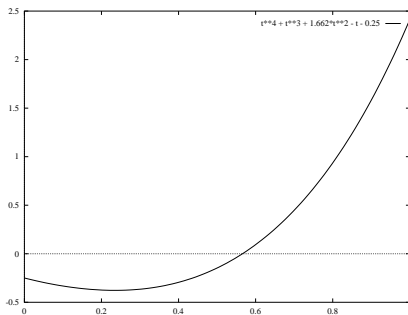


Abbildung 34: Graph der Funktion  $p_4(x)$

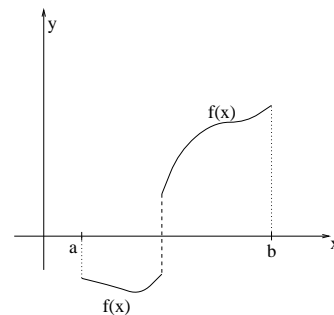


Abbildung 35: Graph einer Funktion, die die  $x$ -Achse überspringt

Die Eigenschaft eines Funktionsgraphen, "ununterbrochen" zu sein, kann man mathematisch mit der Eigenschaft der Stetigkeit einer Funktion beschreiben, was im weiteren genauer diskutiert werden soll.

Man überlegt sich nun den folgenden Algorithmus zur Lösungsberechnung.

- (i) Ist  $p_4(a) < 0$  und  $p_4(b) > 0$ , wie in unserem Beispiel, halbieren wir das Intervall und berechnen  $p_4$  an der Stelle  $c = \frac{a+b}{2}$ , ist  $|p_4(c)| \leq \epsilon$  ( $\epsilon$  eine Genauigkeitsvorgabe, z.B.  $\epsilon = 10^{-5}$ ), sind wir fertig und haben mit  $x = c$  eine Nullstelle mit einer geforderten Genauigkeit gefunden, ist  $|p_4(c)| > \epsilon$  gehen wir zum Punkt (ii),

- (ii) ist  $p_4(c) < 0$ , setzen wir  $a := c$  und  $b := b$  und gehen zum Punkt (i),  
 ist  $p_4(c) > 0$ , setzen wir  $a := a$  und  $b := c$  und gehen zum Punkt (i).

Der eben skizzierte Algorithmus heißt INTERVALLHALBIERUNGSVERFAHREN und führt im Falle von "ununterbrochenen" (stetigen) Funktionen stets zu einer Lösung. Mit dem Taschenrechner kommt man nach ein paar Schritten zu einer Lösung  $x = 0.566$ . Es sei hier darauf hingewiesen, daß der beschriebene Algorithmus zwar zu einer Lösung führt, allerdings nicht klärt, ob es sich um die einzige Lösung handelt.

Springt die Funktion, ohne die  $x$ -Achse zu schneiden (Abb. 35), funktioniert der eben skizzierte Algorithmus nicht.

Ein weiteres Motiv, sich mit dem Begriff bzw. der Eigenschaft der Stetigkeit von Funktionen zu befassen, besteht in der Möglichkeit eine vorgegebene Genauigkeit für die Berechnung eines Funktionswertes in Abhängigkeit vom Argument der Funktion zu erzielen. Dieser Sachverhalt soll an einem Beispiel diskutiert werden.

Zwischen der Temperatur  $\theta$  einer medizinischen Hyperthermiesonde und dem Widerstand  $\Omega$  einer Spule besteht ein funktionaler Zusammenhang. Um eine gewünschte Temperatur  $\theta_0$  mit einer Toleranz  $\epsilon$  ( $\theta = \theta_0 \pm \epsilon$ ) zu erzielen, ist die Frage zu klären, ob man zu der vorgegebenen Toleranz  $\epsilon$  einen Widerstandsbereich  $\Omega = \Omega_0 \pm \delta$  angeben kann, so daß bei der Einstellung des Widerstandsreglers mit der Genauigkeit  $\delta$  um den Wert  $\Omega_0$  die resultierende Temperatur der Hyperthermiesonde mit Sicherheit in dem Intervall  $(\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon)$  liegt.

Die Frage kann immer dann positiv beantwortet werden, wenn die Funktion  $\theta = f(\Omega)$  stetig ist. Sei der funktionale Zusammenhang in der Form

$$\theta = f(\Omega) = 3\sqrt{\Omega}$$

gegeben (Temperaturen in Grad und Widerstände in Ohm). Wir verwenden einen Regelbereich von 100 Ohm bis 200 Ohm, damit hat  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  den Definitionsbereich  $D = [100, 200]$ . Wir wollen eine Temperatur von  $41^\circ$  mit einer Genauigkeit  $\epsilon = 0.1^\circ$  erreichen, und wollen ausrechnen, wie genau der Widerstandsregler eingestellt werden muß. Zuerst errechnen wir den Wert  $\Omega_0$  mit  $\theta(\Omega_0) = 41$  und finden

$$41 = 3\sqrt{\Omega_0} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_0 = \left(\frac{41}{3}\right)^2 = \frac{1681}{9} = 186.7777\dots$$

Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt

$$\Omega - \Omega_0 = (\sqrt{\Omega} - \sqrt{\Omega_0})(\sqrt{\Omega} + \sqrt{\Omega_0}) \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\Omega} - \sqrt{\Omega_0} = \frac{\Omega - \Omega_0}{\sqrt{\Omega} + \sqrt{\Omega_0}}.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|f(\Omega) - f(\Omega_0)| = 3 \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{\sqrt{\Omega} + \sqrt{\Omega_0}} \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{100}} |\Omega - \Omega_0|,$$

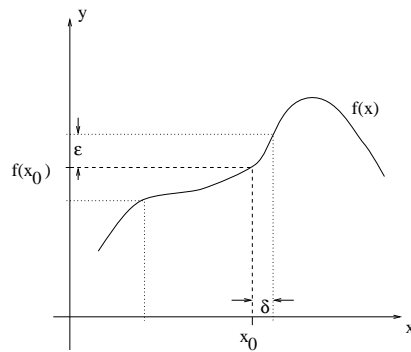
da  $\sqrt{\Omega} + \sqrt{\Omega_0}$  im Falle des vorliegenden Definitionsbereiches immer größer als  $2\sqrt{100}$  ist. Aus der Ungleichung folgt, daß  $|f(\Omega) - f(\Omega_0)| \leq 0.1$  dann gilt, wenn

$$|\Omega - \Omega_0| \leq 0.1 \frac{20}{3} \quad \text{bzw.} \quad |\Omega - \Omega_0| \leq \frac{2}{3}$$

gilt. Wir müssen also den Wert  $\Omega_0 = 186.7777$  Ohm mit einer Genauigkeit von 0.6666 Ohm einstellen, um die  $41^\circ$  mit einer Genauigkeit von  $0.1^\circ$  zu garantieren.

Es ist offensichtlich, daß die eben durchgeführte Betrachtung im Falle einer Funktion mit einer Sprungstelle, wie in Abb. 35 dargestellt, für die Sprungstelle  $x_0$  nicht zum Erfolg geführt hätte.

Generell ist anzumerken, daß die eben diskutierte Eigenschaft (in der Abb. 36 illustriert),

Abbildung 36:  $\epsilon - \delta$ -Betrachtung an der Stelle  $x_0$ 

daß man für jedes vorgegebenes Genauigkeitsintervall  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , ein Intervall  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , angeben kann, so daß für  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  in jedem Fall  $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  folgt,

gerade die Stetigkeit der Funktion bedeutet.

Im folgenden wollen wir die eben durchgeführten Überlegungen zur Stetigkeit mathematisch beschreiben.

### 3.4.2 Definition des Grenzwertes einer Funktion

Bei den obigen Betrachtungen haben wir mit den Intervallen  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  und  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ , also Umgebungen von  $x_0$  bzw.  $f(x_0)$ , operiert.

#### Definition 3.18.

Sei  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , und  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dann heißt

$$U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$\delta$ -Umgebung von  $x_0$ .

#### Bemerkung 3.19.

Unter Nutzung der Definition 3.18 können wir das Intervall  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  auch als  $\epsilon$ -Umgebung von  $f(x_0)$ , also  $U_\epsilon(f(x_0))$  interpretieren.

#### Definition 3.20.

Sei  $D \subset \mathbb{R}$ , dann heißt  $D$  offene Menge in  $\mathbb{R}$ , wenn zu jedem Element  $x \in D$  ein  $\delta > 0$  gefunden werden kann, so daß  $U_\delta(x) \subset D$  gilt.

$x \in D$  heißt innerer Punkt der Menge  $D$ , wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß  $U_\delta(x) \subset D$  gilt. Elemente  $x \in D$ , die nicht innere Punkte der Menge  $D$  sind und in jeder Umgebung  $U_\delta(x)$  mindestens ein  $\bar{x} \in D$  und ein  $\bar{x} \notin D$  besitzen, heißen Randpunkte der Menge.

#### Definition 3.21.

$a$  heißt Häufungswert (oder Häufungspunkt) der Menge  $D$ , wenn in jeder  $\delta$ -Umgebung von  $a$  mindestens ein  $x \neq a$ ,  $x \in D$  existiert.

#### Bemerkung 3.22.

In der  $\delta$ -Umgebung  $U_\delta(a)$  gibt es unendlich viele  $x \in D$ .

Der Häufungspunkt gehört nicht unbedingt zur Menge  $D$ , denn wenn wir  $D = (0, 1)$  wählen, ist  $a = 0$  offensichtlich ein Häufungspunkt (ebenso wie  $a = 1$ ), gehört aber nicht zu  $D$ .

Beispiele:

- 1)  $D = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$  hat nur den Häufungspunkt  $a = 0$ .
- 2) Ist  $D = [0, 3]$ , so ist jedes Element  $a \in D$  Häufungspunkt von  $D$ .
- 3) Ist  $D = (0, 1]$ , so ist die Menge der Häufungspunkte von  $D$  gleich dem Intervall  $[0, 1]$  (siehe auch obige Bemerkung).
- 4)  $D = (0, 2)$  ist eine offene Menge in  $\mathbb{R}$ . Alle Punkte  $x$  aus  $(0, 2)$  sind innere Punkte.
- 5) Die offenen Intervalle bzw. die Vereinigung offener Intervalle sind sämtlich offene Mengen in  $\mathbb{R}$ .
- 6)  $x = 2$  ist Randpunkt der Menge  $D = (0, 2]$ .

**Definition 3.23.**

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $a$  ein Häufungspunkt von  $D$ , dann strebt  $f(x)$  für  $x \rightarrow a$  gegen  $\alpha$ , wenn zu jeder Zahl  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so daß für alle  $x \in D \cap U_\delta(a)$ ,  $x \neq a$ ,

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

gilt.  $g$  heißt Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  und wird durch

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

bezeichnet.

$a$  muß kein Element von  $D$  sein, und  $g$  muß nicht Element des Wertebereichs der Funktion  $f$  oder Häufungspunkt des Wertebereichs von  $f$  sein.

Die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 2, \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$  hat an der Stelle  $a = 2$  offensichtlich den Grenzwert  $g = 1$ .

Weitere Beispiele von Grenzwerten von Funktionen:

- 1) Sei  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ . Der Grenzwert der Funktion an der Stelle  $x = 0$  existiert und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

denn man erhält

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

und damit kann man für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , nämlich  $\delta = \epsilon$  angeben, so daß aus  $|x| < \delta$  die Beziehung  $|f(x)| < \epsilon$  sofort folgt.

- 2) Sei  $g : [1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = g(x) = x^2$ . Der Grenzwert an der Stelle  $x = 2$  existiert und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4.$$

Es ist zu zeigen

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta > 0 : |x - 2| < \delta \rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon,$$

für ein vorgegebenes  $\epsilon$  ist ein  $\delta$  mit der geforderten Eigenschaft zu berechnen/konstruieren. Es gilt

$$|x^2 - 4| < \epsilon \iff -\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon \iff -\epsilon < (x - 2)(x + 2) < \epsilon.$$

Wegen des Definitionsbereiches  $[1, 10]$  ist  $x + 2$  positiv und damit ergibt sich

$$-\frac{\epsilon}{x + 2} < x - 2 < \frac{\epsilon}{x + 2} \quad \text{bzw.} \quad |x - 2| < \frac{\epsilon}{x + 2}.$$

Damit kann man durch die Wahl von  $\delta = \frac{\epsilon}{10+2} = \frac{\epsilon}{12}$  in jedem Fall  $|x^2 - 4| < \epsilon$  erfüllen.

**Definition 3.24.**

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $a$  ein Häufungspunkt von  $D$ , dann strebt  $f(x)$  für  $x \rightarrow a$  von links (von rechts) gegen  $g$ , wenn zu jeder Zahl  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so daß für alle  $x \in D \cap U_\delta(a)$ ,  $x < a$  ( $x > a$ ),

$$|f(x) - g| < \epsilon$$

gilt.  $g$  heißt linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  und wird durch

$$g = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad (g = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x))$$

bezeichnet.

**Satz 3.25.**

*Der Grenzwert der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x = a$  existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.*

Beispiel:

Mit  $[x]$  bezeichnet man die sogenannte entier-Funktion,

$$[x] = p,$$

wobei  $p$  die größte ganze Zahl mit  $p \leq x$  ist. Man findet mit

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = 1$$

unterschiedliche links- und rechtsseitige Grenzwerte an der Stelle  $x = 1$ . Damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} [x]$$

nicht.

*Bemerkung 3.26.*

Die Definition für  $\lim_{x \rightarrow a} = g$  ist zu modifizieren, wenn  $a$  und/oder  $g$  gleich  $\infty$  oder  $-\infty$  sind. Statt

$$|x - a| < \delta \quad \text{ist} \quad x > \Delta \quad \text{zu betrachten} \quad (x \rightarrow \infty), \quad \text{statt}$$

$$|x - a| < \delta \quad \text{ist} \quad x < -\Delta \quad \text{zu betrachten} \quad (x \rightarrow -\infty), \quad \text{statt}$$



$|f(x) - g| < \epsilon$  ist  $f(x) > \Psi$  zu betrachten ( $g = \infty$ ), statt

$|f(x) - g| < \epsilon$  ist  $f(x) < -\Psi$  zu betrachten ( $g = -\infty$ ).

Z.B. wollen wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

untersuchen. Wir vermuten, daß die Funktion für  $x$  gegen  $\infty$  den Grenzwert  $g = 0$  hat, d.h., wir müssen zeigen

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 : x > \Delta \implies \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon.$$

Der Nachweis, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ist, sollte zur Übung von der/dem interessierten Studentin/en erbracht werden.

Ist  $g = \infty$  oder  $g = -\infty$ , spricht man von **uneigentlichen** Grenzwerten (die Funktion strebt gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$ ).

Die Beschränktheit einer Funktion ist keine Garantie für die Existenz des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle  $x = a$ , wie das Beispiel mit der entier-Funktion  $[ ] : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x = 1$  gezeigt hat. Auch im Falle der sinus-Funktion existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  nicht.

Andererseits können bei unbeschränkten Funktionen Grenzwerte existieren, z.B. gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty.$$

**Satz 3.27.** (Grenzwertsätze)

*Es werden jeweils Grenzwerte für einen der Fälle*

$$x \rightarrow a, \quad x \rightarrow a + 0, \quad x \rightarrow a - 0,$$

$$x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty$$

*betrachtet. Es gelten die Regeln*

1)

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g,$$

2)

$$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g,$$

3)

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad \text{falls} \quad \lim g \neq 0,$$

4)

$$f \leq g \implies \lim f \leq \lim g,$$

5)

$$f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = y \implies \lim g = y.$$

Die Regeln 1) bis 5) gelten auch für uneigentliche Grenzwerte, wobei Unbestimmtheiten der Form " $\infty - \infty$ " in 1), " $0 \cdot \infty$ " in 2) und " $\frac{\infty}{\infty}$ " in 3) ausgeschlossen werden, und die "Rechenregeln"

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \pm\infty = \pm\infty, \quad \frac{0}{\pm\infty} = 0,$$

verabredet werden.

*Bemerkung 3.28.*

Wird in Regel 3) die Voraussetzung  $g \neq 0$  fallen gelassen, ist mit " $\frac{0}{0}$ " eine weitere Unbestimmtheit möglich.

Im Falle des Auftretens von Unbestimmtheiten sind die Grenzwertsätze nicht anwendbar und es werden Sonderbetrachtungen erforderlich.

Bei dem Beispiel  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  tritt für  $x \rightarrow 0$  der Fall " $\frac{0}{0}$ " auf. Aus der Abbildung 37 erhält man die Beziehungen

$$A_{\Delta 0PQ} < A_{\text{Sektor}} < A_{\Delta 0PR} \quad \text{und damit}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x}{2} \quad \text{bzw. nach Division durch } \frac{\sin x}{2}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Nach der Regel 5), also dem sogenannten Einschachtelungssatz, folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{und damit nach Regel 3)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

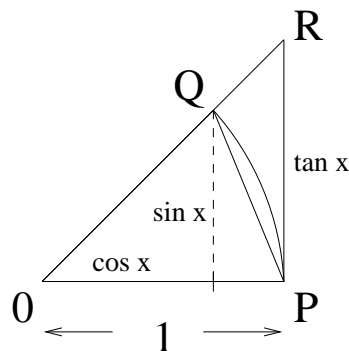


Abbildung 37: Skizze zur Grenzwertbetrachtung  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x}$

### 3.4.3 Grenzwertberechnung und unendlich kleine und unendlich große Größen

Bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen treten oft Unbestimmtheiten der Art " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " auf, wie auch im eben behandelten Beispiel bei der Bestimmung von  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x}$ , da getrennt betrachtet sowohl der Zähler  $\sin x$  als auch der Nenner  $x$  für  $x \rightarrow 0$  gegen 0 streben. Entscheidend für die evtl. Existenz eines endlichen Grenzwertes ist die "Geschwindigkeit", mit der Zähler und Nenner im Verlaufe des Grenzprozesses  $x \rightarrow 0$  gegen 0 streben. Wenn der Zähler schneller oder höchstens mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 strebt, ist ein endlicher Grenzwert zu erwarten, anderenfalls nicht.

#### Definition 3.29.

Eine von  $x$  abhängige Variable  $y = f(x)$  (arithmetischer Ausdruck, Funktion,...), deren Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  gleich 0 (gleich  $\pm\infty$ ) ist, heißt unendlich kleine (unendlich große) Größe in der Umgebung von  $a$ .

Beispiele für unendlich kleine Größen sind  $\tan x$  für  $x \rightarrow 0$  und  $e^{-x}$  für  $x \rightarrow \infty$ , sowie  $f(x) - g$  für  $x \rightarrow a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$  gilt.

Beispiele für unendlich große Größen sind  $\tan x$  für  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$  und  $\frac{1}{x^2}$  für  $x \rightarrow 0$ .

#### Satz 3.30. (Eigenschaften unendlich kleiner/großer Größen)

Für die unendlich kleinen Größen  $\alpha$  und  $\beta$  bzw. die unendlich großen Größen  $\Psi$  und  $\Omega$  gilt im gleichen Grenzprozeß

- a)  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  sind unendlich kleine Größen,
- b)  $\alpha \cdot \beta, c \alpha$  sind unendlich kleine Größen, wobei  $c$  eine von Null verschiedene reelle Konstante ist,
- c)  $\frac{1}{\Psi}$  ist eine unendlich kleine Größe,
- d)  $\frac{1}{\alpha}$  ist eine unendlich große Größe,
- e)  $\Psi + c$  ist eine unendlich große Größe,
- f)  $\Psi \cdot \Omega > 0 \implies \Psi + \Omega$  ist eine unendlich große Größe,
- g)  $\Psi \cdot \Omega$  ist eine unendlich große Größe,
- h)  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\Psi}{\Omega}$  sind unbestimmte Größen, und falls  $\Psi \cdot \Omega < 0$  bzw.  $\Psi \cdot \Omega > 0$  gilt, ist  $\Psi - \Omega$  eine unbestimmte Größe.

#### Definition 3.31. (Ordnung von unendlich kleinen Größen)

- 1) Gilt für die unendlich kleinen Größen  $\alpha$  und  $\beta$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

dann ist  $\alpha$  von höherer Ordnung unendlich klein als  $\beta$  ( $\alpha = o(\beta)$ ).

