

Höhere Mathematik für Ingenieure II
Script zur Vorlesung an der TU Berlin
im SS 99

Günter Bärowolf ¹

April 99 - Juli 99, überarbeitet Februar-Mai 2000

¹Technische Universität Berlin, email:baerwolf@math.tu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	3
1	Integralrechnung	4
1.1	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	4
1.2	Parameterintegrale	5
1.3	Uneigentliche Integrale	7
1.4	Numerische Integration	12
1.4.1	Trapezregel	13
1.4.2	Simpson'sche Formel	13
1.4.3	Fehler der numerischen Integration	15
1.5	Interpolation	15
1.5.1	Lagrange-Interpolation	16
1.5.2	Newton-Interpolation	16
1.5.3	Spline-Interpolation	18
1.5.4	Vor- und Nachteile von Polynominterpolationen und Spline-Interpolationen	20
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	21
2.1	Einführende Beispiele	21
2.2	Allgemeine Begriffe	21
2.3	Differentialgleichungen 1. Ordnung - Allgemeines	22
2.4	DGLn mit trennbaren Variablen	23
2.4.1	Ähnlichkeits-DGL	25
2.4.2	Lineare Differentialgleichungen	26
2.5	Lineare Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung	28
2.5.1	Homogene lineare Differentialgleichungssysteme 1-ter Ordnung	29
2.5.2	Inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme 1-ter Ordnung	30
2.6	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung	31
2.6.1	Lineare DGLn n-ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	31
2.6.2	Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	35
2.6.3	Inhomogene lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	38
2.6.4	Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und "einfachen" Inhomogenitäten	40
2.7	Spezielle reduzierbare DGLn 2.Ordnung	46
2.7.1	Die DGL vom Typ $F(x, y', y'') = 0$	46
2.7.2	Die DGL vom Typ $F(y, y', y'') = 0$	47
2.8	Numerische Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLn	48
2.8.1	Die Methode von Euler	48
2.8.2	Diskretisationsfehler und Fehlerordnung	49
2.8.3	Verbesserte Polygonzugmethode und Trapezmethode	52
2.8.4	Runge-Kutta-Verfahren	54
3	Reihen	57
3.1	Zahlenreihen	57
3.1.1	Konvergenz unendlicher Reihen	57
3.1.2	Allgemeine Konvergenzkriterien	59
3.1.3	Absolut konvergente Reihen	60
3.1.4	Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen	61
3.1.5	Integralkriterium für Reihen	63
3.2	Funktionenfolgen*	64

3.3	Gleichmäßig konvergente Reihen	66
3.4	Potenzreihen	68
3.5	Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen sowie Differenzieren und Integrieren	69
3.6	Konstruktion von Reihen	71
3.7	Anwendung von Potenzreihen zur numerischen Intergalberechnung und zur Lösung von DGLn	73
4	Lineare Algebra II	77
4.1	Grundlagen	77
4.2	Transformation und Diagonalisierung	80
4.3	Symmetrische reelle Matrizen und ihre EW	81
4.4	Hauptachsentransformation	82
4.5	Klassifikation von Quadriken	83
4.6	Anwendung der Hauptachsentransformationen und Diagonalisierung	84
4.6.1	Lösung eines linearen DGL-Systems	84
4.6.2	Klassifikation einer Quadrik	85
5	Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	87
5.1	Eigenschaften von Punktmenen aus dem \mathbb{R}^n	87
5.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher	90
5.3	Kurven im \mathbb{R}^n	91
5.4	Stetigkeit von Abbildungen	96
5.5	Partielle Ableitung einer Funktion	97
5.6	Ableitungsmatrix und Hesse-Matrix	100
5.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen	102
5.8	Differenzierbarkeitsregeln und die Richtungsableitung	103
5.9	Lineare Approximation	104
5.10	Totales Differential	105
5.11	Taylorformel und Mittelwertsatz	107
5.11.1	Taylorformel im \mathbb{R}^n	107
5.11.2	Taylorpolynom 2. Grades	109
5.12	Satz über implizite Funktionen	110
5.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen	112
5.14	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen	116
5.15	Ausgleichsrechnung	118
5.16	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, Newton-Verfahren	120

0 Vorbemerkungen

Angangspunkt für die Vorlesung HM II für Ingenieure ist wie im 1. Semester die Frage, womit der Ingenieur in seiner Arbeit konfrontiert wird. Es entstehen mathematische Aufgaben u.a. bei

- der mathematischen Modellierung von technischen Prozessen (z.B. chemische Reaktionen, Rad-Schiene-Systeme, Dampferzeuger),
- der Optimierung von Prozessabläufen,
- der Beschreibung von natürlichen Phänomenen wie Klima, Umwelt, aber auch z.B. der Bevölkerungsentwicklung (Populationsdynamik) und
- der Experimentauswertung.

Die genannten Aufgabenstellungen bedeuten konkret

- die Lösung von Differentialgleichungen,
- die Lösung von Eigenwertproblemen,
- die Auswertung von Integralen,
- die Bestimmung von Extremalstellen von Funktionen,
- die Interpolation von Meßwerten und
- die näherungsweise Beschreibung von nichtlinearen Zusammenhängen durch lineare oder polynomiale Beziehungen.

Im Unterschied zur HM I werden auch funktionale Zusammenhänge, die von mehreren unabhängigen Variablen bestimmt werden, behandelt.

Die Themenabfolge und die Themenwahl richtete sich nach den in den letzten 3 Jahren gehaltenen "Höhere Mathematik für Ingenieure"-Veranstaltungen meiner Kollegen. Da die "Höhere Mathematik für Ingenieure" parallel gelesen wird, ist eine gewisse Synchronität zur Vorlesung von Prof. H. Bausch angestrebt worden, da in Übungen und Tutorien vom gleichen thematischen Fortgang der Vorlesungen ausgegangen wird. Deshalb habe ich auch Bezug auf die Vorlesung von H. Bausch vom Sommersemester 1998 genommen.

Ich halte die dadurch vorgegebene Reihenfolge der Themen, die Mischung von algebraischen und analytischen Themen sowie die sehr große Stofffülle für überdenkenswert und werde dies auch in die laufenden Diskussionen um die Gestaltung von Service-Veranstaltungen des FB Mathematik für Ingenieure einbringen.

Dieses Skript kann und will nicht die Standard-Lehrbücher der "Höheren Mathematik für Ingenieure" [1], [4], [6], [5] oder [7] ersetzen, soll aber die mathematischen Themen incl. der grundlegenden Axiome und Definitionen geschlossen, wenn auch weitestgehend ohne sophistische Beweise, darstellen. Aus diesem Grund werden im Skript auch Themen angesprochen, für die in der Vorlesung kein Raum bleibt, die aber hinsichtlich einer halbwegs geschlossenen Darstellung interessant sind. Da diese Themen bei Klausuren und Prüfungen von Ingenieurstudenten nicht gefragt sind, werden die entsprechenden Abschnitte mit einem * versehen, d.h. sie können, müssen aber nicht gelesen werden.

Da das Skript immer unter Zeitdruck geschrieben wurde, sind Fehler (hoffentlich nicht zu viele) nicht zu vermeiden. Den Studenten, meiner Kollegin E. Schwarz und meinem Kollegen Dr. G. Seifert, die freundlicherweise bereit waren das Manuskript auf offensichtliche Fehler durchzusehen, möchte ich recht herzlich danken.

1 Integralrechnung

1.1 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Obwohl die Berechnung von Oberflächenintegralen erst im Rahmen der Integralrechnung im \mathbb{R}^n ausführlicher behandelt wird, kann man den Inhalt der Oberfläche bestimmter Körper mit recht einfachen Integralen berechnen.

Definition 1.1. (Rotationskörper)

Sei $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$ eine stetige Funktion. Unter einem Rotationskörper der Funktion f versteht man den Körper, der durch die Rotation des Funktionsgraphen $\{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$ um die x -Achse entsteht.

Das Volumen dieses Körpers kann nun wie folgt berechnet werden.

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1, \quad x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n}.$$

Wenn wir uns aus dem Rotationskörper eine Scheibe über dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ herauschneiden, so erhalten wir einen Kegel, dessen Volumen V_i näherungsweise gleich

$$V_i \approx f^2(x_i) \pi h$$

ist. Damit wird das gesamte Volumen des Rotationskörpers näherungsweise zu

$$V \approx \sum_0^{n-1} f^2(x_i) \pi h, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Mit dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ können wir von der Summe zum Integral übergehen und folgendes anmerken.

Bemerkung 1.2. (Volumen eines Rotationskörpers)

Das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird durch

$$V := \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

erklärt.

Beispiel:

Zur Berechnung des Kugelvolumens einer Kugel mit dem Radius R betrachten wir die Funktion

$$f(x) = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}, \quad x \in [-R, R].$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Rotationskörper von f genau die Kugel mit dem Radius R ist. Für das Kugelvolumen errechnen wir nun

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R R^2 \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) dx = \pi R^2 \int_{-R}^R \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) dx \\ &= \pi R^2 \left(x - \frac{x^3}{3R^2}\right) \Big|_{-R}^R = \pi R^2 \left[R - \frac{R}{3} + R - \frac{R}{3}\right] \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Ebenso einfach ist nun die Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers. Wir benutzen dazu die gleichen Teilintervalle wie bei der Volumenberechnung, und wenn wir aus dem Rotationskörper eine Scheibe über dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ herauschneiden, so erhalten wir einen Kegel, dessen Oberfläche F_i näherungsweise gleich

$$F_i \approx 2\pi f(x_i) \Delta s$$

ist, wobei sich aus dem Satz des Pythagoras $\Delta s = \sqrt{h^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$ ergibt. Damit ergibt sich die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers näherungsweise zu

$$F \approx \sum_0^{n-1} 2\pi f(\xi) \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}\right]^2} h.$$

Mit dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ bzw. $h \rightarrow 0$ können wir von der Summe zum Integral übergehen und folgendes feststellen.