2) Gilt für die unendlich kleinen Größen  $\alpha$  und  $\beta$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \pm\infty,$$

dann ist  $\alpha$  von niederer Ordnung unendlich klein als  $\beta$  ( $\beta = o(\alpha)$ ).

3) Gilt für die unendlich kleinen Größen  $\alpha$  und  $\beta$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \text{const.} \neq 0,$$

dann sind  $\alpha$  und  $\beta$  von gleicher Ordnung unendlich klein ( $\beta = O(\alpha)$ ). Ist  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$  nennt man  $\alpha$  und  $\beta$  äquivalente unendlich kleine Größen ( $\alpha \sim \beta$ ).

Gilt  $\alpha = O(\beta^n)$ , ist  $\alpha$  von  $n$ -ter Ordnung bezügl.  $\beta$ .

Beispiele:

1) Wie weiter oben diskutiert, gilt  $\sin x \sim x$  für  $x \rightarrow 0$ . Ebenso findet man  $\tan x \sim x$  für  $x \rightarrow 0$ , da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$  ist.

2) Für  $\alpha = 2h^2$  gilt  $\alpha = O(h^2)$ , d.h.,  $\alpha$  strebt mit  $h \rightarrow 0$  quadratisch oder von 2. Ordnung gegen 0.

3) Für  $x \rightarrow \infty$  gilt  $1 + \frac{2}{x} = O(\frac{3x^2+5}{x^2})$ , denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{3x^2+5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

4) Für  $x \rightarrow 0$  gilt  $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}$ , da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

**Satz 3.32.** (Eigenschaften äquivalenter unendlich kleiner Größen)

1)

$$\alpha \sim \beta \iff \beta \sim \alpha,$$

2)

$$\alpha \sim -\beta \implies \alpha + \beta = o(\alpha), \text{ denn } \lim \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \lim(1 - (\frac{-\beta}{\alpha})).$$

3)

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha = \beta + \gamma \wedge \gamma = o(\alpha),$$

4) Ist  $f$  eine elementare Funktion, so gilt

$$\alpha \sim \beta \implies \lim f(\alpha) = \lim f(\beta), \quad \text{und}$$

$$\lim f(\alpha) = 0 \wedge \alpha \sim \beta \implies f(\alpha) \sim f(\beta).$$

Die im Satz 3.32 notierten Eigenschaften wollen wir anhand der folgenden Beispiele erläutern.

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x} + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x} + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\frac{3}{10}} = 0.$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - x^2) \tan(x^3 + \sin^2(\sqrt{x^3} + x^2))}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^3 + \sin^2(\sqrt{x^3} + x^2))}{\sin x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin^2(\sqrt{x^3} + x^2)}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin^2(\sqrt{x^3} + x^2)}{x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + (\sqrt{x^3} + x^2)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^3}{x^3} = 2.$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x - 2)(x + 2)}{\sqrt{x} - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{x - 2}(x + 2) = 0.$$

*Bemerkung 3.33.*

Beim Operieren mit unendlich großen Größen kehren sich im Unterschied zum Operieren mit unendlich kleinen Größen jeweils die Begriffe "von niederer Ordnung" und "von höherer Ordnung" um. Wenn  $\Psi$  und  $\Omega$  unendlich große Größen sind, so ergibt sich demnach

a)

$$\lim \frac{\Psi}{\Omega} = 0 \iff \Psi = o(\Omega).$$

b)

$$\lim \frac{\Psi}{\Omega} = \pm\infty \iff \Omega = o(\Psi).$$

c)

$$\lim \frac{\Psi}{\Omega} = \text{const.} \neq 0 \iff \Psi = O(\Omega),$$

$\Psi$  und  $\Omega$  sind von gleicher Ordnung, und falls  $\lim \frac{\Psi}{\Omega} = 1$  gilt, nennt man  $\Psi$  und  $\Omega$  äquivalent ( $\Psi \sim \Omega$ ).

Beispiele:

1) Für  $x \rightarrow \infty$  gilt

$$x^3 + 5x^5 - 6x^7 \sim -6x^7.$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + x^5 \right) \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1.$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left( x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left( \frac{2x}{|x|} + 2 \right) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \left( x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left( \frac{2x}{|x|} + 2 \right) = 4.$$

### 3.4.4 Folgen reeller Zahlen

Bevor wir uns mit Stetigkeitsbetrachtungen befassen, führen wir den wichtigen Begriff der reellen Zahlenfolge ein.

#### Definition 3.34.

Eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_n = f(n)$ , die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt unendliche Zahlenfolge und wird auch mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder auch kurz mit  $(a_n)$  bezeichnet.  $a_n$  heißt das  $n$ -te Glied der unendlichen Zahlenfolge.

Bildet  $f$  nur jede natürliche Zahl zwischen 1 und  $N$  in die Menge der reellen Zahlen ab ( $f : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ ), so erhält man eine endliche Folge.

Da es sich bei dem Bildbereich einer unendlichen reellen Zahlenfolge (wir verwenden abkürzend die Bezeichnung "Folge") um eine Menge handelt, kann die Menge auch Häufungspunkte haben. Z.B. hat die Folge  $(a_n) := \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$  den Häufungspunkt 1, und die Folge  $(a_n) := \{(-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$  die Häufungspunkte 1 und -1. Da wir uns in einem späteren Kapitel der "Höheren Mathematik für Ingenieure" noch ausführlicher mit Folgen (und Reihen) befassen werden, sollen an dieser Stelle nur einige für die Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen nützliche Eigenschaften von Folgen kurz behandelt werden.

#### Definition 3.35. (Nullfolge)

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Nullfolge, wenn man zu jedem beliebigen  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  finden kann, so daß

$$|a_n| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall sagt man auch  $(a_n)$  konvergiert oder strebt gegen Null und beschreibt dies durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Folge  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  ist offensichtlich eine Nullfolge, denn für eine Zahl  $\epsilon > 0$  findet man mit  $n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$  eine Zahl, so daß  $\frac{1}{n} < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

**Lemma 3.36.**

a) Ist  $(a_n)$  eine Nullfolge und gilt für eine Folge  $(b_n)$

$$|b_n| \leq |a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist auch  $(b_n)$  eine Nullfolge.

b) Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Nullfolgen, so sind die Folgen

$$(a_n + b_n), \quad (a_n - b_n), \quad (a_n \cdot b_n), \quad (a_n^k), \quad (c a_n)$$

mit den beliebigen Konstanten  $k \in \mathbb{N}$  und  $c \in \mathbb{R}$  ebenfalls Nullfolgen.

*Beweis.*

a) Da  $(a_n)$  Nullfolge ist, findet man zu jedem  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|a_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Da  $|b_n| \leq |a_n|$  gelten soll, findet man also auch zu jedem  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|b_n| \leq |a_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

b)  $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind Nullfolgen, d.h., zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein Index  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_1$ , bzw. ein Index  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_2$ . Wenn wir nun  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  setzen, erhalten wir

$$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

d.h.,  $(a_n + b_n)$  und  $(a_n - b_n)$  sind Nullfolgen. Man findet nun, daß mit  $(a_n)$  auch  $(a_n + a_n)$ ,  $(a_n + a_n + a_n)$  und  $(m a_n)$  mit einer beliebigen Konstante  $m \in \mathbb{N}$  Nullfolgen sind. Betrachten wir nun irgendein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq |c|$ . Damit ist auch  $|c a_n| \leq m a_n$  und aus a) folgt  $(c a_n)$  ist Nullfolge, da  $(m a_n)$  Nullfolge ist.

Wir folgern daraus, daß  $(a_n \cdot b_n)$  Nullfolge ist. Man findet ein  $c > 0$  mit  $|a_n| < c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nun ist  $(c b_n)$  Nullfolge und es gilt  $|a_n \cdot b_n| \leq |c b_n|$ . Aus a) folgt  $(a_n \cdot b_n)$  ist Nullfolge.

Damit ist  $(a_n \cdot a_n)$ ,  $(a_n \cdot a_n \cdot a_n)$  und schließlich  $(a_n^k)$  für festes  $k \in \mathbb{N}$  Nullfolge.  $\square$

*Bemerkung 3.37.*

Mit dem wichtigen Hilfssatz 3.36 erkennt man nun sofort, daß

$$\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right), \quad \left(c \cdot \frac{1}{n}\right), \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

Nullfolgen sind.

Die geometrische Folge

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$$

ist eine Nullfolge, wenn  $|q| < 1$  ist. Zum Nachweis definiert man durch

$$1 + h = \frac{1}{|q|}$$

eine Zahl  $h > 0$ . Mit der BERNOULLISCHEN Ungleichung  $(1 + h)^n \geq 1 + nh$  folgt nun

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh}.$$

Da  $\left(\frac{1}{nh}\right)$  nach Hilfssatz 3.36 eine Nullfolge ist, ist auch  $(q^n)$  eine Nullfolge.

**Definition 3.38.** (Grenzwert einer Folge)

Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl  $a$ , wenn

$$(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Nullfolge ist.

$a$  heißt Grenzwert oder LIMES der Folge  $(a_n)$ . Man beschreibt dies durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Definition 3.39.** (Cauchy-Folge)

Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heißt CAUCHY-Folge, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

**Korollar 3.40.**

CAUCHY-Folgen reeller Zahlen sind konvergent.

**Korollar 3.41.**

Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann gegen  $a$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß für alle  $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

*Bemerkung 3.42.*

Aufgrund der Definition des Häufungspunktes einer Menge  $D$  kann man zu jedem Häufungspunkt  $b$  eine Folge  $(a_n) \subset D$  konstruieren, die  $b$  als Grenzwert hat.

Denn man findet für alle  $\epsilon > 0$  immer ein  $a \in D$  mit  $|a - b| < \epsilon$ . Wählt man nun  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ , so findet man für alle  $n \in \mathbb{N}$  jeweils ein  $a_n \in D$  mit  $|a_n - b| < \epsilon_n = \frac{1}{n}$ . Damit ist  $(a_n - b)$  eine Nullfolge und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ .

Andererseits erkennt man, daß der Grenzwert einer konvergenten Folge ein Häufungspunkt ebendieser Folge ist.

**Definition 3.43.**

Wenn es für die Folge  $(a_n)$  ein beschränktes Intervall  $[A, B] \subset \mathbb{R}$  mit

$$A \leq a_n \leq B \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gibt, heißt die Folge  $(a_n)$  beschränkt.

$A$  heißt untere Schranke der Folge. Das größte mögliche  $A$  heißt größte untere Schranke oder das Infimum der Folge  $(a_n)$  und wird durch  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$  bezeichnet.

$B$  heißt obere Schranke der Folge. Das kleinste mögliche  $B$  heißt kleinste obere Schranke oder das Supremum der Folge  $(a_n)$  und wird durch  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$  bezeichnet.

**Definition 3.44.**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt monoton steigend, wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt, und monoton fallend, wenn

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt. Gelten die echten kleiner ( $<$ ) oder größer ( $>$ ) Beziehungen, spricht man von strenger Monotonie.



**Definition 3.45.**

Als Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet man jede Folge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots, \quad \text{kurz } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

mit  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  ( $n_k \in \mathbb{N}$ ).

Betrachten wir die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$ , dann ist die Folge  $(a_{2n})$  eine Teilfolge, die nur aus jedem zweiten Folgenglied von  $(a_n)$  besteht.

Aus der harmonischen Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad \text{kann man z.B. die Teilfolge } 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

bilden.

**Korollar 3.46.**

Konvergiert die Folge  $(a_n)$  gegen  $a$ , so konvergiert auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  gegen  $a$ .

**Satz 3.47.** (Eigenschaften beschränkter Folgen, BOLZANO-WEIERSTRASS)

- a) Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.
- b) Jede beschränkte monotone Zahlenfolge konvergiert.

Bemerkung 3.48.

- 1) Wenn wir die oben angesprochene Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  betrachten, ist  $(a_n)$  beschränkt, denn es gilt  $-1 \leq a_n \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hier findet man mit  $(a_{2n})$  oder  $(a_{2n+1})$  sehr leicht Teilfolgen von  $(a_n)$  die gegen 1 bzw.  $-1$  konvergieren.
- 2) Die Folge mit den Gliedern

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ist offensichtlich streng monoton steigend.  $(a_n)$  ist auch beschränkt, denn es gilt

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

damit findet man mit Hilfe der geometrischen Summenformel<sup>12</sup>

$$a_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

3 ist also eine obere Schranke der Folge. Andererseits ist 1 eine untere Schranke von  $(a_n)$ . Nach Satz 3.47 konvergiert die Folge. Der Grenzwert der Folge ergibt sich (im Rahmen der Genauigkeit eines Taschenrechners) zu

$$e = 2,71828183$$

und wird EULERSche Zahl  $e$  genannt.

<sup>12</sup>Die Formel lautet  $\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ ,  $q \neq 1$ , und kann als Übung durch vollständige Induktion bewiesen werden (falls das noch nicht passiert ist).

### 3.4.5 Definition der Exponentialfunktion\*

Der Stern zeigt an, daß dieser Abschnitt einen fakultativen Charakter hat, trotzdem aber interessant und wichtig ist.

Bisher haben wir die Exponentialfunktion  $y = e^x$  bzw. allgemeiner  $y = f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  als durch "den Taschenrechner gegeben" verwendet, denn  $f(x)$  ist ja nur für rationale  $x$  erklärt. Um  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = \mathbb{R}$  zu erklären, muß  $f(x) = a^x$  auch für irrationale Argumente sinnvoll erklärt werden.

Dazu wollen wir die Ergebnisse des vorangehenden Kapitels über die Konvergenz monotoner Folgen verwenden. Zuerst betrachten wir den Fall  $a > 1$  und zeigen die strenge Monotonie von  $f$  auf der Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , denn sind  $x_1, x_2$  rationale Zahlen mit  $x_1 > x_2$  so kann man sie auf den Hauptnenner bringen, d.h., es gibt ganze Zahlen  $p, q, m$  mit

$$x_1 = \frac{p}{m}, \quad x_2 = \frac{q}{m} \quad (m \neq 0, p > q).$$

Damit erhält man

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} = a^{\frac{p-q}{m}} = \sqrt[m]{a^{p-q}}.$$

Es ist  $\sqrt[m]{a} > 1$ , denn aus  $\sqrt[m]{a} \leq 1$  folgt im Widerspruch zur Voraussetzung  $a \leq 1^m = 1$ . Wegen  $p > q$  gilt  $\sqrt[m]{a^{p-q}} > 1$ , und damit folgt  $f(x_1) > f(x_2)$ , also ist  $f$  streng monoton steigend.

Im Fall  $0 < a < 1$  ist  $f(x) = a^x$  für rationale  $x$  streng monoton fallend, wegen der Beziehung  $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$  mit  $\frac{1}{a} > 1$ . Im Fall  $a = 1$  ist  $f(x) = a^x = 1$ , also konstant.

#### Definition 3.49.

Ist  $a > 0$  eine reelle Zahl und  $x$  eine irrationale Zahl mit der Dezimaldarstellung

$$x = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_n \dots$$

( $z_0$  ganz,  $z_1, z_2, z_3, \dots$  Ziffern<sup>13</sup>), so definieren wir daraus die Folge der rationalen Zahlen

$$\begin{aligned} r_0 &= z_0 \\ r_1 &= z_0, z_1 \\ r_2 &= z_0, z_1 z_2 \\ r_3 &= z_0, z_1 z_2 z_3 \\ &\vdots \\ r_n &= z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_n \end{aligned}$$

und definieren

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}. \tag{65}$$

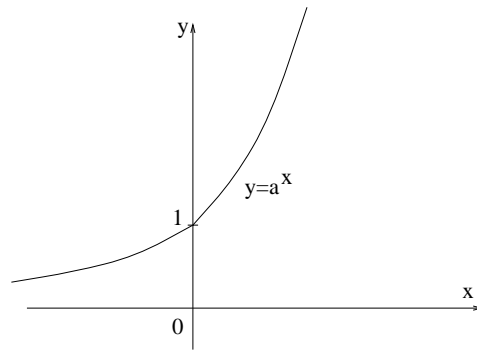
Damit ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  für alle reellen Zahlen  $x$  erklärt. Man nennt die Funktion  $f$  Exponentialfunktion zur Basis  $a$ .

#### Bemerkung 3.50.

Der Limes (65) existiert und ist endlich, denn die Folge  $(a_{r_n})$  konvergiert, da sie monoton und beschränkt ist. Die Monotonie folgt aus der Monotonie der Folge  $(r_n)$ . Die Beschränktheit ist ebenso offensichtlich, denn es gilt

$$a^{r_0-1} < a^{r_n} < a^{r_0+1}.$$

<sup>13</sup>Unter einer Ziffer  $z$  verstehen wir ein Element der Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Abbildung 38: Verlauf der Exponentialfunktion zur Basis  $a = 2$ 

Mit der eben durchgeführten Betrachtung, haben wir indirekt auch die Logarithmusfunktion  $y = \log_a x$  eingeführt, denn die Logarithmusfunktion wird als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion erklärt.

### 3.4.6 Stetigkeit

Mit den Begriffen des Grenzwertes einer Funktion und des Grenzwertes von Folgen können wir nun die Stetigkeit definieren.

**Definition 3.51.** (Stetigkeit in einem Punkt  $x_0$ )

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist linksseitig stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist rechtsseitig stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

**Definition 3.52.**

Sei  $D$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f$  heißt auf  $D$  stetig, wenn für alle  $x_0 \in D$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sei  $I$  ein Intervall aus  $\mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt die Funktion  $f$  auf  $I$  stetig, wenn sie in jedem inneren Punkt von  $I$  stetig ist und in jedem Randpunkt, der zu  $I$  gehört, einseitig stetig ist.

*Bemerkung 3.53.*

Die Definition 3.51 der Stetigkeit in einem Punkt  $x_0$  bedeutet, daß für alle Folgen  $(x_n) \subset D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

gilt. Dies kann man auch in der Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

schreiben, und wir können uns merken, daß bei der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  das Funktionssymbol  $f$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  vertauscht werden können.

Aufgrund der Stetigkeitsdefinition ist der Nachweis der Stetigkeit gleichbedeutend mit der Grenzwertberechnung von Funktionen.

Äquivalent zu den vorgenommenen Stetigkeitsdefinitionen ist die sogenannte  $\epsilon - \delta$ -Definition.

**Satz 3.54.** (Stetigkeit in einem Punkt  $x_0$ )

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß gilt

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

*Bemerkung 3.55.* (Typ von Unstetigkeitsstellen)

Gilt an einem Punkt  $x_0 \in D$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x),$$

dann ist  $x_0$  eine Unstetigkeitsstelle der Funktion  $f$ . betrachten wir z.B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

so ist  $x_0 = 0$  eine Unstetigkeitsstelle, denn

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

1) Von besonderem Interesse ist das Verhalten von Funktionen beim Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ , wenn die Funktionen an der Stelle  $x_0$  nicht erklärt sind. Z.B. ist die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

nur auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  erklärt. Allerdings gilt, wie weiter oben gezeigt,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Damit kann man die Funktion  $f$  durch

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig erweitern, denn  $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine überall stetige Funktion.

Eine ähnliche Situation liegt vor, wenn an einer Stelle  $x_0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g,$$

allerdings  $f(x_0) \neq g$  ist. In diesem Fall ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht stetig, allerdings kann man durch die Ersatzfunktion

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq x_0 \\ g, & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

die Unstetigkeit beheben. Man spricht dann von einer **hebbaren Unstetigkeitsstelle**  $x_0$ .

2) Hat eine Funktion Sprungstellen, wie z.B. die oben diskutierte entier-Funktion  $y = f(x) = [x]$ , spricht man bei den Sprungstellen von **Unstetigkeitsstellen 1. Art**.

3) Von **Unstetigkeitsstellen 2. Art** spricht man, wenn mindestens einer der einseitigen Grenzwerte nicht existiert oder unendlich ist, wie z.B. im Falle der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle  $x_0 = 0$  (links- und rechtsseitiger Grenzwert ist  $-\infty$  bzw.  $\infty$ , es liegt eine **Unendlichkeitsstelle oder Polstelle** vor), oder im Falle der Funktion  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  an der Stelle  $x_0 = 0$  (links- und rechtsseitiger Grenzwert existiert nicht, es liegt eine **oszillatorische Unstetigkeit** vor).

### 3.5 Eigenschaften stetiger Funktionen

Bei der Diskussion der Lösung einer Gleichung der Form  $f(x) = x^4 + x^3 + 1.662x^2 - x - 0.25 = 0$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  haben wir die folgende Eigenschaft einer stetigen Funktion ausgenutzt.

**Satz 3.56.** (*Nullstellensatz*)

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und haben  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), so besitzt  $f$  in  $(a, b)$  mindestens eine Nullstelle.

*Bemerkung 3.57.*

Der Beweis des Satzes 3.56 wird mit dem oben beschriebenen Intervallhalbierungsverfahren erbracht, indem eine Folge konstruiert wird, die aufgrund der Stetigkeit gegen eine Nullstelle konvergiert.

**Satz 3.58.** (*Zwischenwertsatz*)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\bar{y}$  eine beliebige Zahl zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ , so gibt es mindestens ein  $\bar{x}$  zwischen  $a$  und  $b$  mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

d.h. eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert  $\bar{y}$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

*Bemerkung 3.59.*

Der Zwischenwertsatz ergibt sich aus dem Nullstellensatz, indem man den Nullstellensatz für die Funktion  $g(x) := f(x) - \bar{y}$  anwendet.

Beispiel:

Wir wollen eine Nullstelle des Polynoms  $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}$  im Intervall  $[0, 1]$  bestimmen. Da  $p_3(0) = -\frac{1}{2} < 0$  und  $p_3(1) = \frac{1}{6} > 0$  gilt, können wir aufgrund des Nullstellensatzes auf die Existenz einer Nullstelle aus  $(0, 1)$  schließen.

Für das Intervallhalbierungsverfahren berechnen wir  $p_3(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{24} < 0$ . Jetzt ist das Intervall  $[\frac{1}{2}, 1]$  zu halbieren und  $p_3(\frac{3}{4})$  zu berechnen. Wir erhalten  $p_3(\frac{3}{4}) = \frac{7}{64} > 0$  und müssen damit das Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  halbieren, und  $p_3(\frac{5}{8})$  zu berechnen. Mit diesem Verfahren konstruieren wir eine Folge

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \dots \quad \text{bzw.} \quad 0.5, 0.75, 0.625, \dots$$

die gegen eine Nullstelle des Polynoms  $p_3(x)$  in  $[0, 1]$  strebt. Sinnvollerweise programmiert man dieses Verfahren auf einem Rechner.

**Satz 3.60.** (Regeln für stetige Funktionen)

Sind  $f$  und  $g$  stetig im Punkt  $x_0$ , so sind auch

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{falls } g(x_0) \neq 0)$$

stetig in  $x_0$ .

*Bemerkung 3.61.*

Die Stetigkeit von  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  ergibt sich direkt aus der Stetigkeitsdefinition. Zum Nachweis der Stetigkeit von  $\frac{f}{g}$  benötigt man den folgenden Hilfssatz.

**Lemma 3.62.**

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $x_0$  und gilt  $f(x_0) \neq 0$ , so gibt es eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$ , mit

$$f(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

*Beweis.*

Man wählt  $\epsilon = |f(x_0)|$ . Aufgrund der Stetigkeit existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  die Beziehung  $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon = |f(x_0)|$  gilt.

Aufgrund der Ungleichung  $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$  (auch Vierecksungleichung genannt), gilt nun

$$|f(x_0)| - |f(x)| < \epsilon = |f(x_0)| \quad \text{und damit} \quad -|f(x)| < 0 \quad \text{bzw.} \quad |f(x)| > 0,$$

und damit ist die Behauptung für  $U_\delta(x_0)$  erfüllt.

Betrachtet man nun nur Folgen  $(x_n)$  aus  $U_\delta(x_0)$ , so folgt für  $x_n \rightarrow x_0$  aufgrund der Grenzwertregeln  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ , und damit ist  $\frac{f}{g}$  im Punkt  $x_0$  stetig.  $\square$

**Satz 3.63.**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monotone Funktion und  $I$  ein Intervall, dann gilt

- 1) die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist stetig auf  $W = f(I)$ , und
- 2) ist  $f$  außerdem stetig auf  $I$ , so ist  $W = f(I)$  ein Intervall.

*Bemerkung 3.64.*

Die 1. Behauptung erscheint auf den ersten Blick überraschend, denn es wird nur aus der strengen Monotonie einer möglicherweise nicht stetigen Funktion auf die Stetigkeit der Umkehrfunktion geschlossen. Wenn wir als Beispiel die Funktion

$$f : (0, 5) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

betrachten, so ist  $f$  nicht stetig auf  $I = (0, 5)$ , denn mit  $x = 2$  gibt es offenbar eine Unstetigkeitsstelle. Die Umkehrfunktion rechnet man mit

$$f^{-1} : (0, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

leicht aus und erkennt, daß  $f^{-1}$  auf  $W = f(I) = (0, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$  stetig ist.

**Satz 3.65.**

Wenn  $f : A \rightarrow B$  in  $x_0$  stetig ist, und  $g : B \rightarrow C$  in  $f(x_0)$  stetig ist, dann ist die verkettete Funktion  $g \circ f(x) = g(f(x)) : A \rightarrow C$  stetig in  $x_0$ .

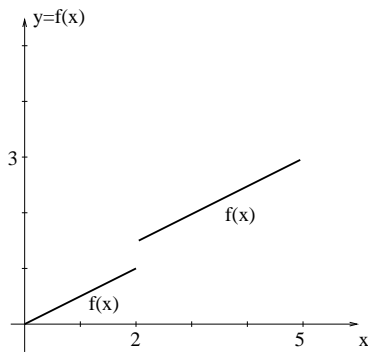


Abbildung 39: Graph der un-  
stetigen, streng monotonen Funktion  
 $f(x)$

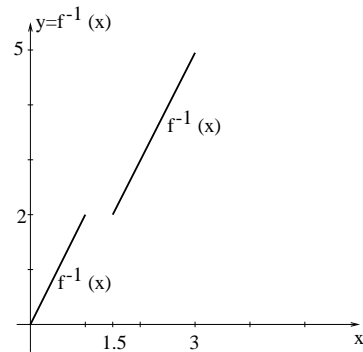


Abbildung 40: Graph der stetigen  
Umkehr-Funktion  $f^{-1}(x)$

**Satz 3.66.**

*Elementare Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sind auf jedem Intervall  $I \subset D$  stetig.*

Wir haben den Begriff der beschränkten Funktion eingeführt, und wissen, daß für jede nach oben beschränkte Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) \leq \sup_{x \in D} f(x),$$

bzw. für nach unten beschränkte Funktionen

$$f(x) \geq \inf_{x \in D} f(x)$$

gilt. Supremum und Infimum müssen nicht angenommen werden, d.h., es muß nicht unbedingt ein  $x_0 \in D$  geben mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x).$$

Z.B. ist die Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  durch 0 nach unten beschränkt und 0 ist auch die größte untere Schranke. Allerdings existiert kein  $x_0 \in (0, \infty)$  mit  $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$ . Gibt es wie im Falle der Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  ein  $x_0$ , nämlich  $x_0 = 0$ , so daß  $f(0) = 0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} |x|$  gilt, so heißt  $f(x_0)$  das Minimum von  $f$  auf dem Definitionsbereich.

**Definition 3.67.**

Gibt es ein  $x_0 \in D$ , so daß  $f(x_0)$  gleich dem Supremum von  $f$  ist, d.h., daß

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt, so heißt  $f(x_0)$  das Maximum von  $f$  und wird mit

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$$

bezeichnet, und  $x_0$  wird eine Maximalstelle von  $f$  genannt.

Gibt es ein  $x_0 \in D$ , so daß  $f(x_0)$  gleich dem Infimum von  $f$  ist, d.h., daß

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt, so heißt  $f(x_0)$  das Minimum von  $f$  und wird mit

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0)$$

bezeichnet, und  $x_0$  wird eine Minimalstelle von  $f$  genannt.

**Definition 3.68.**

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte  $a$  der Menge  $A$  auch Element der Menge sind.

**Definition 3.69.**

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

*Bemerkung 3.70.*

Abgeschlossene Intervalle  $I = [a, b]$  sind kompakte Mengen in  $\mathbb{R}$ , d.h., sie sind beschränkt und abgeschlossen.

**Satz 3.71. (WEIERSTRASS)**

Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt und besitzt sowohl Maximum und Minimum, d.h., es existieren Elemente  $x_0, x_1 \in [a, b]$  mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

*Beweis.*

Der Beweis wird indirekt geführt, also wird angenommen, daß  $f$  nicht nach oben beschränkt ist. Damit kann man zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [a, b]$  finden mit  $f(x_n) > n$ . Da die entstehende Folge  $(x_n)$  aus  $[a, b]$  beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (3.47) eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit einem Grenzwert  $\bar{x}$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}).$$

Wegen  $f(x_{n_k}) > n_k$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty,$$

was ein Widerspruch zur Beschränktheitsvoraussetzung von  $f$  ist, so daß die Annahme falsch war.

Es soll nun die Existenz eines Maximums für  $f$  gezeigt werden. Wegen der Beschränktheit existiert auf jeden Fall das Supremum  $s := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Damit gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  einen Wert  $f(x_n)$  mit  $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$ . Die so entstehende Folge  $(x_n)$  liegt in  $[a, b]$  und im Ergebnis des Grenzübergangs ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s. \tag{66}$$

$(x_n)$  besitzt aufgrund der Beschränktheit eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit einem Grenzwert  $\bar{x}$ , und wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}). \tag{67}$$

Aus den Beziehungen (66) und (67) folgt

$$f(\bar{x}) = s,$$

d.h.,  $\bar{x}$  ist eine Maximalstelle und  $s$  das Maximum von  $f$ .

Der Nachweis der Beschränktheit nach unten und der Existenz eines Minimums erfolgt völlig analog.  $\square$



*Bemerkung 3.72.*

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß der obigen Satz nur für abgeschlossene Intervalle und nicht für offene Intervalle  $(a, b)$  gilt!

Der Satz 3.71 ist die Grundlage für die Behandlung von Extremalproblemen, bei denen nach Maximum oder Minimum gesucht wird. Desweiteren spielt er eine wichtige Rolle bei verschiedenen Beweisen der Infinitesimalrechnung.

Wenn wir uns nun an unsere gewünschte optimale Sitzposition im Theater erinnern, stellen wir fest, daß die Funktion  $f : [0, 8a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3a}{8a-x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{8a-x}\right)$$

- a) eine elementare und damit stetige Funktion ist (für  $x \rightarrow 8a$  definieren wir  $\alpha = 0$ ), und
- b) da auf einem kompakten Intervall definiert, beschränkt ist und Maximum und Minimum annimmt.

Das Minimum wird offensichtlich bei  $x = 8a$  mit  $\alpha = 0$  angenommen. Das Maximum können wir zwar mit den bisherigen Mitteln noch nicht berechnen, wir wissen aber aufgrund des Satzes 3.71 um dessen Existenz.

### 3.6 Gleichmäßige Stetigkeit\*

Bei der Stetigkeit von Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $A \subset D$  ging es darum, daß zu jedem  $x_0 \in A$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft

$$|x - x_0| < \delta \wedge x \in A \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (68)$$

zu finden war, wobei für unterschiedliche  $x_0 \in A$  und  $\epsilon$  auch unterschiedliche  $\delta$  zulässig waren. Man kann das auch durch die Schreibweise  $\delta(x_0, \epsilon)$  unterstreichen. Bei vielen Funktionen gelingt es allerdings für alle  $x \in A$  zu einem vorgegebenen  $\epsilon > 0$  ein von  $x$  unabhängiges  $\delta$  mit der Eigenschaft (68) zu finden. Diese Eigenschaft geht über die bloße Stetigkeit hinaus und spielt bei Beweisen der Infinitesimalrechnung eine Rolle (z.B. beim Nachweis der Integrierbarkeit stetiger Funktionen).

*Bemerkung 3.73.*

Bei der Funktion  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  gelingt die von  $x \in (0, 1]$  unabhängige Wahl eines  $\delta$  für ein vorgegebenes  $\epsilon > 0$  nicht.

Bei der eingangs diskutierten Funktion  $\theta = \theta(\Omega)$  (Hyperthermieregler) gelang es dagegen, ein von  $\Omega \in [100, 200]$  unabhängiges  $\delta$  für ein vorgegebenes  $\epsilon > 0$  zu finden.

**Definition 3.74.** (gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $A \subset D$  gleichmäßig stetig, wenn gilt:

Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß  
für alle  $x_0, x_1 \in A$  mit  $|x_0 - x_1| < \delta$  stets

$$|f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$$

gilt.

$f$  heißt gleichmäßig stetig, wenn  $f$  auf dem gesamten Definitionsbereich  $D$  gleichmäßig stetig ist.

Der Fakt, daß die obige Temperatur-Widerstands-Funktion  $\theta(\Omega)$  auf  $[100, 200]$  gleichmäßig stetig ist, ist kein Zufall, denn es gilt der folgende Satz.

**Satz 3.75.**

*Auf kompakten Mengen sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig.*

*Bemerkung 3.76.*

Wenn, wie es oft der Fall ist, der Definitionsbereich einer Funktion ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  ist, ist die gleichmäßige Stetigkeit bei elementaren, also stetigen Funktionen gesichert. Offene Intervalle als Definitionsbereiche und Polstellen von Funktionen erfordern in jedem Fall eine Überprüfung auf gleichmäßige Stetigkeit.

### 3.7 Differenzierbarkeit von Funktionen

Ein entscheidendes Motiv zur Behandlung der Differenzierbarkeit von Funktionen ist die Bestimmung von Tangenten an Funktionsgraphen. Aus der Abbildung 41 wird ersichtlich, daß an einer Maximalstelle  $x_0$  der Anstieg der Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  gleich Null ist. Zur Bestimmung des Anstiegs der Tangente betrachten wir die folgende Definition.

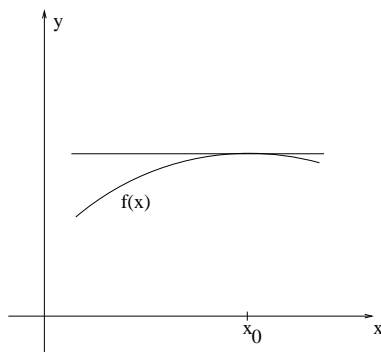


Abbildung 41: Tangente am Funktionsmaximum

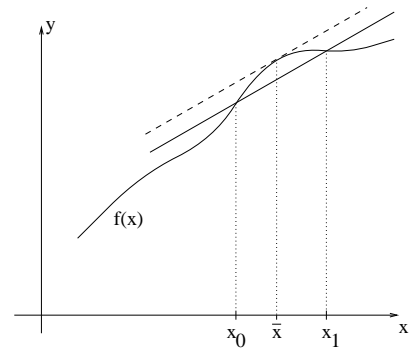


Abbildung 42: Sekante und Differenzenquotient, Tangente

**Definition 3.77.**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $I$  ein Intervall. Als Differenzenquotient von  $f$  bezügl. zweier Punkte  $x$  und  $x_0$  aus  $I$  bezeichnet man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0. \quad (69)$$

**Definition 3.78.**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $I$  ein Intervall oder eine Vereinigung von Intervallen.  $f$  heißt differenzierbar im Punkt  $x_0 \in I$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (70)$$

existiert. Der Grenzwert wird mit  $f'(x_0)$  (oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$ ) bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von  $f$  in  $x_0$  genannt.

*Bemerkung 3.79.*

Geometrisch bedeutet der Differenzenquotient (69) die Steigung der Sekante an  $f$  in  $x$  und  $x_0$  (s.auch Abb. 41).

Der Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$  für den Differenzenquotienten bedeutet, daß  $x$  immer näher an  $x_0$  heranrückt, so daß sich die Sekante an  $f$  der Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  nähert und beim Grenzübergang schließlich erreicht.

Die Tangente kann man mit Hilfe der Ableitung  $f'(x_0)$  durch die Gleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (71)$$

Durch (71) ist die Tangente  $t$  an  $f$  in  $x_0$  definiert. Die Tangente existiert genau dann, wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist. Die Ableitung  $f'(x_0)$  ist gerade der Anstieg der Tangente, bzw. der Tangens des Winkels  $\alpha$ , den die Tangente an  $f$  in  $x_0$  mit der  $x$ -Achse bildet.

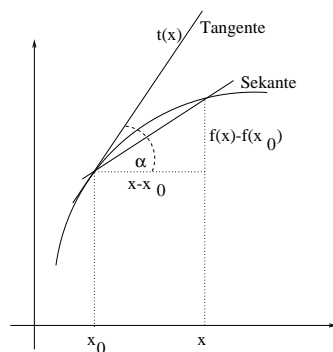


Abbildung 43: Sekante und Tangente an  $f$  in  $x_0$

Beispiel:

Es soll die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^3$  an der Stelle  $x_0$  berechnet werden. Für den Differenzenquotienten erhält man

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x}.$$

Damit ergibt sich für die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2.$$

An Randpunkten von Intervallen  $I = [a, b]$  kann man nur rechts- bzw. linksseitige Grenzwerte betrachten. Wir definieren deshalb die einseitige Differenzierbarkeit.

**Definition 3.80.**

Ist  $\Delta y = x_0 + \Delta x$  und existiert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dann heißt die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0$  rechts- bzw. linksseitig differenzierbar.

*Bemerkung 3.81.*

Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Punkt  $x_0$  differenzierbar, wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  existieren und gleich sind.

**Definition 3.82.** (Differenzierbarkeit auf  $I \subset D$ )

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf dem Intervall  $I \subset D$  differenzierbar, wenn  $f$  in jedem inneren Punkt von  $I$  differenzierbar ist, und in jedem zu  $I$  gehörigem Randpunkt einseitig differenzierbar ist.

**Satz 3.83.** (Differenzierbarkeit  $\implies$  Stetigkeit)

Ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  an einem Punkt  $x_0$  differenzierbar, so ist sie an der Stelle  $x_0$  auch stetig.

*Beweis.*

Gilt  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ , so konvergiert der Differenzenquotient  $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$  gegen  $f'(x_0)$  wegen der Differenzierbarkeit von  $f$ . Damit gilt

$$f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} (x_n - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ , also  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Damit ist die Stetigkeit im Punkt  $x_0$  gezeigt.  $\square$

### 3.7.1 Differentiationsregeln

**Satz 3.84.**

Seien  $f$  und  $g$  differenzierbare Funktionen. Die Ableitung von einer Funktion  $f$  wird durch  $f'$  bezeichnet.

1) Ableitung von Summe, Produkt und Quotient

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(c \cdot f)' = cf' \quad (c \text{ ist eine reelle Konstante})$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

2) Kettenregel verketteter Funktionen

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3) Ableitung der Umkehrfunktion

Ist  $y = f(x)$  bijektiv und differenzierbar mit  $f'(x) \neq 0$ , dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

4) Ableitung der elementaren Grundfunktionen

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0)$$

*Bemerkung 3.85.*

Die eben notierten Regeln sind eigentlich ausreichend, um die normalerweise zu berechnenden Ableitungen von Funktionen zu berechnen. Die Regeln unter Punkt 1) sind leicht nachzurechnen. Deshalb sollen im Folgenden einige der anderen Regeln besprochen und bewiesen werden.

## a) Ableitung der Sinus-Funktion

Es ist der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}$$

zu untersuchen. Unter Nutzung des Additionstheorems für die Sinus-Funktion erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos \Delta x + \cos x_0 \sin \Delta x - \sin x_0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sin x_0 \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x_0 \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Grenzwertsätze und der Berücksichtigung der Ergebnisse

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0,$$

die oben nachgewiesen wurden, bzw. durch geometrische Betrachtungen offensichtlich sind, erhält man mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x_0$$

die Ableitung der Sinusfunktion.

## b) Ableitung der ln- und der e-Funktion

Grundlage der Berechnung der Ableitung der ln-Funktion ist die Nutzung des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e. \quad (72)$$

bzw.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + hx)^{\frac{1}{h}} = e^x. \quad (73)$$

Durch Nutzung des binomischen Lehrsatzes lassen sich die Beziehungen (72) bzw. (73) auf die Grenzwertbetrachtung in der Bemerkung 3.48 zurückführen und kann von interessierten Studenten in der angegebenen Literatur nachgelesen werden.