Bemerkung 1.3. (Mantelfläche eines Rotationskörpers)

Die Oberfläche des Rotationskörpers der Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird durch

$$F := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

erklärt.

1.2 Parameterintegrale

Mit der Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

der Bessel-Funktion

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt. \quad n \in \mathbb{N},$$

oder der Laplace-Transformierten einer Funktion

$$F(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt$$

treten in der Mathematik, der Physik und den meisten Ingenieurwissenschaften Funktionen auf, die durch Integrale definiert sind. Dabei ist die unabhängige Veränderliche x jeweils ein Parameter des Integrals. Da es in vielen dieser Fälle nicht möglich ist eine Stammfunktion zu berechnen, stellt sich die Frage nach Regeln für die Differentiation der Integrale nach dem Parameter. Dazu sollen im Folgenden einige Regeln und Eigenschaften dargelegt werden.

Satz 1.4. (*bestimmte Parameterintegrale*)

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene reelle Intervalle und die Funktion f stetig bez. des Parameters x und integrierbar bez. der Veränderlichen y . Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad a \leq x \leq b,$$

- F ist in $[a, b]$ stetig,

- ist zusätzlich f auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar mit der Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{df(x, y)}{dx} dy \quad (1)$$

Beispiel:

Betrachten wir die Bessel-Funktion, die in der Physik eine sehr große Rolle spielt. Gemäß dem eben formulierten Satz können wir die Ableitung ausrechnen, es ergibt sich

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \cdot \sin t dt .$$

Hängen im Parameterintegral die Integrationsgrenzen noch vom Parameter x ab, dann gilt der folgende Satz.

Satz 1.5. (Leibniz-Regel)

Sind neben den Voraussetzungen des Satzes 1.4 die Funktionen $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{df(x, y)}{dx} dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) . \end{aligned} \quad (2)$$

Beweis.

Es soll hier nur der Beweis für den Fall konstanter Integrationsgrenzen angedeutet werden. Schreibt man $F'(x)$ als Grenzwert eines Differenzenquotienten, so erhält man

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [F(x + \Delta x) - F(x)] ,$$

und damit

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy .$$

Wenn man nutzt, daß der Limes unter das Integralzeichen gezogen werden kann (soll hier vorausgesetzt werden), dann ist der Beweis erbracht. \square

Beispiel:

Betrachten wir das Parameterintegral

$$J(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{\sin xt}{xt} dt$$

so erhalten wir für die Ableitung nach dem Satz 1.5

$$J'(x) = \int_1^{1+x^2} \left[\frac{\cos xt}{xt} t - \frac{\sin xt}{(xt)^2} t \right] dt + \frac{\sin x(1+x^2)}{x(1+x^2)} 2x - \frac{\sin x}{x} \cdot 0 .$$

1.3 Uneigentliche Integrale

Bei den bestimmten Integralen hatten wir

- von der zu integrierenden Funktion die Beschränktheit gefordert und
- endliche Integrationsgrenzen vorausgesetzt.

Was passiert, wenn eine der beiden Voraussetzungen nicht erfüllt ist, d.h. wenn z.B. ein Integral der Form

$$\int_0^1 (-\ln x) dx$$

betrachtet wird? Die Logarithmus-Funktion strebt für $x \rightarrow 0$ gegen $-\infty$. Allerdings ist das Integral

$$\int_\epsilon^1 (-\ln x) dx$$

für jedes noch so kleine positive ϵ definiert, so daß man auch den Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 (-\ln x) dx$$

untersuchen kann. Wenn wir das tun, erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 (-\ln x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-x \ln x + x] \Big|_\epsilon^1 = 1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon).$$

Die Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \epsilon - 1}{1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1/\epsilon}{-1/\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\epsilon) = 0$$

schließlich

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 (-\ln x) dx = 1.$$

Wenn man das Integral als Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse, dem Graph der Funktion und der y-Achse versteht, so haben wir durch die obige Grenzwertbetrachtung den Flächeninhalt 1 berechnet.

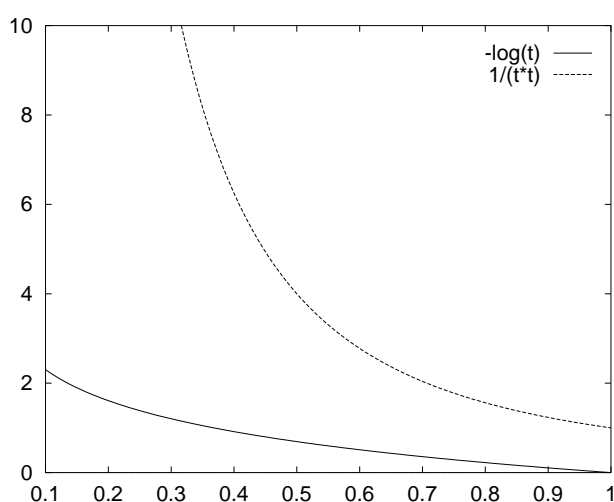
Betrachten wir nun andererseits das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx,$$

so stellen wir fest, daß die Funktion $\frac{1}{x^2}$ wie $-\ln x$ für $x \rightarrow 0$ gegen ∞ strebt, aber im Gegensatz zu der obigen Erfahrung der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x}\right] \Big|_\epsilon^1 = -1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} = \infty$$

ist, und damit nicht existiert. Die Graphen der Funktionen sind in der Abbildung 1 dargestellt und man sieht, daß die Funktion $-\ln x$ im gesamten Intervall deutlich kleiner als die Funktion $\frac{1}{x^2}$ ist, so daß das Ergebnis der Grenzwertbetrachtung zumindest nicht ungewöhnlich ist.

Abbildung 1: Verlauf von $-\ln x$ und $\frac{1}{x^2}$ im Intervall $[0.1, 1]$

Betrachten wir nun das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

so bedeutet dies praktisch den Grenzwert

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx,$$

und man erhält

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} - (-1) = 1.$$

Es ist also auch im Falle unendlicher Grenzen möglich über eine Grenzwertbetrachtung zu entscheiden, ob das Integral mit einer oder zwei unendlichen Grenzen als Grenzwert eines bestimmten Integrals mit endlichen Grenzen konvergiert.

Definition 1.6. (uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$ erklärt und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, stückweise stetig, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Durch die Definitionen

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx, \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx \quad (3)$$

wird der Integralbegriff erweitert

- auf Integranden, für die $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ unbeschränkt ist, und
- auf unbeschränkte Integrationsintervalle.

In den beiden Fällen nennt man die durch (3) definierten Integrale **uneigentlich** (uneigentlich an der oberen Grenze).

Analog definiert man bei entsprechenden Verhältnissen an der unteren Grenze die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx, \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (4)$$

Man sagt ein uneigentliches Integral **konvergiert**, wenn der zugehörige Grenzwert existiert. Anderenfalls divergiert das uneigentliche Integral.

Sind beide Integrationsgrenzen unendlich oder ist der Integrand an beiden Grenzen nicht beschränkt oder ist eine Grenze unendlich und ist der Integrand an der anderen Grenze nicht beschränkt, so spricht man von einem an beiden Grenzen uneigentlichen Integral. In diesem Fall definiert man das uneigentliche Integral durch

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &:= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b, \\ &= \lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx + \lim_{o \rightarrow b-0} \int_c^o f(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite **unabhängig voneinander** zu bestimmen sind. Nur wenn beide Grenzwerte existieren, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$.

Hat man das Integral $\int_a^b f(x) dx$ zu berechnen und gibt es im Inneren des Intervalls $[a, b]$ endlich viele Polstellen oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$, z.B. x_1, \dots, x_{n-1} mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

dann setzt man

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (6)$$

wobei die Summanden der rechten Seite i.d.R. uneigentliche Integrale der oben besprochenen Art sind. Bevor man also ein Integral berechnet, hat man neben dem Charakter der Intervallgrenzen zu überprüfen, ob im Inneren des Integrationsintervalls kritische Punkte, an denen der Integrand unendlich wird, existieren. Tut man das nicht, kann man böse Überraschungen erleben. Betrachten wir dazu das

Beispiel 1:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ soll im Intervall $[-1, 3]$ integriert werden. Kümmert man sich nicht um das Verhalten der Funktion im Inneren des Intervalls $[-1, 3]$, dann errechnet man

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{-1} = -\frac{4}{3}.$$

Denkt man daran, daß die Funktion immer größer als 0 ist und das Integral ja als Flächeninhalt interpretierbar ist, muß man bei dem Resultat ins Grübeln kommen. Berücksichtigt man, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \rightarrow 0$ über alle Grenzen wächst, so muß man das Integral über die Beziehung

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^3 \frac{1}{x^2} dx$$

berechnen. Man stellt sehr schnell fest, daß beide Integrale auf der rechten Seite nicht konvergieren!

Im folgenden soll der Umgang und die Berechnung uneigentlicher Integrale anhand einiger Beispiele dargestellt werden.

Beispiel 2:

Zu berechnen ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

also ein Integral mit zwei unendlichen Grenzen. Wir spalten das Integral in zwei uneigentliche Integrale auf und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \pi.\end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos(\omega t) dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} \cos(\omega t) dt$$

Wir berechnen zuerst die Stammfunktion $\int e^{-st} \cos(\omega t) dt$ und finden mit der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int e^{-st} \cos(\omega t) dt &= e^{-st} \sin(\omega t) / \omega - \int -s e^{-st} \sin(\omega t) / \omega dt \\ &= e^{-st} \sin(\omega t) / \omega + \frac{s}{\omega} \int e^{-st} \sin(\omega t) dt \\ &= e^{-st} \sin(\omega t) / \omega + \frac{s}{\omega} [e^{-st} (-\cos(\omega t)) / \omega - \int -s e^{-st} (-\cos(\omega t)) / \omega dt],\end{aligned}$$

damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{s^2}{\omega^2}\right) \int e^{-st} \cos(\omega t) dt \\ = e^{-st} \sin(\omega t) / \omega - \frac{s}{\omega} e^{-st} \cos(\omega t) - \frac{s}{\omega^2} e^{-st} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

bzw.

$$\int e^{-st} \cos(\omega t) dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \left[\sin(\omega t) - \frac{s}{\omega} \cos(\omega t) \right].$$

Die Berechnung des Grenzwertes ergibt

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \left[\sin(\omega t) - \frac{s}{\omega} \cos(\omega t) \right] \Big|_{t=0}^{t=c} = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

und damit konvergiert das uneigentliche Integral.