Der Differenzenquotient der Logarithmusfunktion ergibt sich für  $x_0 > 0$  und  $x_0 + \Delta x > 0$  zu

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} &= \frac{\ln \frac{x_0 + \Delta x}{x_0}}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \\ &\ln\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) \rightarrow \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

Für  $x < 0$  erhält man mit der Kettenregel

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad \text{und damit}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Die Ableitung der Funktion  $y = e^x$  erhält man mit der Regel für die Umkehrfunktion, mit  $x = \ln y$  ergibt sich

$$(e^x)' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = [(\ln y)']^{-1} = \left[\frac{1}{y}\right]^{-1} = y = e^x.$$

c) Die Ableitung der Potenzfunktion  $y = x^\nu$  ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ) berechnet man durch Nutzung des binomischen Lehrsatzes zu  $y' = \nu x^{\nu-1}$

### 3.7.2 Logarithmisches Differenzieren

Mitunter ist es unerlässlich oder zumindest sehr zweckmäßig, eine Funktion vor dem Ableiten zu logarithmieren.

Will man z.B. die Funktion  $y = x^x$ ,  $x > 0$  differenzieren, fällt einem keine Regel ein, denn es handelt sich weder um eine Exponential- noch um eine Potenzfunktion. Helfen tut hier das Logarithmieren. Es ergibt sich

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x,$$

differenziert man beide Seiten, erhält man

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

und damit

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

Man kann auch die Beziehung  $a = e^{\ln a}$  nutzen, und erhält auf diesem Wege für  $y = x^x$

$$y = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

und damit für die Ableitung

$$y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

**Korollar 3.86.** (*Logarithmische Ableitung*)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  differenzierbar auf  $I$ , so gilt für die Ableitung der logarithmierten Funktion  $F(x) := \ln f(x)$

$$(F(x))' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (74)$$

(74) heißt *logarithmische Ableitung* von  $f$ .

Beispiele von Ableitungsberechnungen:

1)  $y = e^{3x^2}$

$$y' = e^{3x^2} 6x.$$

2)  $y = x^{\cos x} = e^{\ln x^{\cos x}} = e^{\cos x \ln x}$

$$y' = e^{\cos x \ln x} \left[ (-\sin x) \ln x + \frac{\cos x}{x} \right] = x^{\cos x} \left( \frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right).$$

**Definition 3.87.** (*mehrfache Ableitung*)

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $A \subseteq D$  und habe die Ableitung  $g(x) = f'(x)$ . Ist  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $B \subseteq A$  mit der Ableitung  $g'(x) = (f'(x))'$ , dann heißt  $f$  zweimal differenzierbar und

$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$

heißt zweite Ableitung der Funktion  $f$ .

Die entsprechende Differenzierbarkeit vorausgesetzt kann man analog die  $n$ -te Ableitung von  $f$  durch

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

rekursiv definieren. Für  $f^{(n)}(x)$  schreibt man auch  $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ .

### 3.8 Lineare Approximation und Differential

Bei komplizierten nichtlinearen Zusammenhängen, sprich Funktionen, bereiten die Nichtlinearitäten bei Berechnungen oft Schwierigkeiten. Jedenfalls sind die Nichtlinearitäten in der Regel schwieriger als lineare Zusammenhänge zu behandeln. Deshalb ist die Frage interessant, ob man Funktionen zumindest in kleinen Umgebungen irgendeines Punktes  $x_0$  des Definitionsbereiches gut durch lineare Funktionen oder Geraden annähern kann. Wenn wir uns an die Sinusfunktion erinnern, dann haben wir bei der Untersuchung des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x}$  festgestellt, daß für kleine  $x$  die Funktionen  $f(x) = \sin x$  und  $f(x) = x$  äquivalent sind, so daß man für kleine  $x$  statt mit der nichtlinearen Funktion  $f(x) = \sin x$  auch mit einer guten Näherung, also auch mit der Funktion  $g(x) = x$  arbeiten kann.

Um die obige Frage zu beantworten überlegen wir uns zunächst, daß die folgende Definition äquivalent zur weiter oben angegebenen Differenzierbarkeitsdefinition ist.

**Definition 3.88.**

Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Punkt  $x_0$  differenzierbar, wenn es eine Zahl  $f'(x_0)$  gibt, so daß

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

gilt, bzw. mit  $k(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0$$

gilt. Die Zahl  $f'(x_0)$  heißt Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

*Bemerkung 3.89.*

Mit der Definition (3.88) hat man für die Funktion  $f$  die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x),$$

wobei  $k(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  überlinear gegen 0 strebt, also  $k(x) = o(x - x_0)$  ist. Damit ist

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{75}$$

für kleines  $x - x_0$  eine gute Näherung der im allg. nichtlinearen Funktion  $f$  ( $g(x) \approx f(x)$ ). Für die Sinusfunktion erhält man für  $x_0 = 0$

$$g(x) = \sin 0 + \sin'(0)(x - 0) = 0 + 1(x - 0) = x,$$

d.h. man kann in der Nähe von  $x_0 = 0$  die Sinusfunktion durch die lineare Funktion  $g(x) = x$  annähern. Wie gut die Näherung ist, werden wir etwas später im Zusammenhang mit dem Satz von TAYLOR erfahren.

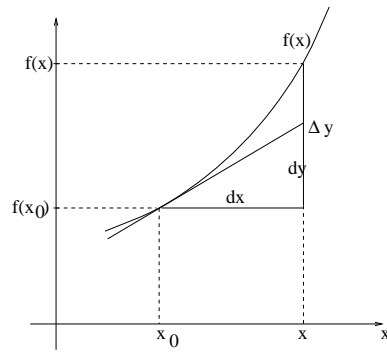
Die eben diskutierte Methode zur Näherung von im allg. nichtlinearen Funktionen durch Geraden ist in der Abbildung 44 skizziert.

#### 3.8.1 Totales Differential

**Definition 3.90.** (totales Differential)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion.

$$dy := f'(x_0)(x - x_0) \tag{76}$$

Abbildung 44: Funktion und Tangente an  $f$  in  $x_0$ 

heißt totales Differential von  $f$  bei  $x_0$ .

Mit der Bezeichnung  $dx = \Delta x = x - x_0$  für den Zuwachs  $\Delta x = x - x_0$  wird das totale Differential auch in der Form

$$dy = f'(x_0)dx$$

geschrieben.

*Bemerkung 3.91.*

Das totale Differential von  $f$  an der Stelle  $x_0$  ist eine Näherung von  $\Delta y := f(x) - f(x_0)$ , d.h., es gilt

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)dx \quad \text{bzw.} \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$dy$  und  $\Delta y$  sind wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  im Sinne der oben besprochenen äquivalenten Größen unendlich kleine Größen und für  $f'(x_0) \neq 0$  gilt  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$  bzw.

$$dy \sim \Delta y \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

**Korollar 3.92.** (totales Differential der unabhängigen Variablen)

Für den Spezialfall der Funktion  $f(x) = x$  erhält man für das Differential an der Stelle  $x_0$

$$dy = dx = x - x_0.$$

$dx$  heißt totales Differential der unabhängigen Variablen  $x$ .

Das totale Differential der unabhängigen Variablen ist gleich ihrem Zuwachs.

*Bemerkung 3.93.* (Anwendungen)

1) Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten:

Berechnet werden soll  $\ln 3$ . Da kein Taschenrechner greifbar ist, betrachten wir das totale Differential von  $y = f(x) = \ln x$  an der Stelle  $x_0 = e$  (weil  $e$  in der Nähe von 3 liegt und  $\ln e$  ein uns bekannter Wert ist!). Es ergibt sich

$$\ln 3 \approx \ln e + dy = 1 + \frac{1}{e}(3 - e) = \frac{3}{e} \approx 1.10,$$

da  $dy = f'(e)dx = \frac{1}{e}(x - e)$  ist.



2) Neue Äquivalenzbeziehungen für unendlich kleine Größen:

Mit dem totalen Differential  $dy = e^x dx$  der Funktion  $y = f(x) = e^x$  erhält man

$$\Delta y = e^x - e^{x_0} \sim e^{x_0} dx = dy,$$

und für  $x_0 = 0$  folgt

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

und damit

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2} \sim \frac{x - (-x)}{2} = x,$$

also nicht nur  $\sin x \sim \tan x \sim x$ , sondern

$$\sin x \sim \tan x \sim \sinh x \sim x \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

### 3.8.2 Fehlerrechnung und -fortpflanzung

Aus der Beziehung  $\Delta y \approx dy$  ergibt sich sofort

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|. \quad (77)$$

Mit der Beziehung (77) ist es möglich, Aussagen über den Fehler bei der Berechnung von  $f(x)$  für eine fehlerbehaftete Größe  $x$  zu machen.

Ist  $\tilde{x}$  ein fehlerbehafteter Näherungswert von  $x$  und  $\delta$  die Toleranz, d.h.,

$$|x - \tilde{x}| < \delta,$$

dann gilt für den maximalen absoluten Fehler des Näherungswertes  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$

$$|\Delta y| = |y - \tilde{y}| \approx |f'(\tilde{y})| \cdot |\Delta x| < |f'(\tilde{x})| \cdot \delta.$$

Diese Aussage gilt für kleine  $\delta$  und  $f'(\tilde{x}) \neq 0$ .

#### Korollar 3.94.

1) Maximaler absoluter Fehler

$$\approx |f'(\tilde{x})| \delta,$$

2) maximaler relativer Fehler ( $f(\tilde{x}) \neq 0$ )

$$\approx \left| \frac{f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \right| \delta,$$

3) maximaler prozentualer Fehler in % ( $f(\tilde{x}) \neq 0$ )

$$\approx \left| \frac{f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \right| \delta \cdot 100.$$

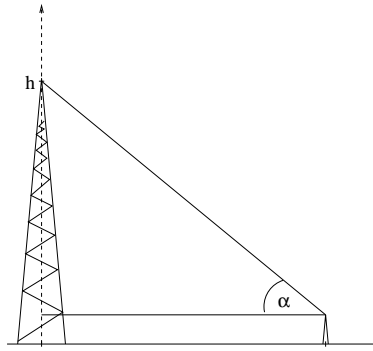


Abbildung 45: Hochspannungsmast und Theodolit

Beispiel:

Der Theodolit zur Winkelmessung einer Vermessungsfirma arbeitet mit einer Genauigkeit von einem Grad (es ist ein älteres Modell). Es soll die Höhe eines Hochspannungsmastes, der sich in einer Entfernung von  $300\text{ m}$  vom Standort eines  $2\text{ m}$  hohen Theodoliten befindet, bestimmt werden.

Die Abbildung 45 skizziert die Situation. Die Anvisierung der Mastspitze ergibt einen Winkel von  $35$  Grad. Für die Höhe des Mastes in Metern ergibt sich die Beziehung

$$h = 300 \tan \alpha + 2.$$

Für den maximalen absoluten Fehler errechnet man

$$|\Delta h| \approx 300 \left| \tan' \left( \frac{35\pi}{180} \right) \right| \left| \frac{\pi}{180} \right| = 300 \frac{1}{\cos^2(0.6108)} 0.01745 \approx 7.8016,$$

also rund  $7.8\text{ m}$ . Damit hat man die Höhe mit  $h = 300 \tan(0.6108) + 2 \approx 212$  Metern mit einem max. absoluten Fehler von etwa  $7.8\text{ m}$  bestimmt.

### 3.9 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Die in den folgenden Sätzen formulierten Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen sollen u.a. zur Lösung von Extremalproblemen und zur Näherung von Funktionen durch Polynome benutzt werden.

#### Satz 3.95.

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  definiert und nehme in einem inneren Punkt  $x_0 \in I$  einen absoluten Extremwert an.

Falls  $f'(x_0)$  existiert, so gilt  $f'(x_0) = 0$  (Tangente an  $f$  in  $x_0$  ist parallel zur  $x$ -Achse).

*Beweis.*

Nach Voraussetzung existiert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Sei  $x_0$  ein Punkt, wo  $f$  minimal wird (Beweis für Maximum analog), d.h., es gilt für alle  $x \in I$   $f(x) \geq f(x_0)$ . Damit gilt für  $x < x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies f'(x_0) \leq 0$$

und für  $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \geq 0.$$

Damit folgt

$$f'(x_0) = 0.$$

□

**Satz 3.96.** (*Satz von Rolle*)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert im Falle von  $f(a) = f(b)$  mindestens ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = 0.$$

*Beweis.*

Nach Satz 3.71 besitzt  $f$  als auf  $[a, b]$  stetige Funktion Maximum  $M$  und Minimum  $m$ . Ist  $m = M$  so folgt  $f'(x) \equiv 0$ . Ist  $m < M$  so wird mindestens einer dieser Werte im Inneren von  $(a, b)$  angenommen (beide können nicht auf den Randpunkten wegen  $f(a) = f(b)$  angenommen werden), und damit folgt nach Satz 3.95 die Behauptung. □

**Satz 3.97.** (*Mittelwertsatz*)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert mindestens ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Beweis.*

Mit

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wird eine Hilfsfunktion eingeführt, für die

$$g(a) = g(b) = 0$$

gilt.  $g$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.96 und damit existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $g'(x_0) = 0$ . Da man durch Differentiation

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

feststellt, ergibt sich mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

die Behauptung des Satzes. □

**Satz 3.98.** (*verallgemeinerter Mittelwertsatz*)

Seien die reellwertigen Funktionen  $f$  und  $h$  auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Weiterhin gelte auf  $(a, b)$  überall  $h'(x) \neq 0$ . Dann existiert ein Punkt  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}.$$

*Beweis.*

Mit der Einführung der Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(a) - (h(x) - h(a)) \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)},$$

für die  $g(a) = g(b) = 0$  gilt, ergibt sich die Behauptung ebenso wie beim Beweis des Satzes 3.97 aus dem Satz von Rolle.  $\square$

*Bemerkung 3.99.*

1) Aus dem Satz 3.97 folgt Satz von Rolle 3.96.

2) Aus dem Satz 3.98 folgt der Satz 3.97.

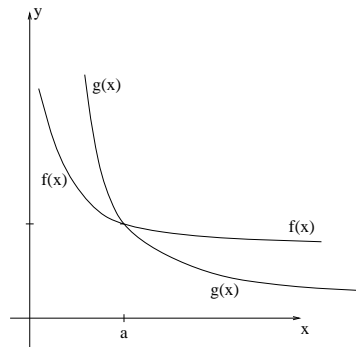


Abbildung 46: Funktion  $g$  fällt ab  $x = a$  schneller als  $f$

3) Der Satz 3.98 kann beim dem Nachweis von Ungleichungen hilfreich sein. Haben z.B. zwei monoton fallende Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  einen Schnittpunkt bei  $x = a$ , und gilt für  $x > a$  die Beziehung  $\frac{f'(x)}{g'(x)} < 1$  ( $g$  fällt ab  $x = a$  schneller als  $f$ ) und ist  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x > a$ , so folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < 1 \quad \text{bzw.} \quad f(x) - f(a) > g(x) - g(a) \quad \text{bzw.} \quad f(x) > g(x).$$

Das Vorzeichen in der Ungleichung kehrt sich um, da mit  $g(x) - g(a) < 0$  multipliziert wird!

**Satz 3.100.** (Regeln von BERNOULLI-L'HOSPITAL I)

Sind  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  aus dem Intervall  $I$  und gilt

$$f(x_0) = g(x_0) = 0,$$

sowie  $g'(x_0) \neq 0$  und  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \neq x_0$ ,  $x \in I$ , so gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

*Beweis.*

Sei  $x \neq x_0$ ,  $x \in I$ , dann gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

$\square$

**Satz 3.101.** (Regeln von BERNOULLI-L'HOSPITAL II)

Sind  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  auf dem Intervall  $I = (a, b)$  und gilt

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

oder

$$f(x_0) = \pm\infty \quad \text{und} \quad g(x_0) = \pm\infty,$$

sowie  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b)$ ,  $x \neq x_0$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (a < x < b, x \neq x_0),$$

sofern der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert oder  $\pm\infty$  ist (hierbei ist auch  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen).

Für  $x \rightarrow a + 0$  bzw.  $x \rightarrow b - 0$ , ( $a < x < b$ ) gilt die entsprechende Aussage.

*Bemerkung 3.102.*

1) Der Beweis des Satzes 3.101 verläuft analog zum Beweis des Satzes 3.100.

2) Liefert  $\lim \frac{f'}{g'}$  wieder eine Unbestimmtheit der Art  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ , kann der Satz 3.101 erneut angewendet werden bis im positiven Fall keine Unbestimmtheit mehr auftritt oder im negativen Fall der Grenzwert nicht existiert.

Beispiele der Anwendung der BERNOULLI-L'HOSPITALSchen Regeln:

1) Seien  $a$  und  $b$  beliebige positive reelle Zahlen. Man findet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a e^{ax}}{1} = \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{a}{b}x}\right)^b = \infty.$$

Daraus folgt, daß jede Exponentialfunktion  $e^{ax}$  ( $a > 0$ ) schneller gegen  $\infty$  strebt als jede Potenz von  $x$ . Daraus folgt sofort

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-ax} = 0$$

für jedes reelle Polynom  $p$ .

2) Seien  $a$  und  $b$  beliebige positive reelle Zahlen. Man errechnet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{b x^{b-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b x^b} = 0.$$

Wegen  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  ( $a > 0$ ) folgt ebenso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0,$$

d.h., jeder Logarithmus  $\log_a x$  geht langsamer gegen  $\infty$  als jede Potenz von  $x$ .

3)  $a, b > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-b}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-b x^{-b-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^b}{b} = 0 \quad (x > 0).$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \quad (x > 0).$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x \cdot \sin x} = 2.$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Definition 3.103.** (Stetige Differenzierbarkeit)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig differenzierbar auf  $I \subset D$ , wenn sie differenzierbar ist und die Ableitung  $f'(x)$  eine stetige Funktion auf  $I$  ist.

### 3.10 TAYLORSche Formel und der Satz von TAYLOR

Im Zusammenhang mit dem HORNERSchen Schema habe wir erfahren, daß man ein Polynom, z.B.

$$p_3(x) = 47 - 13x - 9x^2 + 2x^3$$

nach Potenzen von  $x - 2$  durch das Einsetzen von  $x = 2 + (x - 2)$  mit dem Ergebnis

$$p_3(x) = 1 - 25(x - 2) + 3(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3$$

neu ordnen kann. Es gilt der folgende

**Satz 3.104.**

Jedes Polynom  $p_n(x)$  läßt sich für beliebige  $x_0 \in \mathbb{R}$  in der Form

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

darstellen und es gilt

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (78)$$

*Beweis.*

Die Beziehung (78) ergibt sich direkt aus der Berechnung von  $p_n^{(k)}(x)$  an der Stelle  $x_0$ . □

Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion ist und wenn man  $T_n(x)$  durch

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (79)$$

erklärt, so ergibt sich

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Damit ist  $T_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, das mit der Funktion  $f$  im Funktionswert und in allen Ableitungen bis zur  $n$ -ten Ordnung an der Stelle  $x = x_0$  übereinstimmt.

Das Polynom  $T_n(x)$  ist das einzige Polynom  $n$ -ten Grades mit den eben notierten Eigenschaften.

**Definition 3.105.** (TAYLOR-Polynom)

$T_n(x)$  heißt TAYLORSches Polynom  $n$ -ten Grades für die reellwertige Funktion  $f$ .  $x_0$  heißt Entwicklungsstelle.

Die Bildkurven von  $y = T_n(x)$  heißen Schmiegeparabeln.

*Bemerkung 3.106.*

Die Güte der Näherung

$$f(x) \approx T_n(x)$$

in der Umgebung von  $x_0$  wächst im allg. mit steigendem  $n$ .

Die Beziehung

$$f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

entspricht genau der Beziehung

$$\Delta y \approx dy.$$

Der Fehler bei der Näherungsbeziehung  $f(x) \approx T_n(x)$  ergibt sich zu

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

und  $R_n$  hängt von  $f$  und  $x_0$  ab.