Bei den bisherigen Beispielen konnte man die Grenzwertbetrachtung auf der Grundlage der bestimmten Stammfunktion durchführen. Dies ist leider nicht immer der Fall. In vielen Fällen ist eine Bestimmung der Stammfunktion nicht möglich, so daß die Werte von uneigentlichen Integralen mit numerischen Methoden bestimmt werden müssen. Diese Berechnung soll an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden. Es stellt sich aber die Frage, ob sich die Mühe überhaupt lohnt. Es sind Kriterien gefragt, die, ohne den jeweiligen Wert des Integrals zu ermitteln, eine Aussage über Konvergenz oder Divergenz uneigentlicher Integrale zulassen.

Die folgenden Kriterien liefern Aussagen über Konvergenz oder Divergenz uneigentlicher Integrale.

Satz 1.7. (notwendige Konvergenzbedingung)

Ist $f(x) \geq 0$ und monoton fallend, dann folgt aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^\infty f(x) dx ,$$

daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ gilt.}$$

Satz 1.8. (Majoranten-Minoranten-Kriterium)

Ist $f(x) \geq 0$ und gilt $g(x) \geq f(x)$ auf $[a, \infty)$, dann gilt:

$$a) \text{ konvergiert } \int_a^\infty g(x) dx \text{ dann konvergiert } \int_a^\infty f(x) dx ,$$

und

$$b) \text{ divergiert } \int_a^\infty f(x) dx \text{ dann divergiert } \int_a^\infty g(x) dx .$$

Im Fall a) nennt man $g(x)$ konvergente Majorante von $f(x)$ und

im Fall b) nennt man $f(x)$ divergente Minorante von $g(x)$.

Satz 1.9. (absolute Konvergenz)

Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty |f(x)| dx ,$$

dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx .$$

Beispiel 4:

Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$$

soll gezeigt werden. Da eine Stammfunktion nicht gefunden werden kann, soll die Frage der Konvergenz oder Divergenz mit dem Majoranten-Minoranten-Kriterium gezeigt werden. Hinreichend für die Konvergenz ist die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2} dx$. Für die Funktion $f(x) = \frac{|\cos x|}{x^2}$ findet man mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$ eine konvergente Majorante und kann auf die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ schließen.

Beispiel 5:

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x + 1}{x} dx$$

ist divergent, da man mit $f(x) = \frac{1}{x}$ eine divergente Minorante findet, denn es gilt

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\sin^2 x + 1}{x}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0+0} (-\ln c) + \lim_{c \rightarrow \infty} \ln c = \infty + \infty = \infty.$$

Aufgrund der Tatsache, daß das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \frac{M}{x^\alpha} dx$$

für $\alpha > 1$ konvergiert, und daß das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \frac{N}{x} dx$$

divergiert (M und N sind hier positive reelle Konstanten), kann man die folgenden Vergleichskriterien formulieren.

Satz 1.10.

Sei $f(x)$ für $x \geq a > 0$ eine nichtnegative Funktion.

(a) Gibt es eine Zahl $\alpha > 1$ und eine positive Konstante M mit

$$f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha},$$

dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx,$$

denn $\frac{M}{x^\alpha}$ ist eine konvergente Majorante von f .

(b) Gibt es eine positive Konstante N mit

$$x \cdot f(x) \geq N \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq \frac{N}{x},$$

dann divergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx,$$

denn $\frac{N}{x}$ ist eine divergente Minorante von f .

1.4 Numerische Integration

Die analytische Bestimmung einer Stammfunktion und die damit gegebene einfache Möglichkeit der Berechnung von bestimmten Integralen ist nicht immer möglich oder auch sehr aufwendig. In solchen Fällen kann man nur eine näherungsweise Berechnung der Integrale auf numerischen Weg vorzunehmen.

Auch im Fall der Vorgabe von Funktionen in Tabellenform (z.B. Ergebnisse einer Meßreihe) kann keine analytische Integration durchgeführt werden.

In beiden Fällen, also

- a) beim Nichtvorhandensein einer analytischen Stammfunktion oder
- b) bei der Vorgabe eines funktionalen Zusammenhangs in Tabellenform

ist es möglich, den Integranden als Wertetabelle der Form

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

vorzugeben, wobei im Fall a) die Wertepaare willkürlich zusammengestellt werden können, während im Fall b) nur die $n + 1$ Wertepaare als Information über den funktionalen Zusammenhang vorliegen.

1.4.1 Trapezregel

In Erinnerung an die Definition des bestimmten Integrals kann man das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

für die in Form einer Wertetabelle gegebenen Funktion $f(x)$ durch die Formel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (7)$$

annähern. Die Abbildung 2 zeigt den Flächeninhalt im Ergebnis der Anwendung der Trapezregel (7).

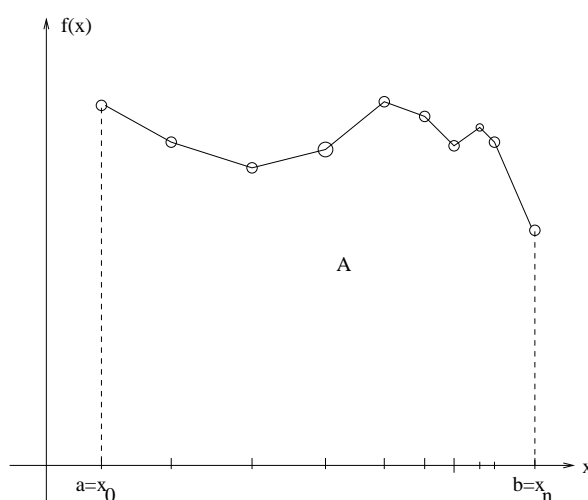


Abbildung 2: Skizze zur numerischen Integration

Es wird deutlich, daß die Trapezregel den exakten Wert des Integrals einer Funktion $f(x)$ liefert, die in den Punkten x_0, x_1, \dots, x_n die Funktionswerte y_0, y_1, \dots, y_n hat und in den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ einen Wert als Ergebnis einer linearen Interpolation zwischen den Werten y_{i-1} und y_i , also

$$f(x) = y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(y_i - y_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

hat. Die Trapezregel ist damit nicht in der Lage, kompliziertere als lineare Verläufe der Funktion zwischen den Stützstellen x_i zu erfassen. Das bedeutet eine recht grobe Näherung des Integrals durch die Trapezregel.

1.4.2 Simpson'sche Formel

Eine genauere numerische Berechnung des Integrals ist mit der Simpson'schen Formel möglich. Ausgangspunkt ist wiederum eine Wertetabelle der Form

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

wobei wir allerdings fordern, daß n eine gerade Zahl ist, also die Darstellung $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, hat.

Betrachten wir zum Beispiel die Wertetabelle

$$(0, 1), (1, 4), (2, 2)$$

zur sehr groben, diskreten Beschreibung einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, 2]$. Die numerische Berechnung des Integrals mit der Trapezregel ergibt

$$\int_0^2 f(x) dx \approx 1 \cdot 2.5 + 1 \cdot 3 = 5.5 . \quad (8)$$

Wenn die Funktion aber etwa den in der Abb. 3 skizzierten Verlauf hat, also nicht eckig, sondern "glatt" ist, dann ist der mit der Trapezregel berechnete Wert nur eine sehr grobe Näherung. Aus der Beschäftigung mit der Interpolation wissen wir, daß man durch die Punkte $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$ ein eindeutig bestimmtes quadratisches Polynom $p_2(x)$ legen kann. Das Laplace'sche Interpolationspolynom (siehe HM I) ergibt

$$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 1 + \frac{x(x-2)}{-1} \cdot 4 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 2.$$

Nun bietet sich zur näherungsweise Berechnung des Integrals der punktweise gegebenen Funktion über dem Intervall $[0, 2]$ die Integration von $p_2(x)$ in den Grenzen 0 und 2 an, also

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \int_0^2 p_2(x) dx = \frac{1}{3}[1 + 4 \cdot 4 + 2] = 6.3333 . \quad (9)$$

Aus der Abb. 3 wird sichtbar, daß mit der Näherungsbeziehung (9) ein genaueres Ergebnis erzielt wird, als mit der Trapezformel (8). Die Strichlinie bedeutet dabei die lineare Interpolation zwischen den Stützwerten.

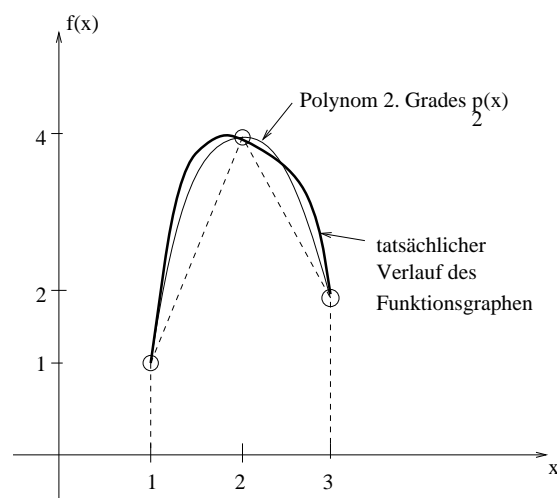


Abbildung 3: lineare und polynomiale Interpolation

Nun kann man diese Überlegung der Näherung der Funktion mit einem Polynom 2. Grades auf das gesamte Integrationsintervall $[x_0, x_n] = [a, b]$ übertragen. Zur vereinfachten Darstellung nehmen wir eine äquidistante Stützstellenverteilung $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$, an. Da n eine gerade Zahl ist, kann man Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1, \dots, m$, bilden, und es gilt

$$[x_0, x_n] = \cup_{k=1}^m [x_{2k-2}, x_{2k}] .$$

In jedem der Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ bestimmt man nun für die Wertepaare

$$(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$$

ein quadratisches Polynom $p_{2,k}(x)$, das eindeutig festgelegt ist. Man rechnet nun leicht die Beziehung

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_{2,k} = \frac{h}{3}[y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}]$$

nach und erhält die zusammengesetzte Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_{2,k}(x) dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n]. \quad (10)$$

Die Formel (10) wird auch **Simpson'sche Formel** genannt. Mit (10) liegt nun eine Integrationsformel vor, die i.allg. eine genauere Näherung des Integrals der Funktion $f(x)$ ergibt, als die Trapezformel.