**Satz 3.107.** (Satz von TAYLOR)

Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf einer Umgebung der Entwicklungsstelle  $x_0$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gibt es für  $R_n(x)$  aus der Beziehung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \quad (80)$$

mindestens eine Zahl  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  derart, daß

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! p}(x - x_0)^p(x - \xi)^{n+1-p} \quad (81)$$

für  $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$  gilt. (80) heißt TAYLORSche Formel mit dem Restglied  $R_n(x)$  in der SCHLÖMILCH-Form (81).

*Beweis.* \*

Es sei  $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$  beliebig, aber fest gewählt. Falls  $x = x_0$  gilt, ist  $R_n(x_0) = 0$  und  $f(x) = f(x_0)$  und der Satz gilt.

Sei nun  $x \neq x_0$ ,  $x \in I$ . Es wird nun ein  $c_x \in \mathbb{R}$  bestimmt, so daß

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + c_x(x - x_0)^p \quad (82)$$

gilt. Nun ersetzt man in (82)  $x_0$  durch eine Variable  $z$ , wobei  $x$  und  $c_x$  festgehalten werden, und definiert die Funktion

$$F(z) := f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x - z)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n + c_x(x - z)^p \quad (83)$$

auf  $I$ . Es gilt offenbar  $F'(x) = f(x)$  und  $F(x_0) = f(x_0)$ , also  $F'(x) = F'(x_0)$ . Nach dem Satz von Rolle existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit

$$F'(\xi) = 0.$$

Dabei hat  $F'(z)$  für beliebige  $z \in I$  den Wert

$$F'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x-z)^n - c_x p (x-z)^{p-1},$$

den man aus (83) errechnet. Für  $z = \xi$  wird der Ausdruck gleich Null und für  $c_x$  ergibt sich

$$c_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! p} (x-\xi)^{n+1-p}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (82) ein, ergibt sich mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! p} (x-x_0)^p (x-\xi)^{n+1-p} \quad (84)$$

die Restgliedformel von SCHLÖMILCH, die für  $p = n + 1$  in die LAGRANGE-Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1) \quad (85)$$

übergeht ( $\theta = \frac{\xi-x_0}{x-x_0}$ ), und für  $p = 1$  in die CAUCHY-Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (x-x_0)(x-\xi)^n, \quad (0 < \theta < 1) \quad (86)$$

übergeht ( $\theta = \frac{\xi-x_0}{x-x_0}$ ). □

*Bemerkung 3.108.*

- 1)  $|R_n|$  gibt den Fehler bei der Approximation von  $f(x)$  durch  $T_n(x)$  an. Sehr wünschenswert ist die Angabe einer oberen Schranke für  $|R_n|$ , die nicht von  $\theta$  bzw.  $\xi$  abhängt.
- 2) Bei Restgliedabschätzungen wird in aller Regel die LAGRANGE-Form von  $R_n$  benutzt, da sie sich zum einen recht einfach merken läßt und andererseits am "griffigsten" ist.
- 3) Der wichtige Spezialfall der TAYLORSche Formel (80) für  $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad (87)$$

mit dem Restglied in der LAGRANGE-Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

heißt MCLAURINSche Formel.



4) MCLAURINSche Formel für die Funktion  $y = f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^\nu \cos x, & \text{falls } k = 2\nu \\ (-1)^{\nu+1} \sin x, & \text{falls } k = 2\nu + 1 \end{cases} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(k)}(0) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ (-1)^\nu, & \text{falls } k \text{ gerade und } k = 2\nu \end{cases},$$

für das TAYLOR-Polynom ergibt sich

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

und damit

$$\cos x = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + R_{2n}(x),$$

wobei  $R_{2n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

5) MCLAURINSche Formel für die Funktion  $y = f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$k = 2\nu \implies f^{(2\nu)}(0) = 0, \quad k = 2\nu + 1 \implies f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu,$$

für das TAYLOR-Polynom ergibt sich

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und damit

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

wobei  $R_{2n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

6) Die Glieder des Polynoms für die Cosinus-Funktion ergeben sich durch gliedweises Differenzieren der Glieder des Polynoms für  $\sin x$ .

7) MCLAURINSche Formel für die Funktion  $y = f(x) = e^x$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1,$$

und damit ergibt sich

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Für das Restglied  $R_n(x)$  findet man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \right| \cdot |x|^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \\ &\leq \frac{e^{|\theta x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \end{aligned}$$

und damit einen von  $\theta$  unabhängigen Ausdruck, der für  $n \rightarrow \infty$  für jedes fixierte  $x$  gegen Null konvergiert,

denn man findet immer eine natürliche Zahl  $p$  mit  $p-1 \leq |x|$  und  $p > |x|$ , so daß

$$\frac{n!}{|x|^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1) \cdot p \cdots n}{|x| \cdot |x| \cdots |x| \cdot |x| \cdots |x|} \geq \frac{(p-1)!}{|x|^{p-1}} \cdot \left(\frac{p}{|x|}\right)^{n-(p-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty,$$

und damit konvergiert der Ausdruck  $\frac{|x|^n}{n!}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null.

- 8) MCLAURINSche Formel für  $f(x) = (1+x)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$   
Nach dem Errechnen der Ableitungen  $f^{(k)}(x)$  erhält man

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}, \quad (n \geq k).$$

Weiterhin ist  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , so daß  $R_n(x) = 0$  für das Restglied der TAYLOR-Formel gilt. Die TAYLOR-Entwicklung um 0 lautet dann

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

und ist nichts anderes als die aus der Schule bekannte binomische Formel.

- 9) MCLAURINSche Formel für  $f(x) = (1+x)^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|x| < 1$   
Für die Ableitungen  $f^{(k)}(x)$  erhält man

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

Analog zum bekannten Binomialkoeffizienten definieren wir  $\binom{\alpha}{k}$  für reelles  $\alpha$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}, \quad \text{und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Damit ergibt sich  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$  und somit die TAYLOR-Entwicklung

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x),$$

mit

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

Z.B. erhält man für  $\alpha = \frac{1}{2}$ , also die Wurzelfunktion, die Näherung

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$$

und für das vernachlässigte Restglied  $R_2(x)$  errechnet man

$$|R_2(x)| = \left| \binom{\frac{1}{2}}{3} \right| \frac{|x|^3}{(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{|x|^3}{16} \leq \frac{1}{128}, \quad \text{für } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

10) Aus den TAYLORSchen Formeln ergeben sich im Falle des Grenzübergangs z.B. die Äquivalenzbeziehungen für die unendlich kleinen Größen

$$\begin{aligned} \sin x - x &\sim -\frac{x^3}{6}, \\ \cos x - 1 &\sim -\frac{x^2}{2}, \\ e^x - 1 &\sim x, \\ e^x - 1 - x &\sim \frac{x^2}{2}, \\ \sqrt{1+x} - 1 &\sim \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

### 3.11 Extremalprobleme

Mit dem Satz von TAYLOR ist es möglich, notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremwerte und Wendepunkte von Funktionen zu formulieren.

#### Definition 3.109.

Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt im Intervall  $I$  in  $x_0$  ein lokales Maximum (Minimum), wenn es eine  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(x_0)$  gibt, in der  $f(x_0)$  größter (kleinster) Funktionswert ist, d.h. im Falle des Maximums

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in I \cap U_\epsilon(x_0)$$

gilt.  $x_0$  heißt eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle), und die Zahl  $f(x_0)$  heißt lokales Maximum (Minimum). Gilt sogar  $f(x_0) > f(x)$  ( $f(x_0) < f(x)$ ), so heißt  $x_0$  echte Maximalstelle (Minimalstelle) und  $f(x_0)$  echtes Maximum (Minimum).

#### Satz 3.110. (notwendige Bedingung - LEIBNIZ)

Für jede lokale Extremalstelle  $x_0$  einer auf  $I$  differenzierbaren Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$a) \quad f'(x_0) = 0$$

oder

b)  $x_0$  ist Randpunkt von  $I$ .

*Beweis.*

Sei  $x_0$  lokale Maximalstelle und  $x_0$  kein Randpunkt, dann gibt es eine Umgebung  $U_\epsilon(x_0) \subset I$  mit  $f(x_0) - f(x) \geq 0$  für alle  $x \in U_\epsilon(x_0)$  und damit

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$$

und damit  $f'(x_0) = 0$ . Der Beweis für Minimalstellen verläuft analog. □

**Satz 3.111.** (*hinreichende Bedingung*)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Umgebung von  $x_0$  2-mal stetig differenzierbar. Wenn für  $f$  an der Stelle  $x_0$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein relatives Minimum.

Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein relatives Maximum. Gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann liegt mit dem Punkt  $x_0$  ein Wendepunkt vor.

*Beweis.*

Wir betrachten das TAYLOR-Polynom  $T_1(x)$  der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Wegen der Voraussetzung erhalten wir

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) = f(x_0) + R_1(x) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!} (x - x_0)^2.$$

$(x - x_0)^2$  ist für  $x \neq x_0$  immer positiv. Ist  $f''(x_0) > 0$ , dann gilt dies wegen der Stetigkeit von  $f''$  auch in einer Umgebung  $U_\epsilon(x_0)$  von  $x_0$ , so daß  $\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!} > 0$  für  $x$  aus  $U_\delta(x_0)$  und damit auch

$$f(x) > f(x_0)$$

in der Umgebung gilt. D.h.,  $f$  nimmt in  $x = x_0$  ein echtes relatives Minimum an.

Der Nachweis für die Annahme eines relativen Maximums im Falle  $f''(x_0) < 0$  erfolgt völlig analog.

Ist  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$  und  $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ , dann wechselt  $(x - x_0)^3$  beim Passieren des Punktes  $x_0$  das Vorzeichen, so daß aus der Gleichung

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(3)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{3!} (x - x_0)^3$$

folgt, daß die Funktion bei  $x = x_0$  ihre dort angelegte Tangente  $y = f(x_0) = \text{const.}$  schneidet, also  $x = x_0$  ein Wendepunkt ist.  $\square$

*Bemerkung 3.112.*

Der Satz 3.111 läßt sich wie folgt verallgemeinern.

Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Umgebung von  $x_0$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

gilt, sowie  $n$  eine gerade Zahl ist, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein relatives Extremum, und zwar im Falle  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ein relatives Minimum, und im Fall  $f^{(n)}(x_0) < 0$  ein relatives Maximum. Ist  $n$  eine ungerade Zahl, so liegt im Punkt  $x_0$  ein Wendepunkt vor.

Diese Verallgemeinerung wird analog zum Satz 3.111 bewiesen und ist eine gute Übung für die interessierten Studenten.

Beispiel:

Mit den Sätzen 3.110 und 3.111 können wir nun unsere optimale Sitzplatzposition im Theater bestimmen. Die Voraussetzungen der Sätze sind erfüllt (Stetigkeit und Differenzierbarkeit), da es sich bei  $\alpha = f(x)$  um eine elementare Funktion handelt. Zuerst müssen wir alle Punkten bestimmen, die die notwendige Bedingung  $f'(x) = 0$  erfüllen. Unsere Funktion lautet

$$\alpha = f(x) = \arctan\left(\frac{3a}{8a-x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{8a-x}\right),$$

und für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{9a^2}{(8a-x)^2}} \frac{3a}{(8a-x)^2} - \frac{1}{1+\frac{a^2}{(8a-x)^2}} \frac{a}{(8a-x)^2} \\ &= \frac{3a}{(8a-x)^2+9a^2} + \frac{a}{(8a-x)^2+a^2}. \end{aligned}$$

Die Auswertung der notwendigen Bedingung bedeutet

$$\frac{3a}{(8a-x)^2+9a^2} - \frac{a}{(8a-x)^2+a^2} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} 3(8a-x)^2+3a^2 &= (8a-x)^2+9a^2 \iff 2(8a-x)^2-6a^2=0 \\ &\iff 2x^2-32ax+122a^2=0. \end{aligned}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt sich zu

$$x_{1,2} = 8a \pm \sqrt{3}a,$$

und da unsere Funktion den Definitionsbereich  $[0, 8a]$  hatte, ist  $x = (8 - \sqrt{3})a$  der einzige Kandidat für eine Extremalstelle.

Für die zweite Ableitung erhält man

$$f''(x) = \frac{6a(8a-x)}{[(8a-x)^2+9a^2]^2} - \frac{2a(8a-x)}{[(8a-x)^2+a^2]^2},$$

und damit für  $f''((8 - \sqrt{3})a)$

$$f''((8 - \sqrt{3})a) = \frac{6a\sqrt{3}a}{[3a^2+9a^2]^2} - \frac{2a\sqrt{3}a}{[3a^2+a^2]^2} = \frac{6\sqrt{3}}{144} - \frac{2\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{12} < 0.$$

Aus Satz 3.111 ergibt sich, daß die Funktion an der Stelle  $x = (8 - \sqrt{3})a$  ein lokales Maximum annimmt. Da es keine weiteren Punkte in  $[0, 8a]$  gibt, die die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum erfüllen, und die Funktionswerte in den Randpunkten  $x = 0$  und  $x = 8a$  kleiner als der Funktionswert  $\alpha = f((8 - \sqrt{3})a) = \frac{\pi}{6}$  sind.

*Bemerkung 3.113.*

In der Praxis ist es nicht immer nötig, die hinreichenden Bedingungen auszuwerten, denn oft, aber nicht immer, gibt es zusätzliche Informationen über das Funktionsverhalten und speziell den Funktionsverlauf, so daß es vielfach nur darauf ankommt, die Extremalstellen durch die Lösung der Gleichung  $f'(x) = 0$  zu ermitteln.

### 3.12 BANACHScher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen

In den vergangenen Kapiteln mußten wir oft Gleichungen der Art

$$f(x) = 0$$

lösen, wobei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtlineare, reellwertige Funktion war. Sowohl bei der Berechnung von Eigenwerten als Nullstellen von charakteristischen Polynomen oder der Auswertung von notwendigen Bedingungen für Extremalprobleme konnten wir die Gleichungen nur lösen, weil wir Glück hatten bzw. weil die Beispiele geschickt gewählt wurden. In der Regel ist es nicht möglich, die Lösungen in Form von geschlossenen analytischen Ausdrücken exakt auszurechnen. In den meisten Fällen ist es allerdings möglich, Lösungen als Grenzwerte von Iterationsfolgen numerisch zu berechnen. Ein ganz einfaches oder auch recht kompliziertes Problem ist die Berechnung des Funktionswertes der Exponentialfunktion  $y = 2^a$  für eine nichtrationale Potenz  $a$ . Zur guten näherungsweise Berechnung ist eine Iteration erforderlich.

Zum Beginn des Abschnittes "Grenzwerte und Stetigkeit" haben wir mit dem Intervallhalbierungsverfahren schon ein einfaches iteratives Verfahren zur Lösung einer Gleichung behandelt. Es ist an dieser Stelle nicht möglich, die numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen umfassend zu behandeln, aber auf die Grundlage der meisten iterativen Verfahren, den BANACHSchen Fixpunktsatz, soll nicht verzichtet werden.

#### 3.12.1 BANACHScher Fixpunktsatz

##### Definition 3.114.

Sei  $f : I \rightarrow I$  eine Funktion, die das reelle Intervall  $I$  in sich abbildet. Jede Lösung  $\bar{x}$  der Gleichung

$$x = f(x) \tag{88}$$

heißt Fixpunkt von  $f$ . Die Gleichung (88) wird Fixpunktgleichung genannt.

*Bemerkung 3.115.*

1) Geometrisch bedeutet ein Fixpunkt  $\bar{x}$  gerade die  $x$ -Koordinate eines Schnittpunktes der Geraden  $y = x$  mit dem Graphen der Funktion  $y = f(x)$ .

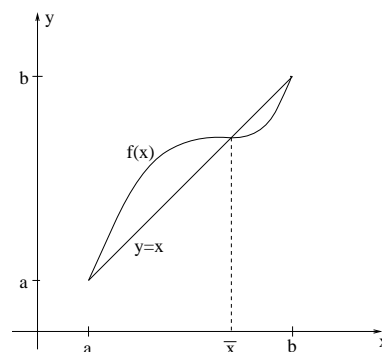


Abbildung 47: Fixpunkt von  $f$

2) Jede Gleichung  $g(x) = 0$  kann man durch Einführung von  $f(x) := g(x) + x$  als Fixpunktgleichung

$$x = f(x)$$

aufschreiben.

3) Wenn man keinerlei Vorstellung von der Lösung der Gleichung (88) hat, findet man mitunter mit der Folge

$$(x_n), \quad x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (89)$$

eine Folge, die, wenn sie konvergiert, im Falle einer stetigen Funktion gegen einen Fixpunkt von  $f$  konvergiert.

Im folgenden Satz wird eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Iterationsfolge  $(x_n)$  formuliert.

**Satz 3.116.** (BANACHscher Fixpunktsatz in  $\mathbb{R}$ ) Sei  $f : I \rightarrow I$  eine reellwertige Funktion, die ein abgeschlossenes Intervall  $I$  in sich abbildet. Weiterhin gelte für alle  $x_1, x_2 \in I$  die Ungleichung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad (90)$$

mit einer von  $x_1, x_2$  unabhängigen Konstanten  $K < 1$ .

Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x} \in I$  und die durch  $x_{n+1} = f(x_n)$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)$  konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \in I$  gegen diesen Fixpunkt.

*Beweis.*

Für die Iterationsfolge  $(x_n)$  gilt aufgrund der Voraussetzungen

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K|x_n - x_{n-1}|, \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \dots$$

also folgt auch

$$|x_{n+1} - x_n| \leq K|x_n - x_{n-1}| \leq K^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq K^n|x_1 - x_0| \quad \text{bzw.}$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq K^n|x_1 - x_0| \quad \text{für alle } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Für  $n < m$  folgt damit

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \dots + (x_{m-1} - x_m)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \dots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq K^n|x_1 - x_0| + K^{n+1}|x_1 - x_0| + K^{n+2}|x_1 - x_0| + \dots + K^{m-1}|x_1 - x_0| \\ &\leq K^n(1 + K + K^2 + \dots + K^{m-n-1})|x_1 - x_0| \\ &= K^n \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} |x_1 - x_0| \leq K^n \frac{1}{1 - K} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

also

$$|x_n - x_m| \leq \frac{K^n}{1 - K} |x_1 - x_0|, \quad (m > n). \quad (91)$$

Die rechte Seite von (91) kann beliebig klein gemacht werden, wenn  $n$  groß genug gewählt wird, da  $K^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , also gibt es auch ein  $n_0$ , so daß für alle  $n \geq n_0$  die rechte Seite kleiner als ein beliebig vorgegebenes  $\epsilon > 0$  wird. Damit gilt

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ , und nach dem CAUCHYSchen Konvergenzkriterium konvergiert  $(x_n)$  gegen einen Grenzwert  $\bar{x}$ .

$\bar{x}$  ist ein Fixpunkt von  $f$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} |\bar{x} - f(\bar{x})| &= |\bar{x} - x_n + x_n - f(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - f(\bar{x})| \\ &= |\bar{x} - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - x_n| + K|x_{n-1} - \bar{x}| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$\bar{x}$  ist der einzige Fixpunkt, denn wir einen weiteren Fixpunkt  $\bar{\bar{x}}$  annehmen, würde

$$|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| \leq K|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|$$

gelten, also  $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|$ , was bei  $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$  einen Widerspruch darstellt.  $\square$

### Korollar 3.117.

Aus dem BANACHschen Fixpunktsatz ergeben sich die Fehlerabschätzungen

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \quad (\text{a priori Abschätzung}) \quad (92)$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n| \quad (\text{a posteriori Abschätzung}), \quad (93)$$

wobei die a priori Abschätzung (92) sofort aus (91) folgt. Aus (92) folgt für  $n = 0$  die für jedes  $x_0 \in I$  gültige Beziehung

$$|x_0 - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K} |x_1 - x_0| \quad \text{bzw.} \quad |x - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K} |f(x) - x|$$

und damit speziell für  $x_n = x$  die a posteriori Abschätzung (93).