1.4.3 Fehler der numerischen Integration

Die Genauigkeit der Trapez-Formel oder der Simpson'schen Formel erhält man durch Restgliedabschätzungen.

Satz 1.11. (*Restgliedformeln*)

Es gelten die Beziehungen

$$\int_a^b f(x) = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - f^{(2)}(\xi) \frac{(b-a)h^2}{12}$$

und

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n] - f^{(4)}(\xi) \frac{(b-a)h^4}{180}$$

und damit ergeben sich Fehler der Ordnung $O(h^2)$ für die Trapezformel und $O(h^4)$ für die Simpson'sche Formel (ξ ist hier ein Zwischenwert aus dem Intervall (a, b)).

1.5 Interpolation

Bei der numerischen Integration wurde im Falle der Vorgabe einer Funktion in Form einer Wertetabelle zur näherungsweise Integration eine Interpolation durchgeführt. Bei der Trapezregel wurde linear interpoliert und bei der Simpson'schen Regel wurde stückweise mit quadratischen Polynomen interpoliert.

Generell geht es bei der Interpolation um die Erzeugung von kontinuierlichen Funktionen, die vorgegebene Werte an bestimmten Stützstellen haben. Gegeben ist eine diskrete Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n). \quad (11)$$

Gesucht ist eine stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$, $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$, für die im Intervall $[x_0, x_n]$

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

gilt.

1.5.1 Lagrange-Interpolation

In der HM I-Vorlesung haben wir uns mit den Lagrange-Polynomen befaßt. Wir haben festgestellt, daß bei Vorgabe einer Wertetabelle (11) unter der Voraussetzung, daß $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gilt, genau ein Polynom n -ten Grades $p_n(x)$ mit der Eigenschaft

$$p_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

existiert. Polynome sind stetig und differenzierbar, so daß sie als Interpolationsfunktionen geeignet sind. Das Lagrange-Polynom hat die Form

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_j,$$

wobei $L_j(x)$ die Lagrange-Koeffizientenpolynome der Form

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

sind. Für die Wertetabelle

x_i	1	2	3	4	7	10	12	13	15
y_i	3	2	6	7	9	15	18	27	30

erhält man mit der Lagrange-Interpolation ein Polynom 8. Grades mit dem in der Abbildung 4 dargestellten Verlauf.

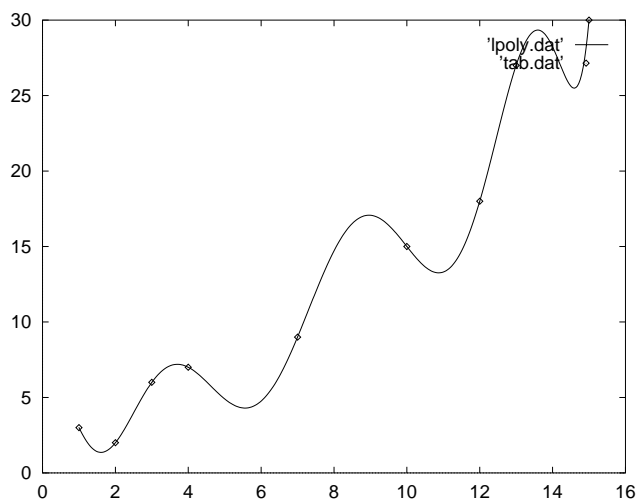


Abbildung 4: Polynom 8. Grades

1.5.2 Newton-Interpolation

Die Newton-Interpolation ist ebenso wie die Lagrange-Interpolation eine Polynom-Interpolation. Die Problemstellung ist wie gehabt. Es ist eine Wertetabelle (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, gegeben, und eine stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$ gesucht, für die im Intervall $[x_0, x_n]$ in den Stützpunkten $f(x_i) = y_i$ gilt. Da das Ergebnis bei der Newton-Interpolation ein Polynom n -ten Grades

sein soll, erhält man das **gleiche** Polynom wie bei der Lagrange-Interpolation, da es genau ein Polynom n -ten Grades mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Der Unterschied zwischen Newton- und Lagrange-Interpolation besteht in der konkreten Berechnung des Polynoms. Das Verfahren geht von dem Ansatz

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (12)$$

aus. Die Koeffizienten werden nun wieder so bestimmt, daß das Polynom $p_n(x)$ durch die Punkte (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, verläuft. Man erhält das gestaffelte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= b_0 \\ y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\ &\quad b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (13)$$

zur Bestimmung der Koeffizienten b_i . Man sieht, daß die Berechnung rekursiv erfolgen kann. Hat man b_0 , so kann man damit b_1 berechnen, und mit b_0 und b_1 kann man b_2 berechnen usw.. Bei der schrittweisen Auflösung des Systems (13) läßt sich für jeden Koeffizienten b_i eine Formel mit Hilfe dividierter Differenzen angeben.

Sind von einer Funktion $f(x)$ an $n + 1$ Stützstellen x_0, x_1, \dots, x_n die zugehörigen Funktionswerte $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ gegeben, so lassen sich die dividierten Differenzen, auch Steigungen genannt, der Ordnung 0 bis n berechnen. Wir definieren die Steigungen 0. Ordnung

$$[x_i] := y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

die Steigungen 1. Ordnung

$$[x_i x_j] := \frac{[x_i] - [x_j]}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad i \neq j,$$

und allgemein die Steigungen r -ter Ordnung

$$[x_i x_{i+1} \dots x_{i+r}] := \frac{[x_{i+1} \dots x_{i+r}] - [x_i \dots x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}.$$

Eine wichtige Eigenschaft der dividierten Differenzen ist die Symmetrie in ihren Argumenten, d.h., es gilt z.B.

$$[x_0 x_1 \dots x_n] = [x_n x_{n-1} \dots x_0] = [x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n}],$$

wobei k_1, k_2, \dots, k_n irgendeine beliebige Vertauschung (Permutation) der Indizes $1, 2, \dots, n$ ist. Mit den eben erklärten Steigungen kann man $p_n(x)$ auch in der Form

$$p_n(x) = [x_0] + [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0 x_1 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (14)$$

notieren. Mit den Formeln der Steigungen läßt sich ein sogenanntes Steigungsschema oder Schema zur Berechnung der dividierten Differenzen aufstellen. Hat man z.B. die Wertetabelle

x_i	1	2	3
y_i	3	2	6

vorgegeben, also die Ausgangsposition für ein Polynom 2. Grades. Dafür kann man das Schema

$x_{i+2} - x_i$	$x_{i+1} - x_i$	x_i	y_i	Δ	$[x_{i+1}, x_i]$	Δ	$[x_2 x_1 x_0]$
	1	1	<u>3</u>				
2	1	2	2	-1	<u>-1</u>		
	1	3	6	4	4	5	<u>2.5</u>

aufstellen, und erhält

$$[x_0] = 1 \quad [x_1 x_0] = -1 \quad [x_2 x_1 x_0] = 2.5 \quad .$$

Damit erhält man das Newton'sche Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} p_2(x) &= [x_0] + [x_1 x_0](x - x_0) + [x_2 x_1 x_0](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 3 - (x - 1) + 2.5 \cdot (x - 1)(x - 2) \quad , \end{aligned}$$

das mit dem Lagrange-Interpolationspolynom

$$p_2(x) = 3 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 2 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

übereinstimmt (bitte nachrechnen!).

1.5.3 Spline-Interpolation

Die Polynominterpolation hat den Vorteil, daß man im Ergebnis mit dem Polynom n -ten Grades eine Funktion erhält, die zum einen die geforderten Eigenschaften hat, und zweitens in Form einer geschlossenen Formel vorliegt. In der Abbildung 4 ist aber zu sehen, daß schon bei einem Polynom 8. Grades, also einer Interpolationsfunktion für 9 vorgegebene Wertepaare starke Oszillationen im Funktionsverlauf auftreten.

Eine Möglichkeit, dies zu vermeiden ist die lineare Interpolation oder als Konsequenz der Simpson'schen Integrationsformel die stückweise Interpolation mit quadratischen Polynomen. Allerdings verliert man in beiden Fällen die Differenzierbarkeit der Interpolationsfunktion auf dem gesamten Intervall (a, b) .

Einen Ausweg bietet die sogenannte **Spline**-Interpolation. Diese Methodik geht auf die Lösung eines Variationsproblems aus der Mechanik zurück und liefert im Unterschied zur polynomialen Interpolation meistens wesentlich brauchbarere Ergebnisse. Gegeben sind wiederum Datenpaare

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

und gesucht werden bei der Spline-Interpolation Polynome

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3, \\ p_i &: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (15)$$

so daß die aus diesen stückweise zusammengesetzte Funktion $s : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) alle Daten interpoliert,
- 2) zweimal stetig differenzierbar ist und

3) die Forderung $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ erfüllt.

Die sorgfältige Auswertung der Forderungen 1, 2 und 3 an die Funktionen p_i ergibt den folgenden Algorithmus zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$:

a) Lösung des linearen Gleichungssystems

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)m_i + h_im_{i+1} = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

mit

$$m_0 = m_n = 0, \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{und} \quad c_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}).$$

b)

$$\alpha_i := y_i, \quad \beta_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{6}h_i, \quad \gamma_i := \frac{m_i}{2}, \quad \delta_i := \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}.$$

Die Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Spline-Interpolation im Vergleich mit der Polynominterpolation zur Lösung der Interpolationsaufgabe

x_i	1	2	3	4	7	10	12	13	15
y_i	3	2	6	7	9	15	18	27	30

Dabei wird deutlich, daß die Spline-Interpolation wesentlich weniger Oszillationen beinhaltet als die Polynominterpolation.

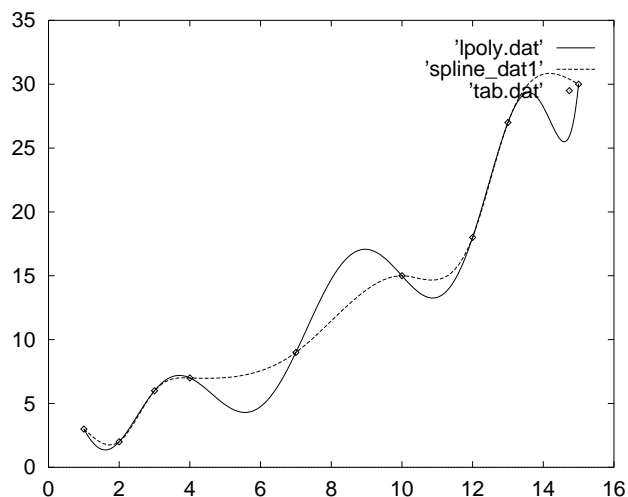


Abbildung 5: kubischer Spline und Polynom 8. Grades

Noch problematischer wird das Ergebnis, wenn man mehr als 10 Stützstellen hat und somit im Ergebnis der Polynominterpolation ein Polynom 10. oder höheren Grades erhält. Wenn wir zum Beispiel die Interpolationsaufgabe

x_i	1	2	3	4	7	10	12	13	15	16	18	20
y_i	3	2	6	7	9	15	18	27	30	25	20	20

betrachten, sieht man in der Abbildung 6 deutlich die Unzulänglichkeiten der Polynominterpolation.

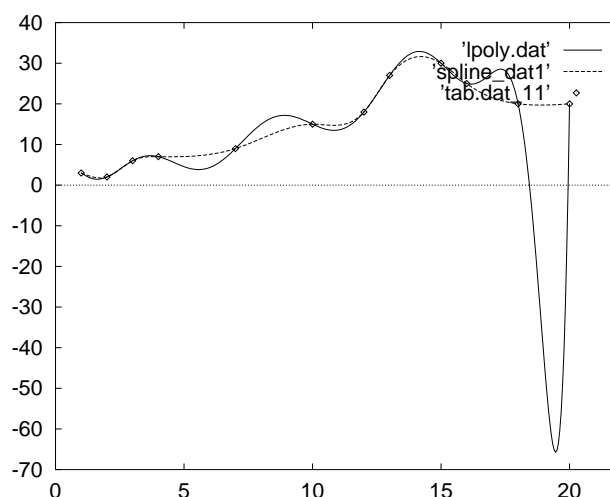


Abbildung 6: kubischer Spline und Polynom 11. Grades

1.5.4 Vor- und Nachteile von Polynominterpolationen und Spline-Interpolationen

Die Vor- und Nachteile von Polynom- und Splineinterpolation lassen sich in der folgenden Tabelle zusammenfassen.

Methode	Vorteil	Nachteil
Lagrange-Interpolation	leichte Berechenbarkeit des Polynoms, geschlossene Formel	Neuberechnung bei Hinzunahme von Stützstellen, starke Oszillationen bei mehr als 10 Stützstellen.
Newton-Interpolation	leichte Berechenbarkeit des Polynoms, geschlossene Formel, einfache Erweiterung der Formel bei Stützstellenhinzunahme	starke Oszillationen bei mehr als 10 Stützstellen.
Spline-Interpolation	keine "unnatürlichen" Oszillationen	keine geschlossene Formel, größerer Berechnungsaufwand als bei der Polynominterpolation.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Einführende Beispiele

Beispiel 1 - der radioaktive Zerfall:

Wir wollen den zeitlichen Ablauf des Zerfalls von radioaktiven Stoffen beschreiben. Sei $m(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes. Die Erfahrung zeigt

$$m(t+h) - m(t) \sim m(t) h,$$

wobei $h > 0$ ein kleiner Zeitabschnitt sein soll. Mit dem Proportionalitätsfaktor $k > 0$ hat man also

$$m(t+h) - m(t) = -k m(t) h.$$

Nach Division durch h und der Betrachtung des Grenzübergangs $h \rightarrow 0$ erhält man schließlich

$$\frac{dm(t)}{dt} = -k m(t) \quad \text{bzw.} \quad m'(t) = -k m(t). \quad (16)$$

Die Gleichung (16) stellt ein **mathematisches Modell** für den zeitlichen Ablauf des Zerfalls eines radioaktiven Stoffes mit der Zerfallskonstanten k dar.

Beispiel 2 - Abkühlung bzw. Erwärmung eines "idealen" Körpers:

Die zeitliche Änderung der Temperatur eines Körpers ist proportional zur Differenz der Temperatur des Körpers und der Umgebungstemperatur. Als mathematisches Modell erhält man analog zum Beispiel 1 schließlich die Gleichung

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_u), \quad (17)$$

wobei T_u die Umgebungstemperatur des Körpers ist und $k < 0$ eine Materialkonstante ist.

Die Gleichungen (16) und (17) stellen physikalische Sachverhalte in Form von mathematischen Modellen - Differentialgleichungen - dar.

In beiden Fällen sind Funktionen $m(t)$ bzw. $T(t)$ gesucht, die die jeweiligen Gleichungen erfüllen. In der Regel gibt es mehrere Lösungen. Die Auswahl von physikalisch sinnvollen Lösungen erfolgt mit Fixierung von Forderungen an die Lösung zu einem bestimmten Zeitpunkt (Anfangsbedingungen) oder an einem bestimmten Ort (Randbedingungen).

Zu lösende Probleme:

- 1) Aufstellen der DGL¹ - mathematische Modellierung z.B. eines technischen Problems,
- 2) Formulierung physikalisch sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen
- 3) Lösen der DGL

2.2 Allgemeine Begriffe

Definition 2.1.

Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x , y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung.

Explizite Form der DGL:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Implizite Form der DGL:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

¹DGL = Differentialgleichung

Definition 2.2.

Als **Lösung** oder **Integral** einer DGL bezeichnet man jede Funktion, die die DGL erfüllt (die beim Einsetzen in die DGL diese zu einer Identität macht).

Bemerkungen:

Eine DGL hat i.a. unendlich viele Lösungen, z.B.

$$y' = x$$

hat die Lösungen $y = \frac{x^2}{2} + C$, wobei die Konstante C nicht näher bestimmt ist ($C \in \mathbb{R}$).

I.d.R. interessiert man sich nur für eine ganz spezielle Lösung, die bestimmten zusätzlichen Bedingungen genügt.

Sind die Bedingungen für genau einen Wert der unabhängigen Variablen vorgegeben, so nennt man sie Anfangsbedingungen, anderenfalls Randbedingungen.

- Anfangswertproblem (AWP) \rightarrow DGL + Anfangsbed.
- Randwertproblem (RWP) \rightarrow DGL + Randbed.

2.3 Differentialgleichungen 1. Ordnung - Allgemeines

Die DGL sei in expliziter Form

$$y' = f(x, y)$$

gegeben. Durch die DGL wird für jeden Punkt $(x, y) \in D_f$ (Definitionsbereich von f) ein Anstieg y' der Lösungskurve vorgegeben. Eine kurze Strecke der Steigung an einem Punkt bezeichnet man auch als Linienelement der Lösungskurve. Die Gesamtheit aller Linienelemente nennt man das **Richtungsfeld**. Den Lösungen von $y' = f(x, y)$ entsprechen jetzt Kurven, die in das Richtungsfeld "passen".

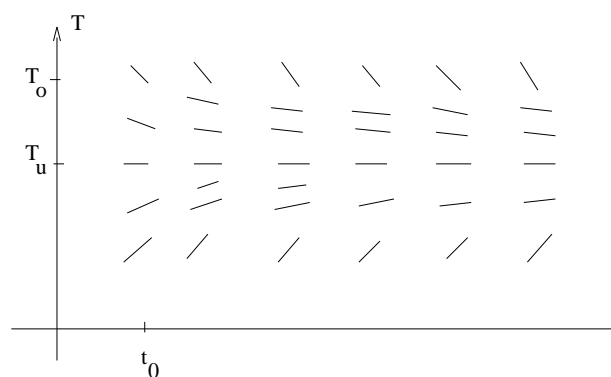


Abbildung 7: Richtungsfeld der DGL (17)

Definition 2.3.

Hat eine Lösung $y = \Psi(x)$ die Eigenschaft, daß durch jeden ihrer Punkte mindestens eine weitere Lösung verläuft, so nennt man sie **singuläre** Lösung.

Satz 2.4. (Existenz- und Einzigkeitssatz (Cauchy))

Das AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $(x_0, y_0) \in D_f$ hat **mindestens** eine Lösung, wenn $f(x, y)$ auf $D_f = [-a, a] \times [-b, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ fest, eine stetige Funktion ist. Ferner seien M und h durch

$$M = \max_{(x,y) \in D_f} |f(x, y)| \quad \text{und} \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

erklärt. Dann hat das AWP in der Umgebung $U_h(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < h\}$ genau eine Lösung, wenn $f(x, y)$ auf D_f Lipschitzstetig ist, d.h., wenn es eine Konstante L gibt mit

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle} \quad (x, y), (x, \tilde{y}) \in D_f.$$

Anmerkung:

Das Verständnis dieses Satzes (und einiger folgender) erfordert Kenntnisse der Analysis von Funktionen mehrerer Veränderlicher - Analysis im \mathbb{R}^n . Die Sachverhalte werden deshalb nur aus Gründen der weitestgehend vollständigen Darstellung erwähnt. Sie sind für die im folgenden diskutierten praktischen Lösungsmethoden für DGL nicht von spezieller Bedeutung.