Beispiel:

Es sollen die Nullstellen des Polynoms  $p_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}$  berechnet werden. Schreibt man die Gleichung  $p_3(x) = 0$  in der Form

$$x = f(x) := \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}$$

auf, stellt man fest, daß  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  die Voraussetzungen des Satzes (3.116) erfüllt, und man kann einen Fixpunkt  $\bar{x} \in [0, 1]$  von  $f$  und damit eine Nullstelle von  $p_3(x)$  durch die Iterationsfolge  $x_{n+1} = f(x_n)$ , z.B. mit  $x_0 = \frac{1}{2}$  bis auf eine beliebige Genauigkeit berechnen. Nachfolgend ist der Ausdruck eines kleinen Computerprogramms für die Iteration zu finden.

```

It.-Nr = 0,  x=  0.5
It.-Nr = 1,  x=  0.231250003
It.-Nr = 2,  x=  0.203091621
It.-Nr = 3,  x=  0.202094197
It.-Nr = 4,  x=  0.202063486
It.-Nr = 5,  x=  0.202062547
It.-Nr = 6,  x=  0.202062517

```

Die restlichen beiden Nullstelle von  $p_3(x)$  lassen sich nun nach Division durch  $x - \bar{x} = x - 0.2020625$  mit der  $p - q$ -Formel quasi-exakt berechnen.

### 3.12.2 NEWTON-Verfahren

Die eben besprochene BANACHsche Fixpunktiteration hat den Vorteil der sehr einfachen Realisierung, ist allerdings aufgrund der Voraussetzungen oft nicht anwendbar. Mit dem NEWTON-Verfahren wollen wir ein Verfahren besprechen, daß in fast allen Situationen anwendbar ist. Allerdings hängt der Erfolg des Verfahrens ganz im Unterschied zum eben behandelten Verfahren wesentlich von der Wahl einer "guten" Startiteration ab. Dies sollte aber für einen fähigen Ingenieur bzw. Ingenieurstudenten keine Hürde sein, denn eine vernünftige mathematische Modellierung des jeweiligen Problems vorausgesetzt, hat man meistens eine Vorstellung, wo die



Lösung etwa liegen sollte. Gelöst werden soll wiederum eine Gleichung  $f(x) = 0$ . Die Grundidee des NEWTON-Verfahrens besteht in dem Anlegen von Tangenten an eine Funktion  $f$  in Punkten des Definitionsbereichs von  $f$ , die man sukzessiv als Schnittpunkte der Tangenten mit der  $x$ -Achse erhält, und wenn alles gut geht, erreicht man auch den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der  $x$ -Achse und damit eine Nullstelle. In der Abbildung 48 ist dieses iterative Verfahren angedeutet.

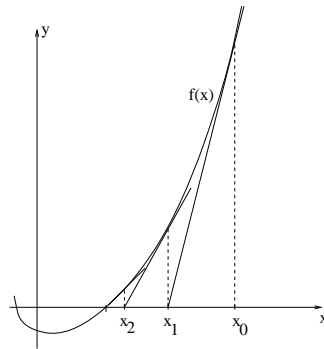


Abbildung 48: NEWTON-Verfahren

Angenommen  $x_0$  ist als in der Nähe einer Nullstelle  $\bar{x}$  befindlich bekannt. Die Gleichung der Tangente an  $f$  in  $x_0$  ist

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

und für den Schnittpunkt von  $g(x)$  mit der  $x$ -Achse findet man

$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei wird  $f'(x) \neq 0$  im gesamten Definitionsintervall  $I$  vorausgesetzt. In vielen Fällen ist  $x_1$  eine bessere Näherungslösung als  $x_0$ , d.h. liegt  $\bar{x}$  näher. Mit dieser Erfahrung kann man durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (94)$$

eine Zahlenfolge konstruieren, von der wir annehmen, daß alle Glieder in  $I$  liegen. Die NEWTON-Folge (94) konvergiert unter bestimmten Voraussetzungen gegen eine Nullstelle  $\bar{x}$ . Im folgenden Satz werden hinreichende Bedingungen für die Konvergenz formuliert.

**Satz 3.118.** (NEWTON-Verfahren)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall  $[x_0 - r, x_0 + r]$  definierte, dreimal stetig differenzierbare Funktion, mit  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Weiterhin existiere eine reelle Zahl  $K$ ,  $0 < K < 1$ , mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I \quad (95)$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r. \quad (96)$$

Dann hat  $f$  genau eine Nullstelle  $\bar{x}$  in  $I$  und die NEWTON-Folge (94) konvergiert quadratisch gegen  $\bar{x}$ , d.h., es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad \text{für alle } n = 0, 1, 2, \dots \quad (97)$$

mit einer Konstanten  $C$ . Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M \leq \min_{x \in I} |f'(x)|. \quad (98)$$

*Bemerkung 3.119.*

1) Der Beweis des Satzes 3.118 wird durch die Definition der Hilfsfunktion

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

auf den BANACHschen Fixpunktsatz und den Nachweis der Existenz eines Fixpunktes von  $g$  als Grenzwert der Iterationsfolge  $x_{n+1} = g(x_n)$  zurückgeführt.

2) Der Satz 3.118 besagt, daß das NEWTON-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle als Grenzwert einer NEWTON-Folge (94) funktioniert, wenn  $x_0$  nah genug bei  $\bar{x}$  liegt und somit  $|f(x_0)|$  klein ist, denn dann gibt es Chancen, daß die nicht weiter spezifizierten Konstanten  $r > 0$  und  $K > 0$  existieren und die Voraussetzungen (95) und (96) erfüllt sind.

3) In der Praxis ist man i.d. Regel auf Probieren (trial and error) angewiesen, d.h., man probiert das Verfahren für sinnvoll erscheinende Startnäherungen  $x_0$ , und hat oft nach ein paar Versuchen Glück.

4) Nicht auf Glück ist man bei konvexen Funktionen angewiesen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.120.**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und konvex mit  $f'(x) \neq 0$  auf  $[a, b]$ . Die Vorzeichen von  $f(a)$  und  $f(b)$  seien verschieden.

Dann konvergiert die NEWTON-Folge (94) von  $f$  gegen die einzige Nullstelle  $\bar{x}$  von  $f$ .

Ist  $f$  außerdem dreimal stetig differenzierbar, so ist die Konvergenz quadratisch.

Beispiele:

1) Betrachten wir das Standardbeispiel zum NEWTON-Verfahren, die Bestimmung der Nullstelle der Funktion  $f(x) = x^2 - a$ ,  $a > 0$  auf einem Intervall  $[b, c]$ , wobei  $b^2 - a$  und  $c^2 - a$  unterschiedliche Vorzeichen haben sollen, was gleichbedeutend mit der Berechnung von  $\sqrt{a}$  ist. Wir stellen fest, daß die Voraussetzungen des Satzes 3.120 erfüllt sind. Für  $f'(x)$  erhalten wir  $f'(x) = 2x$  und damit die NEWTON-Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Nachfolgend ist der Ausdruck eines kleinen Computerprogramms für die Iteration zur Berechnung von  $\sqrt{2}$  zu finden.

```
It.-Nr = 0,  x=  1.5
It.-Nr = 1,  x=  1.41666663
It.-Nr = 2,  x=  1.41421568
It.-Nr = 3,  x=  1.41421354
It.-Nr = 4,  x=  1.41421354
```

2) Nullstelle des Polynoms  $p_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}$  (siehe oben). Wir finden  $p'_3(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$  und damit die NEWTON-Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{4}x_n^3 - x_n + \frac{1}{5}}{\frac{3}{4}x_n^2 - 1}.$$

Die Iteration ergibt das Resultat

```
It.-Nr = 0, x= 0.899999976
It.-Nr = 1, x= -0.419108152
It.-Nr = 2, x= 0.272738785
It.-Nr = 3, x= 0.20107384
It.-Nr = 4, x= 0.202062368
It.-Nr = 5, x= 0.202062517
It.-Nr = 6, x= 0.202062517
```

Startet man statt mit  $x_0 = 0.9$  mit der besseren Näherung  $x_0 = 0.5$ , erhält man

```
It.-Nr = 0, x= 0.5
It.-Nr = 1, x= 0.169230774
It.-Nr = 2, x= 0.201913655
It.-Nr = 3, x= 0.202062517
It.-Nr = 4, x= 0.202062517
```

also eine Näherungslösung der gleichen Güte nach 4 Schritten. Mit der oben durchgeführten BANACHschen Fixpunktiteration hatten wir 6 Schritte bei der Wahl der Startiteration  $x_0 = 0.5$  benötigt.

### 3.13 Kurven im $\mathbb{R}^2$

In der Physik und in den Ingenieurwissenschaften besteht oft das Problem, Satellitenbahnen, Flugkurven von Körpern unterschiedlicher Art oder Teilchenbahnen mathematisch zu beschreiben. In den genannten Fällen geht es also um die Verfolgung der örtlichen Veränderung von Objekten, die sich mit einer Geschwindigkeit fortbewegen.

**Definition 3.121.** (Kurve im  $\mathbb{R}^2$ )

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  eine abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , mit stetig differenzierbaren Funktionen

$x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Kurvenstück in  $G$  mit dem Anfangspunkt  $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$ , dem Endpunkt  $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$  und der Spur  $\{\mathbf{x}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ .

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn  $x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  gilt.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

heißt Parameterdarstellung des Kurvenstückes mit dem Parameter  $t$ .

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , wobei der Anfangspunkt von  $K_i$  jeweils mit dem Endpunkt von  $K_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, r$ , übereinstimmt, heißt Kurve.

### 3.13.1 Kurventangente

Zu jeder Parameterdarstellung einer Kurve kann man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)] = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (99)$$

definieren. Aus der Abbildung 49 wird ersichtlich, daß (99) den Übergang von Sekantenvektoren zu einem Tangentenvektor bzw. zu einer Kurventangente im Punkt  $(x_1(t), x_2(t))$  beschreibt. Da wir uns im  $\mathbb{R}^2$ , also in der  $x_1 - x_2$ -Ebene bewegen, wird statt  $x_1$  auch  $x$  und statt  $x_2$  auch  $y$  als Bezeichnung verwendet.

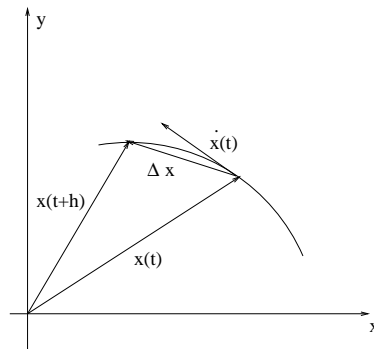


Abbildung 49: Sekantenvektor  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$  und Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$

**Definition 3.122.** (Kurventangente)

Der in (99) definierte Vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  heißt Tangentenvektor der Kurve  $\mathbf{x}(t)$  im Punkt  $(x(t), y(t))$ .

*Bemerkung 3.123.*

Für die Tangente  $T$  im Punkt  $(x(t_0), y(t_0))$  ergibt sich mit dem Anstieg  $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$  die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Mit

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

findet man einen **Normalevektor** im Punkt  $(x(t), y(t))$ , d.h., einen Vektor, der senkrecht auf  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  steht, denn

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0.$$

Insbesondere bei der Berechnung der Länge von Kurven<sup>14</sup> spielt das Bogenelement oder auch Differential der Bogenlänge eine Rolle. In der Abbildung 50 ist die Situation an einer Kurve dargestellt.

<sup>14</sup>Die Länge von Kurven kann erst im Rahmen der später zu behandelnden Integralrechnung exakt berechnet werden.

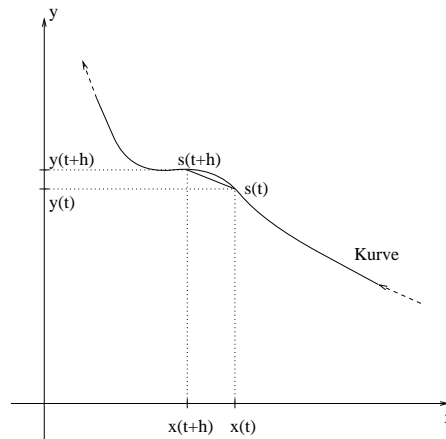


Abbildung 50: Differential der Bogenlänge

Die Länge der Sekante  $c = |\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)|$  berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras zu

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}.$$

Da die Distanz bzw. der Zeitraum  $h$  sehr klein ist, postulieren wir die Äquivalenz von  $c$  und dem Kurvenbogen  $\Delta s$  vom Punkt  $\mathbf{x}(t)$  bis zum Punkt  $\mathbf{x}(t+h)$ , also  $c \sim \Delta s$  für  $h \rightarrow 0$ . Den Kurvenbogen  $\Delta s$  kann man auch als Differenz der durchlaufenen Kurvenlänge  $s(t+h)$  und der durchlaufenen Kurvenlänge  $s(t)$  verstehen. Damit kann man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2},$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2}, \\ &= \sqrt{\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2}, \\ &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}. \end{aligned}$$

bilden.

**Definition 3.124.** (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

heißt Differential der Bogenlänge oder Bogenelement, wobei  $dt$  das Differential der unabhängigen Variablen  $t$  ist.

*Bemerkung 3.125.*

Wenn eine Kurve als Funktionsgraph gegeben ist, d.h., in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann, ergibt sich für das Differential der Bogenlänge

$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

und

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

Beispiel:

1) Gegeben ist der Viertelkreisbogen in Parameterform

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Für das Differential der Bogenlänge errechnet man

$$ds = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R dt.$$

Für den Tangentenvektor ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix},$$

und damit z.B. im Punkt  $(x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4}))$

$$\dot{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -R \frac{1}{\sqrt{2}} \\ R \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2) Gegeben ist die Sinuskurve von 0 bis  $\pi$ , also

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Für das Differential der Bogenlänge errechnet man

$$ds = \sqrt{1 + \cos^2 t} dt.$$

Für den Tangentenvektor ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix},$$

und damit z.B. im Punkt  $(\frac{\pi}{2}, 1)$

$$\dot{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.13.2 Krümmung einer Kurve

Die Krümmung einer Kurve ist, wie der Name sagt, ein Maß für die Abweichung einer Kurve von einer Geraden. Danach hat eine Gerade die Krümmung 0. Mathematisch faßt man den Begriff der Krümmung mit dem Verhältnis  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$  der Änderung des Kurventangenten-Anstellwinkels  $\alpha$  zur Änderung der Bogenlänge.

#### Definition 3.126.

Die Krümmung einer regulären Kurve  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$ ,  $a \leq t \leq b$ , mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beträgt im Kurvenpunkt  $P(t) = (x(t), y(t))$

$$\kappa(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^3}}.$$

Für den Fall, daß die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in der Form  $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$  gegeben ist, ergibt sich für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + f'(t)^2)^3}}.$$

$$R = \frac{1}{|\kappa|}$$

heißt Krümmungsradius.

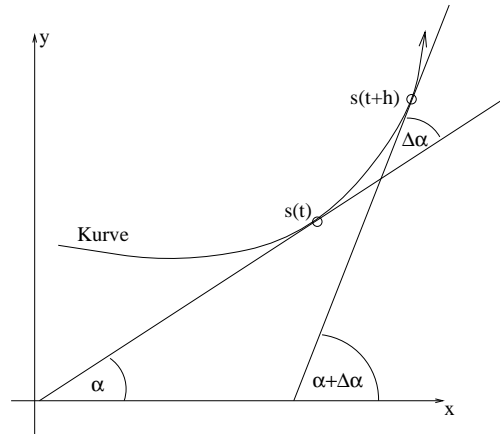


Abbildung 51: Krümmung

*Bemerkung 3.127.*

1) Der Krümmungskreis an einer Kurve in einem Punkt  $P$  ist dadurch charakterisiert, daß er die Kurve im Punkt  $P$  berührt, die gleich Tangente wie die Kurve im Punkt  $P$  hat und die gleiche zweite Ableitung wie die Kurve im Punkt  $P$  hat. Als Übung können mit diesen Informationen die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises berechnet werden.

2) Beim Bau technischer Anlagen ist es oft wichtig, nicht nur stetige und differenzierbare funktionale Zusammenhänge zu sichern, sondern z.B. Unstetigkeiten bzw. Sprungstellen in der Krümmung zu verhindern. Jedes Verlassen einer Kreiskurve (Radius  $R$ ) ab einem beliebigen Punkt des Kreises auf einer Tangente an den Kreis in diesem Punkt bedeutet einen Sprung in der Krümmung von  $\kappa = \frac{1}{R}$  auf  $\kappa = 0$ . Man kann diese Unstetigkeiten der Krümmung verhindern, wenn man zwischen Kreis und Gerade eine Kurve zwischenschaltet, deren Krümmung sich stetig von  $\frac{1}{R}$  zu 0 ändert.

3) Betrachten wir zum Beispiel ein Fahrzeug der Masse  $m$ , das mit einer Geschwindigkeit von  $v > 0$  durch eine Parabelkurve  $y = cx^2$  fährt. Die Fliehkraft  $Z$  beim Durchfahren errechnet sich durch die Formel  $Z = m v^2 R$ , wobei  $R = R(x)$  der jeweilige Krümmungsradius ist. Für den Krümmungsradius errechnet man

$$R = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{\sqrt{1 + 4cx^2}}{2c},$$

und erhält damit bei Durchfahren des Punktes  $P = (0, 0)$  der Kurve die Fliehkraft  $Z = \frac{m v^2}{2c}$ .

### 3.14 Integralrechnung

Neben der Berechnung von Flächeninhalten, Längen und Volumina geht es bei der Integralrechnung z.B. um die Bestimmung von Schwerpunkten, Trägheitsmomenten, der Arbeit, der Energie. Mit den Mitteln der Integralrechnung wird es möglich, den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen und die Länge einer Bahnkurve, wie in den Abbildungen 52 und 53 dargestellt zu berechnen.

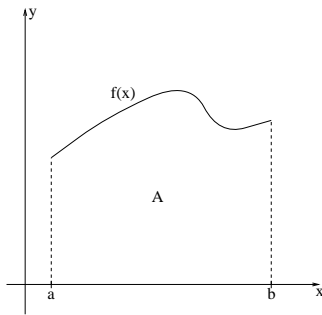


Abbildung 52: Fläche  $A$  unter dem Graph der Funktion  $f$

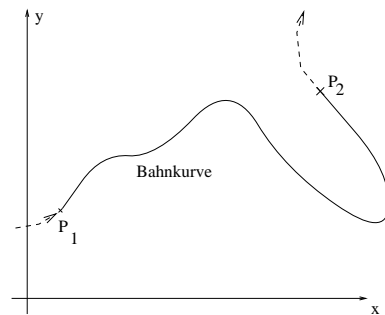


Abbildung 53: Länge der Kurve von  $P_1$  bis  $P_2$

Wir werden schnell feststellen, daß die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist, und damit die Integralrechnung nicht ohne die Differentialrechnung beherrschbar ist. Wir werden uns anfangs mit dem sogenannten unbestimmten Integral und mit Stammfunktionen befassen und das formale Integrieren erlernen, ehe wir uns mit dem bestimmten Integral zur Flächen- und Längenberechnung befassen (zu Beginn der HM II).

#### 3.14.1 Unbestimmtes Integral und Stammfunktion

**Definition 3.128.** (Stammfunktion)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Intervall  $I$  definierte reellwertige Funktion. Die differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von  $f$ .

**Definition 3.129.** (unbestimmtes Integral)

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann heißt

$$\int f(x) dx := F(x) + C \quad C = \text{const.}$$

unbestimmtes Integral der Funktion  $f$ . Die Konstante  $C$  heißt Integrationskonstante.

Das unbestimmte Integral einer Funktion  $f$  ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von  $f$ .

#### 3.14.2 Integrationsregeln und -techniken

Mit den Definitionen 3.128 und 3.129 wissen wir, daß die Funktion  $F(x) = \arctan x$  eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ist, und für das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$



gilt. Auf die Angabe der Grundintegrale von Funktionen wie  $x^a$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  soll hier verzichtet werden, da diese dem Formelblatt am Schluß dieses Skripts entnommen werden können. Aufgrund der Differentiationsregeln lassen sich nun Regeln für die unbestimmten Integrale herleiten.