Satz 2.5.

Sind die Bedingungen des Satzes von Cauchy erfüllt, bilden die Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ eine Schar $y = \phi(x, C)$, wobei jeder Anfangsbedingung (aus D_f) genau ein Wert von C entspricht.

Definition 2.6.

$y = \phi(x, C)$ heißt **allgemeine** Lösung der DGL $y' = f(x, y)$. Ersetzt man C durch einen konkreten Wert $C = C_0$, so erhält man die **partikuläre** Lösung $y = \phi(x, C_0)$.

Folgerung:

In allen Punkten $(x, \Psi(x))$ einer singulären Lösung ist die Einzigkeitsbedingung nicht erfüllt.

Bemerkung:

Eine singuläre Lösung ist i.a. nicht in der allgemeinen Lösung enthalten.

Beispiel:

$y' = \sqrt{|y|}$ besitzt (a) die singuläre Lösung $y(x) = 0$, und (b) Lösungen $y(x) = \frac{1}{4}(x-c)^2$ für $y > 0$ bzw. $y(x) = -\frac{1}{4}(x-c)^2$ für $y < 0$ (bitte nachrechnen). Man kann nun mittels der Lösungen (a) und (b) durch jeden Punkt $(x_0, 0)$ unendlich viele Lösungen angeben.

2.4 DGLn mit trennbaren Variablen

Allgemeine Form:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{18}$$

g, h stetig in x bzw. y . Seien g und h frei von Nullstellen. Mit

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt \quad H(y) = \int_b^y h(t) dt$$

seien die Stammfunktionen von g und h bezeichnet. Weiterhin sei H^{-1} die Umkehrfunktion von H , d.h. es gilt

$$H^{-1}(H(x)) = x.$$

H^{-1} existiert, falls $h = H'$ (Stammfunktion) nirgends verschwindet (wurde eben vorausgesetzt). Wenn wir die DGL in der Form

$$h(y) y'(x) = g(x)$$

schreiben, ergibt sich nach der Integration nach x (Substitution)

$$H(y(x)) = G(x) + C,$$

was man durch Differentiation sofort bestätigen kann. Durch Anwendung der Umkehrfunktion H^{-1} erhält man schließlich mit

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}(G(x) + C)$$

die allgemeine Lösung unserer DGL (18).

Für DGLn mit getrennten Veränderlichen fassen wir das folgende Lösungsschema zusammen:

1. Man schreibe die DGL $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$ in der Form $h(y) y'(x) = g(x)$ bzw. $h(y) dy = g(x) dx$.
2. Man integriere die linke Seite bezüglich y und die rechte Seite bezügl. x .
3. Man löse die dadurch entstehende Gleichung

$$H(y) = G(x) + C$$

nach y auf.

Beispiel 1:

Wir betrachten die DGL

$$y' = x y,$$

die wir in der Form

$$\frac{dy}{y} = x dx, \quad (y \neq 0)$$

schreiben. Nun integrieren wir die linke Seite bezüglich y , die rechte bezüglich x und erhalten

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C,$$

also

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C} = e^C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Damit folgt

$$y = \pm e^C e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \quad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Beispiel 2:

Eine chemische Reaktion erster Ordnung mit der Sättigungskonzentration c_0 und der Reaktionskonstanten k wird durch die DGL

$$y' = k(c_0 - y)$$

beschrieben. Mit $g(t) = k = \text{const.}$ und $h(y) = \frac{1}{c_0 - y}$ ergibt sich nach dem obigen Schema

$$\frac{dy}{c_0 - y} = k dt.$$

Nach Integration erhält man

$$\int \frac{dy}{c_0 - y} = k \int dt + C,$$

also

$$-\ln |c_0 - y| = \ln \frac{1}{|c_0 - y|} = kt + C .$$

Die Auflösung nach y ergibt

$$\frac{1}{|c_0 - y|} = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

bzw.

$$c_0 - y = \pm e^{-C} e^{-kt} = C_1 e^{-kt}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_0 - C_1 e^{-kt} .$$

Die Konstante C_1 ergibt sich zu c_0 , wenn die Konzentration zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 sein soll.

2.4.1 Ähnlichkeits-DGL

a) DGL der Form $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$:

Diese DGL läßt sich über eine Substitution auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückführen. Dabei fordern wir von ϕ die stetige Differenzierbarkeit.

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = x u \quad \rightarrow \quad y' = u + x u' = \phi(u)$$

$$x u' = \phi(u) - u \quad \rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x} .$$

Damit hat man

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln |x| + C .$$

Beispiel:

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{y/x}{1 - (y/x)^2} = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \phi(u) = \frac{u}{1 - u^2} .$$

Man findet nun

$$\int \frac{du}{\frac{u}{1-u^2} - u} = \ln |x| + C \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{1 - u^2}{u - u(1 - u^2)} du = \ln |x| + C ,$$

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \ln |x| + C \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + C .$$

Die Rücksubstitution ergibt schließlich mit

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |y| + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^{-\frac{x^2}{2y^2} - C} ,$$

bzw.

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

die allgemeine Lösung in **impliziter** Form.

b) DGL der Form $y' = \phi(ax + by + c)$, $b \neq 0$:

Wenn ϕ wieder eine stetig differenzierbare Funktion ist, erhält man mit der Substitution

$z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$
die Gleichung

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

und damit die Gleichung

$$z' = a + b\phi(z),$$

also eine DGL mit getrennten Variablen.

Beispiel:

Die DGL

$$y' = (2x + 3y)^2 =: \phi(ax + by + c) \quad , \quad a = 2, b = 3, c = 0$$

kann man nach der Substitution $z = 2x + 3y$ als DGL

$$z' = a + b\phi(z) = 2 + 3z^2$$

aufschreiben. Die Trennung der Variablen

$$\frac{dz}{2 + 3z^2} = dx$$

führt schließlich zu der Gleichung

$$\int \frac{dz}{2 + 3z^2} = \int dx + C = x + C \quad . \quad (19)$$

Für das Integral auf der linken Seite erhält man über die Substitution $t := \sqrt{\frac{3}{2}}z$ schließlich

$$\int \frac{dz}{2 + 3z^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}z\right).$$

Damit folgt aus der Gleichung (19)

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}z\right) = \sqrt{6}(x + C).$$

Die Auflösung nach z ergibt

$$z(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan(\sqrt{6}(x + C)),$$

woraus sich nach der Rücksubstitution $z = 2x + 3y$ die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}(z(x) - 2x) = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{2}{3}} \tan(\sqrt{6}(x + C)) - 2x\right]$$

ergibt.

2.4.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten Gleichungen mit der allgemeinen Form

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß a, b, c stetig in x sind und daß $a(x) \neq 0$ ist. Die Division durch a ergibt

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (20)$$

wobei $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ auch stetige Funktionen in x sind.

Bemerkung:

Existenz- und Einzigkeitsbedingungen sind immer erfüllt, es gibt keine singulären Lösungen.

Definition 2.7.

Die DGL (20) heißt **homogen** linear, falls $q(x) = 0$ ist, anderenfalls **inhomogen** linear.

Die homogene lineare DGL

$$y' + p(x)y = 0$$

ist Spezialfall einer DGL mit getrennten Variablen, so daß sich aus

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x) dx + C$$

mit

$$|y| = e^C e^{-\int p(x) dx} \quad \text{bzw.} \quad y = C_0 e^{-\int p(x) dx}$$

die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL ergibt.

Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL:

Gewinnung durch die Methode der **Variation der Konstanten**. Die Konstante C_0 (der allgemeinen Lösung der homogenen DGL) wird variiert, d.h., als eine Funktion $C = C(x)$ betrachtet! Das Einsetzen des Ansatzes

$$y = C(x)e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}}$$

in die Gleichung (20) ergibt

$$C'(x)e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} - C(x)p(x)e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} + p(x)C(x)e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} = q(x).$$

Weiterhin erhält man

$$C'(x)e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} = q(x) \quad \rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} \quad \rightarrow \quad C(x) = \int q(\tilde{x})e^{\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} d\tilde{x} + C_1$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} (C_1 + \int q(\tilde{x})e^{\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} d\tilde{x}) \quad (21)$$

der inhomogenen linearen DGL. In der Schreibweise

$$y(x) = C_0 e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} + e^{-\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} \int q(\tilde{x})e^{\int p(\tilde{x}) d\tilde{x}} d\tilde{x}$$

sieht man, daß sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL **und** einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen DGL für $C_1 = 0$ (oder irgendeine andere partikuläre Lösung) ergibt.

Bemerkung:

In der allgemeinen Lösung ist für beide Integrale $\int p(x) dx$ die gleiche Stammfunktion zu wählen!

Bei einem AWP mit der Vorgabe der Bedingung $y(x_0) = y_0$ ergibt sich aus (21) mit

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} (y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t) dt} d\xi)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel 1:

Berechnung der Stromstärke in einem Stromkreis mit Selbstinduktion.

$$U = IR + L \frac{dI}{dt},$$

mit der Spannung U , der Stromstärke I , dem Koeffizienten der Selbstinduktion L , dem Widerstand R und der Zeit t . Mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ erhält man die Lösung

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} [I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau].$$

Für den Spezialfall $U = \text{const.}$ ergibt sich durch die Grenzwertbetrachtung $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{U}{R}$ das Ohm'sche Gesetz. Bitte nachrechnen!