**Satz 3.130.** (*Linearität des unbestimmten Integrals*)

Seien  $c_1$  und  $c_2$  reelle Konstanten und  $f$  und  $g$  Funktionen, die Stammfunktionen besitzen, dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Z.B. erhält man

$$\int \left( \frac{5}{1+x^2} + 3x^4 \right) dx = 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx + 3 \int x^4 dx = 5 \arctan x + \frac{3}{5} x^5 + C.$$

Aus der Kettenregel der Differentiation

$$[F(g(x))]'' = F'(g(x))g'(x) \quad \text{und} \quad F'(x) = f(x)$$

folgt die Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C. \quad (100)$$

**Satz 3.131.** (*Substitutionsregeln*)

Sei  $f$  stetig auf dem Intervall  $J$  und  $\varphi$  stetig differenzierbar auf dem Intervall  $I$ , wobei  $\varphi(I) \subset J$  gilt, und die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  existiert, dann gilt

1)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad \text{mit} \quad t = \varphi(x) \quad (101)$$

und

2)

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{mit} \quad x = \varphi(t) \quad (102)$$

*Bemerkung 3.132.*

Die Regeln 1 und 2 sind eigentlich identisch. Jedoch gibt es Integrale, bei denen die Regel 1 von rechts nach links betrachtet wird, und deshalb wurde dieser Fall als Regel 2 gesondert aufgeführt. Konkret bedeutet die Substitutionsregel 1 das Durchlaufen des folgenden Algorithmus:

- a)  $\varphi(x)$  wird durch  $t$  ersetzt (substituiert),
- b) wegen  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$  bzw.  $dt = \varphi'(x) dx$  wird  $\varphi'(x) dx$  durch  $dt$  ersetzt,
- c) das Integral  $\int f(t) dt$  wird berechnet (das sollte einfacher als die Berechnung des Integrals  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$  sein, denn sonst wäre die Mühe umsonst!),
- d)  $t$  wird durch  $\varphi(x)$  ersetzt (Rücksubstitution).

Für die Regel 2 ergibt sich der Algorithmus

- a)  $x$  wird durch  $\varphi(t)$  ersetzt (substituiert),

- b) wegen  $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$  bzw.  $dx = \varphi'(t) dt$  wird  $dx$  durch  $\varphi'(t) dt$  ersetzt,  
 c) das Integral  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  wird berechnet,  
 d)  $t$  wird durch  $\varphi^{-1}(x)$  ersetzt (Rücksubstitution).

Beispiele (wir beschränken uns hier auf die Regel 1, Beispiele der Regel 2 werden erst behandelt wenn wir weitere wichtige Integrations-Regeln kennengelernt haben):

1) **Korollar 3.133.**

Sei  $g$  eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen, dann gilt über die Substitution  $t = g(x)$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |g(x)| + C.$$

Wenn z.B. das Integral  $\int \frac{6x^2}{x^3+5} dx$  zu berechnen ist, erhält man mit der Substitution  $t = g(x) = x^3 + 5$  schließlich

$$\int \frac{6x^2}{x^3+5} dx = 2 \int \frac{1}{t} dt = 2 \ln |t| + C = 2 \ln |x^3 + 5| + C.$$

- 2) Betrachten wir das Integral  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ . Wir substituieren  $t = \ln x$  und erhalten nach dem oben skizzierten Algorithmus  $dx = \frac{1}{t} dt$  und damit

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C.$$

- 3) Das Integral  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  ist zu berechnen. Mit der Substitution  $t = \sin x$  erhält man

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Die nächste Integrationsregel beruht auf der Produktregel der Differentiation, also

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Integriert man die Gleichung, erhält man die Regel der partiellen Integration.

**Satz 3.134.** (partielle Integration)

Für zwei auf einem Intervall  $I$  stetig differenzierbare Funktionen  $u$  und  $v$  ist  $u \cdot v$  eine Stammfunktion von  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$  und es gilt

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx \quad \text{bzw.} \tag{103}$$

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

Beispiele:

1) Mit  $u' = \sin x$  und  $v = \sin x$  erhält man

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cos x \, dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx, \end{aligned}$$

und damit

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C.$$

2) Mit  $u' = e^x$  und  $v = x$  erhält man

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C.$$

3) Mit  $u' = \sin x$  und  $v = x$  erhält man

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

4) Ein Beispiel zur Anwendung der Substitutionsregel 2

Zu berechnen ist das Integral  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ . Die Substitution  $x = \tan t$  und damit  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} \, dt$  ergibt

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 t (1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t})^2} \, dt = \int \cos^2 t \, dt.$$

Mit der partiellen Integration erhält man mit  $u' = \cos t$  und  $v = \cos t$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C \\ &= \frac{1}{2}(\arctan x + \sin(\arctan x) \cos(\arctan x)) + C. \end{aligned}$$

Auf eine weitere Vereinfachung des Ergebnisses wird hier verzichtet.

### 3.14.3 Integration rationaler Funktionen und Partialbruchzerlegung

Im Grundlagenkapitel haben wir einige wichtige Eigenschaften von Polynomen mit reellen Koeffizienten besprochen, die sich als sehr nützlich bei der praktischen Bestimmung von Integralen rationaler Funktionen erweisen werden. Da man jede rationale Funktion als eine Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion in der Form  $f(x) = s(x) + \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ ,  $n < m$ , darstellen kann, reduziert sich das Problem der Integration von  $r(x)$  auf die Bestimmung einer Stammfunktion der echt gebrochen rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}.$$

Aus den Sätzen 1.47 und 13 kann man den folgenden Satz zur Zerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion in Partialbrüche herleiten. Wir wissen, daß es für  $q_m(x)$  nach Satz 1.43 eine Zerlegung der Art

$$q(x) = a_m \prod_{k=1}^r (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}, \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = m \quad (104)$$

gibt. Die  $x_k$  sind  $r$  reelle Nullstellen mit den Vielfachheiten  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Die Polynome  $(x^2 + p_j x + q_j)$  sind das Ergebnis der Multiplikation  $(x - w_j)(x - \bar{w}_j)$ , wobei  $w_j, \bar{w}_j$  insgesamt  $s$  Nullstellenpaare (komplex, konjugiert komplex) mit den Vielfachheiten  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) sind. Im Ergebnis der Multiplikation entstehen dabei reelle Koeffizienten  $p_j, q_j$ .

**Satz 3.135.** (reelle Partialbruchzerlegung)

Seien  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome mit reellen Koeffizienten,  $\deg p = n$  und  $\deg q = m$  und  $n < m$ . Auf der Grundlage der Faktorenzerlegung (104) des Nennerpolynoms  $q(x)$  gibt es für die echt gebrochen rationale Funktion  $r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  genau eine Zerlegung in Partialbrüche der Form

$$\begin{aligned} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = & \frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\ & + \frac{a_{21}}{x-x_2} + \frac{a_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{a_{r1}}{x-x_r} + \frac{a_{r2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \frac{a_{rm_r}}{(x-x_r)^{m_r}} \\ & + \frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{b_{1n_1}x+c_{1n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} \\ & + \frac{b_{21}x+c_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \cdots + \frac{b_{2n_2}x+c_{2n_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{b_{s1}x+c_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \cdots + \frac{b_{sn_s}x+c_{sn_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}, \end{aligned} \quad (105)$$

d.h., die Koeffizienten  $a, b, c$  sind eindeutig bestimmt (und auch bestimmbar).

**Bemerkung 3.136.**

Für die Koeffizienten  $a, b, c$  entsteht nach der Multiplikation der Gleichung (105) mit dem Nennerpolynom  $q_m(x)$  eine Gleichung der Form

$$p_n(x) = b_{m-1}(x), \quad n \leq m-1,$$

denn die Nennerpolynome der rechten Seite der Gleichung (105) kürzen sich weg, da sie alle Teiler des Polynoms  $q_m(x)$  sind. Ein Vergleich der Koeffizienten der Polynome  $p_n(x)$  und  $b_{m-1}(x)$  (2 Polynome sind gleich, wenn die Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von  $x$  übereinstimmen) ergibt ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen für die  $m$  Koeffizienten  $a, b, c$ .

## Beispiele:

1) Es sei zuerst an das Beispiel der Zerlegung der echt gebrochen rationalen Funktion  $\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$  aus dem Abschnitt 1.8.4 mit dem Ergebnis

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x-2}{(x^2-x+1)^2}$$

erinnert. Den Satz 3.135 anwenden heißt zuerst eine Zerlegung des Nennerpolynoms finden. Die Nullstellen des Nennerpolynoms waren das konjugiert-komplexe Paar

$$w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \bar{w}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

mit der Vielfachheit  $m_1 = 2$ . Damit ergibt sich nach der Formel (104)

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = [(x - w_1)(x - \bar{w}_1)]^2 = (x^2 - x + 1)^2.$$

Nach dem Satz 3.135 muß eine eindeutige Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2-x+1} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2-x+1)^2}$$

existieren, d.h., es muß eindeutig bestimmte Koeffizienten  $b_{11}, c_{11}, b_{12}, c_{12}$  geben.

Zur Bestimmung der Koeffizienten multiplizieren wir den Ansatz mit dem Nennerpolynom und erhalten aufgrund der gültigen Zerlegung für das Nennerpolynom die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= (b_{11}x + c_{11})(x^2 - x + 1) + b_{12}x + c_{12} \\ &= b_{11}x^3 + (c_{11} - b_{11})x^2 + (b_{11} + b_{12} - c_{11})x + c_{11} + c_{12}. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich das oben angesprochene Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ c_{11} \\ b_{12} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$b_{11} = 0, \quad c_{11} = 1, \quad b_{12} = 2, \quad c_{12} = -2,$$

und somit die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{2x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

2) Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 25}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}$$

so finden wir mit  $x_1 = -1$  sehr schnell eine Nullstelle, und damit auch bald die anderen beiden Nullstellen  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 5$ . Nach dem Satz 3.135 gibt es die Zerlegung

$$\frac{4x^2 - 7x + 25}{(x + 1)(x - 2)(x - 5)} = \frac{a_1}{x + 1} + \frac{a_2}{x - 2} + \frac{a_3}{x - 5}, \quad (106)$$

und nach der Multiplikation mit dem Nennerpolynom ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x + 25 &= a_1(x - 2)(x - 5) + a_2(x + 1)(x - 5) + a_3(x + 1)(x - 2) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (-7a_1 - 4a_2 - a_3)x + 10a_1 - 5a_2 - 2a_3 \end{aligned} \quad (107)$$

und der Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -4 & -1 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 5.$$

Es gibt mehrere Methoden zur Koeffizientenbestimmung:

- 1) Die in den beiden Beispielen durchgeführte Methode des Koeffizientenvergleichs führt wie gesehen auf ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem. Die Methode führt immer zum Erfolg, ist allerdings mitunter recht aufwendig.
- 2) Es geht oft auch einfacher, mit der sogenannten Grenzwertmethode. Wenn wir beim Beispiel 2 die Nullstellen nacheinander in die Gleichung (107) einsetzen, erhalten wir nacheinander die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4 + 7 + 25 &= a_1(-3)(-6) \iff a_1 = \frac{36}{18} = 2, \\ 16 - 14 + 25 &= a_2 3(-3) \iff a_2 = \frac{27}{-9} = -3, \\ 100 - 35 + 25 &= a_3 6 \cdot 3 \iff a_3 = \frac{90}{18} = 5. \end{aligned}$$

- 3) Eine dritte Möglichkeit der Koeffizientenbestimmung erhält man mit der sogenannten Methode des Zuhaltens, die nur für Linearfaktoren funktioniert. Z.B. multipliziert man die Gleichung (106) zuerst mit  $x + 1$  und erhält

$$\frac{4x^2 - 7x + 25}{(x - 2)(x - 5)} = a_1 + \frac{a_2(x + 1)}{x - 2} + \frac{a_3(x + 1)}{x - 5}$$

bzw. nach einsetzen von  $x = 1$  direkt  $a_1 = 2$ . Dies würde man auch erhalten, wenn man auf der linken Seite von (106) die Nullstelle  $x = -1$  einsetzt und den zu Null werdenden Term  $(x + 1)$  im Nenner zuhält (deshalb der Name). Mit den anderen Nullstellen verfährt man ebenso.

Die Schritte der Partialbruchzerlegung sind

- evtl. durchzuführende Polynomdivision zur Erzeugung einer echt gebrochen rationalen Funktion,
- Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms bzw. der Zerlegung in lineare und/oder quadratische Faktoren,
- Aufstellung des Ansatzes für die Partialbrüche,
- Bestimmung der Koeffizienten.

Wenn wir uns an das eigentliche Problem der Berechnung einer Stammfunktion einer echt gebrochen rationalen Funktion erinnern, haben wir mit der Partialbruchzerlegung statt dem Integral

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)} dx,$$

Integrale des Types

$$\text{A) } \int \frac{a}{(x - r)^\alpha} dx \quad \text{und} \quad \text{B) } \int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^\beta} dx$$

zu berechnen ( $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ,  $r, p, q \in \mathbb{R}$ ).

Die Integrale des Types A sind durch die Substitution  $t = x - r$  einfach zu berechnen, man erhält

$$I_A = \int \frac{a}{(x - r)^\alpha} dx = a \int \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} a \ln|x - r| & \text{für } \alpha = 1 \\ a \frac{1}{1 - \alpha} (x - r)^{-\alpha + 1} & \text{für } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Bei den Integralen des Types B ist anzumerken, daß  $4q - p^2 > 0$  gilt, da die quadratischen Polynome  $x^2 + px + q$  ja dadurch gekennzeichnet waren, daß sie keine reellen Nullstellen hatten. Für den Fall  $\beta = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} I_B &= \int \frac{bx + c}{x^2 + px + q} dx = \frac{b}{2} \int \frac{2x + p - p + 2\frac{c}{b}}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{b}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{b}{2} \int \frac{2\frac{c}{b} - p}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{b}{2} \ln(x^2 + px + q) + (c - p\frac{b}{2}) \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx \\ &= \frac{b}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{c - p\frac{b}{2}}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}})^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Nach der Substitution

$$t = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

erhält man schließlich

$$I_B = \frac{b}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{c - p\frac{b}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C. \quad (108)$$

Für  $\beta > 1$  gewinnt man aus dem Ansatz

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{c_1 x + c_2}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} + c_3 \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} \quad (109)$$

eine Rekursionsformel, indem man die zunächst unbestimmten Koeffizienten  $c_1, c_2, c_3$  durch Koeffizientenvergleich bestimmt, nachdem auf beiden Seiten differenziert und mit  $(x^2 + px + q)^\beta$  durchmultipliziert wurde. Man findet nach kurzer Rechnung

$$c_1 = \frac{2}{(\beta - 1)(4q - p^2)}, \quad c_2 = \frac{p}{(\beta - 1)(4q - p^2)}, \quad c_3 = \frac{2(2\beta - 3)}{(\beta - 1)(4q - p^2)}.$$

Wenn man berücksichtigt, daß

$$\left[\frac{1}{(x^2 + px + q)^\beta}\right]' = \frac{-\beta(2x + p)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} \text{ bzw. } \frac{1}{(x^2 + px + q)^\beta} = \int \frac{-\beta(2x + p)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} dx$$

gilt, erhält man durch geschicktes Ausklammern und Ergänzen mit einer "nahrhaften Null"<sup>15</sup> die Formel

$$\begin{aligned} \int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^\beta} dx &= \\ &= -\frac{b}{2(\beta - 1)(x^2 + px + q)^{\beta-1}} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}}. \end{aligned} \quad (110)$$

Damit hat man alle Formeln parat, um das unbestimmte Integral von gebrochen rationalen Funktionen zu bestimmen.

Die letzten Formeln sind Rekursionsformeln, in denen die Potenz  $\beta$  auf  $\beta - 1$  zurückgeführt wird. Dies ist solange zu tun, bis  $\beta - 1 = 1$  ist, denn dann hat man die obigen Integrale des Falles  $\beta = 1$  vorzuliegen.

Beispiele zum Umgang mit den Rekursionsformeln:

- 1) Es soll das Integral  $\int \frac{4x+6}{(x^2+2x+6)^2} dx$  berechnet werden. Da das Nennerpolynom keine reellen Nullstellen hat, ist keine weitere Zerlegung in Partialbrüche möglich und nötig. Wir erhalten durch Überlegung und Anwendung der Formeln (109) und (108)

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+6}{(x^2+2x+6)^2} dx &= 2 \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+6)^2} dx = 2 \int \frac{2x+2-2+3}{(x^2+2x+6)^2} dx \\ &= 2 \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+6)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x^2+2x+6)^2} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{u^2} du + 2 \int \frac{1}{(x^2+2x+6)^2} dx \quad (\text{Subst. } u = x^2 + 2x + 6) \\ &= -2 \frac{1}{x^2+2x+6} + 2 \left[ \frac{x+1}{10(x^2+2x+6)} + \frac{1}{10} \int \frac{1}{x^2+2x+6} dx \right] \\ &= \frac{x-9}{5(x^2+2x+6)} + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2+2x+6} dx \\ &= \frac{x-9}{5(x^2+2x+6)} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Unter einer "nahrhaften Null" versteht man einen Term der Art  $b - b$ , den man ohne Schaden z.B. zu einem Term  $ax$  addieren kann, so daß mit  $ax = ax + b - b$  ein Ausdruck entsteht, der oft Probleme löst.

- 2) Die Funktion  $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  kann nicht weiter in Partialbrüche zerlegt werden. Für das unbestimmte Integral erhält man mit der Substitution  $t = 1 + x^2$  recht schnell

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

- 3) Es soll das Integral

$$I = \int \frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6} dx$$

berechnet werden. Da das Zählerpolynom den Grad 3 und das Nennerpolynom mit 2 einen kleineren Grad hat, ist eine Polynomdivision durchzuführen, man erhält

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 10x + 19) : (x^2 + x - 6) = 2x - 3 \\ -(2x^3 + 2x^2 - 12x) \\ \hline (-3x^2 + 2x + 19) \\ -(-3x^2 - 3x + 18) \\ \hline (5x + 1) \end{array}$$

und damit

$$\frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6} = 2x - 3 + \frac{5x + 1}{x^2 + x - 6}.$$

Die Nullstellen des Nenners findet man mit  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -3$  und der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{5x + 1}{x^2 + x - 6} = \frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 3}.$$

Nach der Multiplikation mit  $x^2 + x - 6$  erhält man

$$5x + 1 = a_1(x + 3) + a_2(x - 2),$$

und nach Einsetzen von  $x = 2$  sofort  $a_1 = \frac{11}{5}$  und nach Einsetzen von  $x = -3$  den Koeffizienten  $a_2 = \frac{14}{5}$ . Für das Integral  $I$  ergibt sich damit

$$\begin{aligned} I &= \int (2x - 3) dx + \frac{11}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{5} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= x^2 - 3x + \frac{11}{5} \ln|x - 2| + \frac{14}{5} \ln|x + 3| + C. \end{aligned}$$

- 4) Abschließend soll das Integral

$$I = \int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5}$$

berechnet werden. Mit  $x_1 = 1$  findet man glücklicherweise schnell eine Nullstelle, so daß man durch  $x - 1$  dividieren kann. Es ergibt sich

$$(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5),$$

also mit  $x^3 + 3x^2 + x - 5$  ein Polynom, das wiederum 1 als Nullstelle hat, und wir erhalten

$$(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5) = (x - 1)^2(x^2 + 4x + 5).$$



Da  $x^2 + 4x + 5$  keine weiteren reellen Nullstellen hat, gibt es eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{1}{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{x^2+4x+5}.$$

Daraus folgt

$$1 = a_1(x-1)(x^2+4x+5) + a_2(x^2+4x+5) + (bx+c)(x-1)^2,$$

und durch Einsetzen von  $x = 1$  erhalten wir  $a_2 = \frac{1}{10}$ . Wenn man  $a_2(x^2+4x+5)$  auf die linke Seite bringt, erhält man

$$-\frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = a_1(x-1)(x^2+4x+5) + (bx+c)(x-1)^2.$$

Die Division durch  $x-1$  (die wegen der Gestalt der rechten Seite ohne Rest möglich sein muß) ergibt

$$-\frac{1}{10}x - \frac{1}{2} = a_1(x^2+4x+5) + (bx+c)(x-1), \quad (111)$$

und durch Einsetzen von  $x = 1$  erhält man  $a_1 = -\frac{3}{50}$ . Wenn man diesen Wert in (111) einsetzt, ergibt sich

$$\frac{3}{50}x^2 + \frac{7}{50}x - \frac{1}{5} = bx^2 + (c-b)x - c,$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man  $b = \frac{3}{50}$  und  $c = \frac{1}{5}$ . Damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{50} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{3}{50}x + \frac{1}{5}}{x^2+4x+5} dx \\ &= -\frac{3}{50} \ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} + \frac{3}{100} \int \frac{2x + \frac{20}{3}}{x^2+4x+5} dx \\ &= -\frac{3}{50} \ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} + \frac{3}{100} \int \frac{2x+4+\frac{8}{3}}{x^2+4x+5} dx \\ &= -\frac{3}{50} \ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} + \frac{3}{100} \ln(x^2+4x+5) + \frac{2}{25} \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \\ &= -\frac{3}{50} \ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} + \frac{3}{100} \ln(x^2+4x+5) + \frac{2}{25} \arctan(x+2) + C. \end{aligned}$$

Da die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist, läßt sich bei jeder Integration die Probe durch das Ableiten der erhaltenen Stammfunktion machen. Allerdings ist das im Falle der Beispiele 1 und 4 fast noch unangenehmer als die Integration.

*Bemerkung 3.137.*

1) Man kann beweisen, daß auf einem Intervall stetige Funktionen Stammfunktionen besitzen. Jedoch kann man die Stammfunktionen nicht immer geschlossen analytisch bestimmen. Eine der bekanntesten Funktionen, die nicht geschlossen integrierbar sind, ist die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

In diesen Fällen kann man die Stammfunktionen z.B. durch TAYLOR-Reihen annähern.

2) In der Formeltabelle am Ende dieses Skripts sind eine Reihe von Substitutionen angegeben, die in vielen Fällen auf die Integration rationaler Funktionen führen. Die Integrale rationaler

Funktionen lassen sich immer in geschlossener Form angeben, wenngleich oft auch sehr mühselig. So führt z.B. im Falle einer Funktion  $R(\sin x, \cos x)$  (als Beispiel sei hier

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{5 \sin x + 3 \cos x}{4 \cos^2 x + 1}$$

genannt) die Substitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  immer auf die Integration einer rationalen Funktion  $r(t)$ . Dabei wird benutzt, daß man  $\sin x$  und  $\cos x$  durch rationale Funktionen von  $\tan \frac{x}{2}$  ersetzen kann (s.auch Formeltabelle).

### 3.14.4 Bestimmtes Integral

Anfangs wurde mit der Berechnung von Flächeninhalten auf ein wichtiges Ziel der Integralrechnung hingewiesen. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine positive und beschränkte Funktion. Die in der Abbildung 54 schraffierte Punktmenge heißt Fläche von  $f$  auf  $[a, b]$  und besteht aus allen Punkten  $(x, y)$  mit  $a \leq x \leq b$  und  $0 \leq y \leq f(x)$ . Ziel ist es, den Inhalt der Fläche zu bestimmen, und auch zu erklären, was man darunter versteht. Wir gehen dabei von unserem Grundwissen aus, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Produkt von Länge und Breite ist.

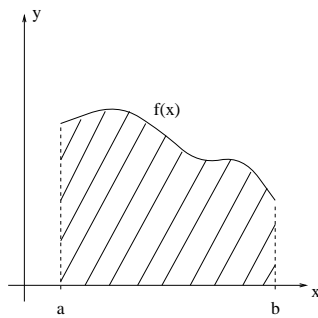


Abbildung 54: Fläche von  $f$  auf  $[a, b]$

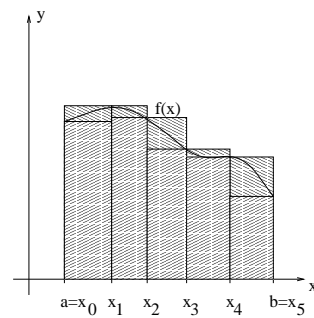


Abbildung 55: Zerlegung  $Z$

Es wird eine Streifeneinteilung wie in Abb. 55 gebildet, wobei jeweils Streifen der Breite  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , mit den beliebig gewählten Zahlen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (112)$$

betrachtet werden. Die Menge der so gebildeten Teilintervalle

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

heißt Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$ . Die größte der Teilintervalllängen  $\Delta x_i$

$$|Z| := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i$$

heißt Feinheit der Zerlegung  $Z$ . Wie in der Abb. 55 angedeutet, bildet man in jedem Streifen zwei Rechtecke, die die Fläche von  $f$  von "oben" und von "unten" annähern. Wegen der Beschränktheit von  $f$  existiert auf allen Teilintervallen Infimum und Supremum von  $f$

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (113)$$

Über dem Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  entsteht ein "unteres" Rechteck mit dem Flächeninhalt  $m_i \Delta x_i$  und ein "oberes" Rechteck mit dem Flächeninhalt  $M_i \Delta x_i$ . Eine Summierung über  $i$  ergibt

$$\begin{aligned} S_f(Z) &:= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, & \text{genannt } \textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ bezügl. } Z, \\ s_f(Z) &:= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, & \text{genannt } \textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ bezügl. } Z. \end{aligned} \quad (114)$$

Es ist offensichtlich, daß bei immer feiner werdenden Zerlegungen die Obersummen immer kleiner und die Untersummen immer größer werden. Damit ist es sinnvoll, Infimum aller Obersummen und Supremum aller Untersummen zu bilden,

$$\begin{aligned} \bar{I}_f &:= \inf_Z S_f(Z), & \text{genannt } \textit{Oberintegral} \text{ von } f, \\ \underline{I}_f &:= \sup_Z s_f(Z), & \text{genannt } \textit{Unterintegral} \text{ von } f, \end{aligned} \quad (115)$$

dabei bedeutet  $\inf_Z$  und  $\sup_Z$ , daß das Supremum bzw. Infimum über der Menge aller Zerlegungen gebildet wird. Sind  $Z_1$  und  $Z_2$  zwei unterschiedliche Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$ , dann kann man eine verfeinerte Zerlegung  $Z$  aus den Durchschnitten der Teilintervalle von  $Z_1$  und  $Z_2$  bilden. Es ist dann offensichtlich

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2),$$

und daraus folgt, daß die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist, und die Menge der Untersummen nach oben. Daraus folgt die Existenz von  $\bar{I}_f$  und  $\underline{I}_f$  und

$$\underline{I}_f \leq \bar{I}_f.$$

Für stetige Funktionen auf jeden Fall, aber auch für viele andere übliche Funktionen ist  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ . In solchen Fällen nennt man die Zahl

$$I := \underline{I}_f = \bar{I}_f$$

den Flächeninhalt von  $f$  auf  $[a, b]$ . Dieser Flächeninhalt wird das bestimmte Integral von  $f$  auf  $[a, b]$  genannt und durch das Symbol

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

beschrieben. Die Voraussetzung  $f > 0$  haben wir nur benutzt, um die Anschaulichkeit der eben durchgeführten Diskussion zu erhöhen. Auf sie kann bei der folgenden allgemeinen Definition des bestimmten Integrals verzichtet werden.

**Definition 3.138.** (bestimmtes Integral)

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

(I) Man betrachtet eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Die  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  heißen Teilungspunkte von  $Z$ . Die Zahl

$$|Z| := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

heißt die Feinheit von  $Z$ .

(II) Mit

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

bildet man

$$S_f(Z) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \text{genannt Obersumme von } f \text{ bezügl. } Z,$$

$$s_f(Z) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \text{genannt Untersumme von } f \text{ bezügl. } Z.$$

und

$$\bar{I}_f := \inf_Z S_f(Z), \quad \text{genannt Oberintegral von } f,$$

$$\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z), \quad \text{genannt Unterintegral von } f.$$

Infimum und Supremum werden dabei bezügl. sämtlicher denkbarer Zerlegungen  $Z$  von  $[a, b]$  gebildet.

(III) Stimmen Ober- und Unterintegral von  $f$  auf  $[a, b]$  überein, so heißt  $f$  integrierbar auf  $[a, b]$ . In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$  das bestimmte Integral von  $f$  auf  $[a, b]$  und wird mit

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

**Satz 3.139.**

- a) Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar.  
 b) Jede stückweise stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar.

**Definition 3.140.** (RIEMANNsche Summen)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion,

$Z = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$

und  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , beliebige Punkte aus den Teilintervallen, dann heißt

$$R = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (116)$$

RIEMANNsche Summe von  $f$  bezügl.  $Z$  und  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

**Satz 3.141.** (RIEMANNsches Integral)

Für jede beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$f$  ist genau dann integrierbar, wenn jede Folge RIEMANNscher Summen  $R_k$  von  $f$ , bei denen die Feinheiten  $|Z_k|$  der zugehörigen Zerlegungen gegen Null streben, konvergiert.

Jede dieser Folgen  $(R_k)$  konvergiert gegen denselben Grenzwert, und dieser ist gleich  $\int_a^b f(x) dx$ , also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \int_a^b f(x) dx.$$

**Satz 3.142.**

a) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a). \quad (117)$$

b) (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sind die Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und ist  $g(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (118)$$

**Satz 3.143.** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  stetig, dann ist die Funktion  $F$ , definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad (x, a \in I), \quad (119)$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

**Satz 3.144.** (zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $F$  Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$ , so gilt für beliebige  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

**Satz 3.145.** (Rechenregeln)

Seien  $f$  und  $g$  integrierbare Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ ,  $a < c < b$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_a^b c_1 f + c_2 g dx = c_1 \int_a^b f dx + c_2 \int_a^b g dx, \quad (120)$$

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx, \quad (121)$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx, \quad (122)$$

$$f \geq 0 \text{ auf } [a, b] \longrightarrow \int_a^b f dx \geq 0, \quad (123)$$

$$\text{ist } f \text{ auf } [a, b] \text{ stetig und nichtnegativ sowie } \int_a^b f dx = 0 \longrightarrow f = 0 \quad (124)$$

*Bemerkung 3.146.*

1) In den Sätzen 3.143 und 3.144 kann die Voraussetzung der Stetigkeit von  $f$  reduziert werden auf die Forderung der stückweisen Stetigkeit, d.h., der Beschränktheit und der Existenz von nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen von  $f$ .

2) Diese Sätze 3.143 und 3.144 heißen nicht umsonst **Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung**, denn sie stellen die Verbindung zwischen unbestimmten und bestimmten Integral her.

Wir haben zwar schon eine Vielzahl von Stammfunktionen bzw. unbestimmten Integralen berechnet, wußten aber bisher noch nicht so recht wozu. Mit den Sätzen 3.143 und 3.144 können wir nun mit einer berechneten Stammfunktion z.B. einen Flächeninhalt, oder ganz allgemein, ein bestimmtes Integral berechnen.

Beispiele:

1) Berechnet werden soll der Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $g(x) = x^2$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  eingeschlossen wird (s.auch Abb. 56).

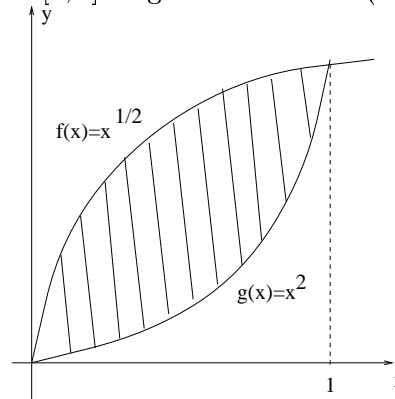


Abbildung 56: Fläche zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $[0, 1]$

Man erhält

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) Berechnet werden soll die Länge einer Bahnkurve. Wir erinnern uns daran, daß das Bogen-differential die Form

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

hatte. Für die Länge der Bahnkurve, die beginnend von Zeitpunkt  $t_0$  bis zum Zeitpunkt  $t_1$  abgefahren wird, erhält man mit

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

gewissermaßen die Summe aller Bogenelemente zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$ . Betrachten wir die Kurve  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T = (t, \sqrt{1-t^2})^T$ ,  $t \in [0, 1]$ , also einen Viertelkreisbogen. Für die Länge ergibt sich

$$s = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} \, dt.$$

Wir berechnen zuerst eine Stammfunktion von  $f(t) = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ . Mit der Substitution  $t = \sin u$  und  $dt = \cos u \, du$  erhalten wir

$$F(t) = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \int \frac{1}{\cos u} \cos u \, du = \int du = u + C = \arcsin t + C.$$

Damit ergibt sich

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} \, dt = F(1) - F(0) = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Einige wichtige Formeln

1.) Wichtige Ableitungen

Funktion	Ableitung	Bemerkung	Funktion	Ableitung	Bemerkung
$C$ (Konstante)	$0$		$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch x$	
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha$ reell	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sh x$	
$\ln x $	$\frac{1}{x}$		$\tanh x$	$\frac{1}{ch^2 x}$	
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\coth x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	
$e^x$	$e^x$		$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ x  < 1$
$a^x$	$a^x \ln a$	$a > 0$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ x  < 1$
$\sin x$	$\cos x$		$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x  < 1$
$\cos x$	$-\sin x$		$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$	$ x  > 1$
$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$	$\operatorname{arc} \cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\operatorname{arc} \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{arc} \cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

2.) Einige Substitutionen ( $R$  bezeichnet rationale Funktion,  $m, n, k$  natürliche Zahlen)

Integral	Substitution
$\int R(\sinh x, \cosh x, e^x) dx$	$t = e^x$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \tan \frac{x}{2} \quad (dx = \frac{2}{1+t^2} dt)$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$	$t = \tan x$
$\int R(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$
$\int R(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx$	$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0 \quad t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sin t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sinh t$
$\int R(x, \sqrt{(x + \beta)^2 - \alpha^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \cosh t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}) dx$	$\alpha > 0, t = \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} + x\sqrt{\alpha}$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{x}, (r \text{ kgV der Nenner von } m \text{ und } n)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\alpha + \beta x^n} \quad (q \text{ Nenner von } k)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} + k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\frac{\alpha + \beta x^n}{x^n}} \quad (q \text{ Nenner von } k)$

3.) Einige unbestimmte Integrale

Integral	eine Stammfunktion
$\int \sin^n(\alpha x) dx$	$= -\frac{\sin^{n-1}(\alpha x) \cos(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \cos^n(\alpha x) dx$	$= \frac{\cos^{n-1}(\alpha x) \sin(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx$	$= \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctan}\left(\frac{x+b}{\sqrt{D}}\right), \quad D = c - b^2 > 0$
$\int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{x+b}{2(n-1)D(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)D} \int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{(x+\beta)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2\beta-2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$

4.) Identitäten für trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \cos x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \tan x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - (\tan \frac{x}{2})^2} & \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{2 \tan \frac{x}{2}} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

5.) Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu, \quad \binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

## Index

- a posteriori Abschätzung 158
- a priori Abschätzung 158
- Abbildung 12
- abgeschlossene Menge 134
- Ableitung der Grundfunktionen 138
- Ableitung der Umkehrfunktion 138
- Ableitung 136
- Abstand Punkt-Ebene 102
- Abstand Punkt-Gerade 100
- Adjunkte 44
- arithmetisches Mittel 19
- Aussageform 4
- Aussage 4
- Basisvektoren 91
- Basiswechsel 87
- Betrag einer komplexen Zahl 26
- Betrag eines Vektors 91
- bijektive Abbildung 12
- Bild einer linearen Abbildung 86
- Bogenlänge, Bogendifferential 162
- charakteristisches Polynom 77
- Defekt einer linearen Abbildung 87
- Determinante 43
- Differential, totales 141
- Differenzenquotient 136
- Differenzierbarkeit 136
- Dreiecksungleichung 17
- Ebene 101
- Eigenvektor 76
- Eigenwert 76
- Einheitsmatrix 54
- Elementarmatrizen 64
- Exponentialfunktion 112,128
- Extremalaufgaben 153
- Fehlerrechnung 143
- Fixpunkt 156
- Folgen reeller Zahlen 124
- Formeln von MOIVRE 31
- Funktion, beschränkte 109
- Funktion, elementare 112
- Funktion, gerade 110
- Funktion, konkave 110
- Funktion, konvexe 110
- Funktion, periodische 111
- Funktion, rationale 40
- Funktion, trigonometrische 111
- Funktion, ungerade 110
- Funktion 105
- geometrisches Mittel 19
- Gerade 99
- Grad eines Polynoms 32
- Graph einer Funktion 111
- Grenzwert einer Folge 125
- Grenzwert einer Funktion 117
- Gruppe 15
- Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 179
- hinreichende Bedingung für Extrema 153
- Häufungspunkt einer Folge 126
- Häufungspunkt 116
- Infimum 126
- injektive Abbildung 12
- Integral, bestimmtes 176ff
- Integral, unbestimmtes 166
- Integral, RIEMANNsches 178
- Integration rationaler Funktionen 169
- inverse Matrix 57
- inverse Matrix 66
- Kern einer linearen Abbildung 86
- Kettenregel 138
- kompakte Menge 134
- komplexe Zahl 26
- Koordinaten eines Vektors 91
- Krümmung einer Kurve 164
- Krümmungsradius 165
- Kurven in der Ebene 161
- Körper 16
- lineare Abbildung 83
- lineare Approximation 141
- lineares Gleichungssystem 43
- lineares Gleichungssystem 44
- logarithmische Differentiation 140
- logische Operationen 5
- Matrix, reguläre 56
- Matrix 52
- Maximum 133
- Mclaurinsche Formel 150
- Mengenoperationen 10
- Menge 9
- Minimum 133
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 145
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 179
- Monotonie von Funktionen 110
- Normale an einer Kurve 162
- notwendige Bedingung für Extrema 153



- Nullfolge 124
- Nullstelle eines Polynoms 33
- Oberintegral 177
- Obersummen 177
- offene Menge in  $\mathbb{R}$  116
- Ordnung von Größen 121
- Partialbruchzerlegung, komplexe 40
- Partialbruchzerlegung, reell 170
- partielle Integration 168
- Polynomdivision 33
- Polynominterpolation 33
- Polynomzerlegung 34
- Polynom 32
- Quantoren 8
- Rang einer linearen Abbildung 87
- Rang einer Matrix 60
- Regeln von l'Hospital 147
- Restglied von Lagrange 150
- Ring 16
- Satz von Rolle 145
- Satz von Taylor 148
- Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  82
- Skalarprodukt 94
- Spatprodukt 94
- Stammfunktion 166
- Stetigkeit einer Funktion 129
- Stetigkeit 115
- Substitutionsregel 167
- Supremum 126
- surjektive Abbildung 12
- Tangente an einer Kurve 162
- Taylorreihe 148
- unendlich große Größen 121
- unendlich kleine Größen 121
- Unstetigkeitsstelle 130
- Unterdeterminante 60
- Unterintegral 177
- Untersummen 177
- Vektorprodukt 96
- Vektorraum, linearer Raum 80
- Vektorrechnung 90
- Vektor 90
- vollständige Induktion 13
- BANACHscher Fixpunktsatz 156
- BERNOULLISCHE Ungleichung 19
- CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 18
- CRAMERSche Regel 50
- EULERSchen Formel 29
- GAUSSscher Algorithmus 62
- GAUSSsche Zahlenebene 27
- HESSEsche Normalform 102
- HORNER-Schema 37
- KRONECKER-Symbol 54
- NEWTON-Verfahren 158
- SARRUSSche Regel 46

**Literatur**

- [1] Meyberg, Vachenauer  
*Höhere Mathematik* in 2 Bänden,  
Springer-Verlag
- [2] Burg, Haf, Wille  
*Höhere Mathematik für Ingenieure* in 5 Bänden,  
Teubner-Verlag Stuttgart
- [3] Vorlesungen zur Höheren Mathematik für Ingenieure am Fachbereich Mathematik der TU  
Berlin von H. Bausch, K. Kutzler, B. Herz und D. Krüger
- [4] Jeffrey  
*Mathematik für Ing. und Naturwissenschaftler* in 2 Bänden,  
Verlag Chemie
- [5] Bronstein, Semendjajew  
*Taschenbuch der Mathematik*,  
Teubner-Verlag
- [6] Wüst  
*Höhere Mathematik für Physiker* in 2 Bänden,  
Verlag W. de Gruyter
- [7] Merziger, Wirth  
*Repetitorium der Höheren Mathematik*,  
Binomi-Verlag