Beispiel 2:

Bernoulli'sche DGL

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1 \quad (n = 0 : \text{inhom.lin.DGL}, n = 1 : \text{homog.lin.DGL}).$$

Diese Gleichung läßt sich mit der Substitution

$$u(x) = y^{1-n}$$

auf eine lineare DGL zurückführen. Es ergibt sich

$$u' + (1-n)p(x)u = q(x)(1-n).$$

Nach der Lösung erhält man nach der Rücksubstitution die Lösung der Bernoulli'schen DGL. Bitte mit dem Beispiel

$$x y' - 4y = x^2 \sqrt{y}, \quad x \neq 0, y \geq 0$$

selbst üben (Lösung: $y = x^4(C + \frac{1}{2} \ln|x|)^2$)!

2.5 Lineare Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung

Unter einem linearen System 1-ter Ordnung versteht man eine Gleichung der Form

$$\mathbf{y}'(x) = A(x) \mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}, \quad (22)$$

wobei $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$ Funktionen sind. Dabei sind \mathbf{y} und \mathbf{g} Spaltenvektoren mit n Komponenten. Als Beispiel eines DGL-Systems 1-ter Ordnung betrachten wir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(1+x^2)} & \frac{1}{x^2(1+x^2)} \\ -\frac{x^2}{1+x^2} & \frac{1+2x^2}{x(1+x^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

also die beiden gekoppelten linearen DGL

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x(1+x^2)} y_1 + \frac{1}{x^2(1+x^2)} y_2 + \frac{1}{x} \\ y_2' &= -\frac{x^2}{1+x^2} y_1 + \frac{1+2x^2}{x(1+x^2)} y_2 + 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Ist die "rechte Seite" $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$, dann nennt man das DGL-System (22) homogen, anderenfalls inhomogen.

Satz 2.8. (Lösbarkeit)

Die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$ und die Komponenten von $\mathbf{g}(x)$ seien stetig im Intervall $[a, b]$.

Dann hat das System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$ eine Lösung.

Sei $x_0 \in [a, b]$ und $(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (24)$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

2.5.1 Homogene lineare Differentialgleichungssysteme 1-ter Ordnung**Satz 2.9.** (Lösungen des homogenen Systems)

Sind die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$ in $[a, b]$ stetig, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

genau n auf $[a, b]$ linear unabhängige Lösungen.

Definition 2.10. (Fundamentalsystem)

Ein Funktionensystem von n linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ heißt ein **Fundamentalsystem** von Lösungen.

Mit den Sätzen 2.5 und 2.9 ist im Fall stetiger Funktionen $a_{ij}(x)$ gesichert, daß n Fundamentallösungen existieren. Hat man nun n Lösungen - wie auch immer - gefunden, so ist ein Kriterium gefragt, mit dem man entscheiden kann, ob die n Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem bilden. Wir schreiben die n Lösungen als Spalten der Matrix

$$Y(x) = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_n]$$

auf.

Definition 2.11. (Wronski-Determinante)

$W(x) := \det Y(x)$ heißt die Wronski-Determinante des Funktionensystems $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ von Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$.

Mit der Wronski-Determinante kann man nun entscheiden, ob ein Funktionensystem Fundamentalsystem ist, oder nicht.

Satz 2.12.

Seien $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gilt, falls die Elemente von $A(x)$ in $[a, b]$ stetig sind,

- (1) $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- (2) Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$ ist.

Satz 2.13.

Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ sei auf $[a, b]$ ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ gegeben. Dann läßt sich jede Lösung \mathbf{y} auf $[a, b]$ in der Form

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_n\mathbf{y}_n \quad (25)$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n darstellen.

2.5.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme 1-ter Ordnung

Die Lösung eines inhomogenen DGL-Systems 1. Ordnung erfolgt in zwei Schritten, nämlich erstens in der Lösung des homogenen Systems, und zweitens auf der Basis der Lösung des homogenen Systems in der Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems.

Satz 2.14. (*Lösungsstruktur des inhomogenen Systems*)

Sei \mathbf{y}_p irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen linearen DGL-Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$. Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$$

mit Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n .

Obwohl wir die Beschäftigung mit DGL-Systemen 1. Ordnung nicht übertreiben wollen, soll der Weg ausgehend von einem vorhandenen Fundamentalsystem der homogenen Gleichung zu einer speziellen Lösung \mathbf{y}_p aufgezeigt werden.

Satz 2.15. (*Variation der Konstanten bei Systemen*)

Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ sei ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ gegeben. Weiterhin sei $Y(x)$ die Matrix $[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_n]$ und $Y^{-1}(x)$ die Inverse. Sind die Koordinaten von \mathbf{g} stetig in $[a, b]$, so ist

$$\mathbf{y}_p(x) = Y(x) \cdot \int Y^{-1}(x) \cdot \mathbf{g}(x) \, dx, \quad x \in [a, b] \quad (26)$$

eine spezielle Lösung² des inhomogenen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$.

Beispiel:

Wir hatten weiter oben das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(1+x^2)} & \frac{1}{x^2(1+x^2)} \\ -\frac{x^2}{1+x^2} & \frac{1+2x^2}{x(1+x^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Beispiel eines linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung angegeben. Dieses System wollen wir nun exemplarisch diskutieren. Wir sind nach langem Suchen (Probieren) mit

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ x \end{pmatrix}, \quad x > 0,$$

auf Lösungen des homogenen Systems gestoßen. Zur Überprüfung, ob es sich bei den Lösungen um ein Fundamentalsystem handelt, berechnen wir die Wronski-Determinante. Es ergibt sich

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ x & x \end{pmatrix} = x^2 + 1.$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ ein Fundamentalsystem bilden. Wir können also alle Lösungen des homogenen Systems in der Form

$$\mathbf{y}_h(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x)$$

²Unter $\int \mathbf{c}(x) \, dx$ wollen wir im Falle eines Vektors $\mathbf{c}(x)$ die komponentenweise Integration verstehen, also

$$\int \mathbf{c}(x) \, dx = \begin{pmatrix} \int c_1(x) \, dx \\ \vdots \\ \int c_n(x) \, dx \end{pmatrix}.$$

aufschreiben.

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung \mathbf{y}_p des inhomogenen Systems nutzen wir den Satz 2.15. Die Matrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

hat die Inverse (Inversenformel)

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{\det Y(x)} \operatorname{adj} Y(x) = \frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Anwendung des Satzes 2.15 berechnen wir

$$Y^{-1}(x) \cdot \mathbf{g}(x) = \frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $x > 0$ ergibt sich

$$\int Y^{-1}(x) \cdot \mathbf{g}(x) dx = \begin{pmatrix} \int \frac{dx}{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund des Satzes ergibt sich damit eine spezielle Lösung³

$$\mathbf{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln x \\ x \ln x \end{pmatrix}.$$

Damit hat die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems 1. Ordnung die Form

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \ln x \\ x \ln x \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind bei Vorgabe von Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ eindeutig bestimmbar.

Im weiteren Verlauf der HM II werden DGL-Systeme 1. Ordnung nicht im Mittelpunkt des Interesses stehen. Sie bilden jedoch einen wichtigen Bezugspunkt zu den im Folgenden zu diskutierenden linearen DGLn n -ter Ordnung.

2.6 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

2.6.1 Lineare DGLn n -ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Unter einer **linearen DGL n -ter Ordnung** verstehen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x). \quad (27)$$

Die Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung wird durch die folgende Überlegung auf die Lösbarkeit eines DGL-Systems 1. Ordnung zurückgeführt.

Durch die Einführung der Funktionen

$$y_1 := y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots \quad y_n = y^{(n-1)}$$

³Da wir nur eine spezielle Lösung benötigen, können wir z.B. die Integrationskonstanten 0 wählen.

kann man die DGL n -ter Ordnung (27) als spezielles DGL-System 1. Ordnung aufschreiben. Man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{aligned} \tag{28}$$

Damit hat man mit der Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

und der "rechten Seite" $\mathbf{g}(x) = (00 \dots 0g(x))^T$ das zur linearen DGL n -ter Ordnung (27) äquivalente System 1. Ordnung

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x). \tag{29}$$

Betrachten wir nun zuerst den homogenen Fall $g(x) \equiv 0$. Aufgrund der Festlegung

$$y_1 := y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots \quad y_n = y^{(n-1)}$$

ist $\mathbf{y}(x)$ Lösung der homogenen Gleichung (27), wenn

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{30}$$

Lösung des homogenen Systems (29) ist.

Definition 2.16. (Fundamentalsystem einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Folgt aus der Beziehung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0 \text{ auf } [a, b] \tag{31}$$

für n Lösungen y_1, \dots, y_n der homogenen DGL n -ter Ordnung (27) das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten, also $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, so nennt man y_1, y_2, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen DGL n -ter Ordnung (27).

Differenziert man nun die Gleichung (31) k mal, so folgt

$$\alpha_1 y_1^{(k)}(x) + \alpha_2(x)y_2^{(k)}(x) + \cdots + \alpha_n y_n^{(k)}(x) = 0 \text{ auf } [a, b], k = 1, \dots, n-1,$$

und damit erhält man zur Bestimmung von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Das Gleichungssystem (32) besitzt genau dann nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix in $[a, b]$ nicht verschwindet. Das rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 2.17. (Wronski-Determinante einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien y_1, y_2, \dots, y_n beliebige Lösungen der homogenen linearen DGL n -ter Ordnung, dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante dieser n Lösungen.

Nun kann man die Lösbarkeitsaussagen eines DGL-Systems 1. Ordnung auf lineare DGLn n -ter übertragen und den folgenden Satz formulieren.

Satz 2.18. (Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Die Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, seien stetig auf $[a, b]$.

a) Dann gibt es ein Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0 \quad (33)$$

und jede Lösung der DGL besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

b) Je n Lösungen der homogenen DGL (27) bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronski-Determinante $W(x)$ nirgends auf $[a, b]$ verschwindet (Gilt $W(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$, so folgt daraus $W(x) = 0$ auf ganz $[a, b]$).

c) Sei die Funktion $g(x)$ stetig auf $[a, b]$. Sei $y_p(x)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x). \quad (34)$$

Ist dann y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem von (33), so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n -ter Ordnung (34) erfaßt.

Beispiel:

Wir betrachten die lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' - (1 + 2 \tan^2 x)y = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Mit den Festlegungen

$$y_1 = y \quad y_2 = y'$$

können wir das äquivalente DGL-System 1. Ordnung aufschreiben

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2 \tan^2 x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizientenfunktion $a_1(x) = 1 + 2 \tan^2 x$ in dem betrachteten Intervall stetig ist, gibt es ein Fundamentalsystem von zwei Lösungen.

Eine Lösung der DGL haben wir mit

$$u(x) = \frac{1}{\cos x}$$

gefunden.

Es soll nun versucht werden, ausgehend von der gefundenen Lösung eine weitere zu konstruieren. Wenn man unter Nutzung der Lösung $u(x)$ den Ansatz

$$y(x) = v(x)u(x)$$

macht, und den Ansatz in die DGL einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} y'' - (1 + 2 \tan^2 x)y &= v''u + 2v'u' + u''v - (1 + 2 \tan^2 x)uv \\ &= v''u + 2v'u' + v[u'' - (1 + 2 \tan^2 x)u] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Da $u(x)$ Lösung ist, ergibt sich die Gleichung

$$v''u + 2v'u' = 0.$$

Wenn wir nun durch $w := v'$ die Funktion w einführen, erhalten wir für w die DGL

$$w'u + 2u'w = 0,$$

die man mit der Methode der Trennung der Veränderlichen lösen kann. Man erhält

$$\frac{w'}{w} = -2 \frac{u'}{u} \quad \text{bzw.} \quad \ln |w| = -2 \ln |u| + C_1,$$

und damit eine Lösung

$$w(x) = C \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2} = \cos^2 x \quad (C = 1).$$

Wegen $v' = w$ integrieren wir und erhalten mit

$$v(x) = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

eine Stammfunktion von w (Integrationskonstante wurde gleich Null gesetzt). Mit dem ursprünglichen Ansatz erhalten wir mit

$$y_1(x) = v(x)u(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cos x} + \sin x \right)$$

neben $u(x) = \frac{1}{\cos x}$ eine zweite Lösung.

Wir stellen fest, daß bei der Kenntnis einer Lösung mit der eben durchgeführten Methode eine weitere Lösung der DGL über die Lösung einer DGL 1. Ordnung konstruiert werden kann.

Die Berechnung der Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos x} & \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cos x} + \sin x \right) \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\cos x} + \frac{x \sin x}{\cos^2 x} + \cos x \right] \end{pmatrix}$$

ergibt den $W(x) = 1$ (als Übung nachrechnen!). Damit ist der Nachweis erbracht, daß $u(x), y(x)$ ein Fundamentalsystem bilden, und alle Lösungen der DGL 2. Ordnung haben die Form

$$y(x) = c_1 \frac{1}{\cos x} + c_2 \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cos x} + \sin x \right)$$

haben.

Mit den eben gemachten Erfahrungen wollen wir zum Abschluß des Abschnittes das Reduktionsprinzip formulieren.

Satz 2.19. (*Reduktionsprinzip*)

Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0. \quad (36)$$

Dann führt der Produktansatz

$$y(x) = v(x)u(x)$$

auf eine homogene lineare DGL der Ordnung $n - 1$ für $w := v'$

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \dots + b_1(x)w = 0. \quad (37)$$

Ist w_1, \dots, w_{n-1} ein Fundamentalsystem der reduzierten DGL $(n - 1)$ -ter Ordnung (37) und sind v_1, \dots, v_{n-1} Stammfunktionen von w_1, \dots, w_{n-1} , so bilden

$$u, uv_1, \dots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der DGL (36).

Im Falle der inhomogenen linearen DGL n -ter Ordnung sei hier nur darauf hingewiesen, daß man die DGL als System 1. Ordnung aufschreibt, und mit der Methode der Variation der Konstanten für Systeme (Satz 2.15) eine spezielle Lösung bestimmt.

Desweiteren wird im folgenden Abschnitt die Methodik der Variation der Konstanten für DGL 2. Ordnung noch einmal behandelt.

2.6.2 Lineare DGLn n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Unter einer **linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** verstehen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g, \quad a_i = \text{const.}, \quad i = 0, \dots, n - 1. \quad (38)$$

Unter einem linearen System 1-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten versteht man eine Gleichung der Form

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{ij} = \text{const.} \quad (39)$$

Im folgenden konzentrieren wir uns auf die Konstruktion von Lösungen von Gleichungen des Typs (38) und sprechen von einer homogenen DGL n -ter Ordnung, wenn $g = 0$ ist, anderenfalls von einer inhomogenen DGL n -ter Ordnung.

Wenn wir eine homogene DGL n -ter Ordnung betrachten, können wir für die Lösung einen Ansatz der Form

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

machen, und erkennen aufgrund der Beziehungen

$$\frac{d^{(k)}}{dx^k} e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad e^{\lambda x} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

daß $y = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung der Gleichung (38) bei $g = 0$ ist, wenn λ eine Nullstelle von

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (40)$$

ist, d.h. falls $P(\lambda) = 0$ ist.

Definition 2.20. (charakteristisches Polynom)

$P(\lambda)$ heißt **charakteristisches Polynom** der homogenen DGL und $P(\lambda) = 0$ die zugehörige **charakteristische Gleichung**.

Die Untersuchung des Nullstellenverhaltens von $P(\lambda)$ führt uns zu folgenden Fällen:

- (i) $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, Dann besitzt die homogene DGL die n Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \quad .$$

- (ii) $P(\lambda)$ besitzt eine komplexe Nullstelle λ_k . Da $e^{\lambda x}$ auch für komplexe Zahlen λ sinnvoll ist und

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

gilt, folgt daß $e^{\lambda_k x}$ die homogene DGL auch für $\lambda_k \in \mathbb{C}$ löst. Wenn wir davon ausgehen, daß sämtliche Koeffizienten a_i , ($i = 0, \dots, n-1$) reell sind, kann man aus der komplexwertigen Lösung $e^{\lambda_k x}$ ein Paar reeller Lösungen gewinnen. Das wollen wir jetzt erläutern.

Für $x \in \mathbb{R}$ seien $y_1(x), y_2(x)$ reellwertige Funktionen und die komplexwertige Funktion $y(x)$ durch $y(x) = y_1(x) + i y_2(x)$ erklärt. Dann gilt für die Ableitung

$$y'(x) = y_1'(x) + i y_2'(x) \quad \text{bzw.} \quad y^{(l)}(x) = y_1^{(l)}(x) + i y_2^{(l)}(x), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt für reelle Koeffizienten a_i

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = (y_1^{(n)} + \cdots + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_1) + \\ i (y_2^{(n)} + \cdots + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_2) = 0 .$$

Diese Gleichung gilt nur, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil dieser Gleichung verschwinden, also

$$y_1^{(n)} + \cdots + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_1 = 0$$

und

$$y_2^{(n)} + \cdots + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_2 = 0 .$$

Damit gilt der folgende Satz.

Satz 2.21.

Mit $y(x)$ sind auch $y_1(x) = \operatorname{Re} y(x)$ und $y_2(x) = \operatorname{Im} y(x)$ Lösungen der homogenen linearen DGL $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$.

Unter Verwendung der Eulerschen Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

und des Additionstheorems der Exponentialfunktion

$$e^{(a+ib)} = e^a e^{ib}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

erhalten wir für $\lambda_k = \sigma_k + i \tau_k$

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x} = e^{\sigma_k x} (\cos \tau_k x + i \sin \tau_k x),$$

woraus sich die beiden reellen Lösungen

$$e^{\sigma_k x} \cos \tau_k x \quad \text{und} \quad e^{\sigma_k x} \sin \tau_k x \quad (41)$$

ergeben. Wir erinnern daran, daß mit einer komplexen Nullstelle λ_k auch $\bar{\lambda}_k$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten ist. Zu $\bar{\lambda}_k$ erhalten wir dann die beiden reellen Lösungen

$$e^{\sigma_k x} \cos \tau_k x \quad \text{und} \quad e^{\sigma_k x} \sin \tau_k x,$$

also bis auf das Vorzeichen die selben Lösungen wie für λ_k .

(iii) $P(\lambda)$ besitzt eine (reelle oder komplexe) r -fache Nullstelle λ_k . In diesem Fall sind die r Funktionen

$$e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda_k x} \quad (42)$$

Lösungen der homogenen DGL.

Auf einen Nachweis dieser Aussage wird an dieser Stelle verzichtet.

Bemerkung:

Zusammenfassend stellen wir fest, daß wir insgesamt n Lösungen der homogenen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten, wobei sich keine dieser Lösungen $y_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, aus jeweils anderen linear kombinieren läßt (Nachweis als Übung). Das System dieser Lösungen ist ein Fundamentalsystem der homogenen DGL.

Für Lösungen der Form $y_k(x) = c_k e^{\lambda_k x}$, $k = 1, \dots, n$, λ_k einfache reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DGL (38) rechnet man leicht nach, daß $W(x) \neq 0$ gilt.

Beispiel 1:

Die DGL

$$y'' - 4y = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Nach den obigen Darlegungen bilden die Lösungen e^{2x} und e^{-2x} ein Fundamentalsystem der DGL. Damit kann man mit

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

die allgemeine Lösung der DGL aufschreiben.

Beispiel 2:

Die DGL

$$u'' + 2u' + 4u = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 4$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Nach den obigen Darlegungen bilden die Lösungen $e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$ und $e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$ ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung lautet

$$u(x) = c_1 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-x} \sin(\sqrt{3}x) .$$

Wenn man für $u(x)$ noch $u(0) = -1$ und $u'(0) = 2$ (Anfangswerte) fordert, kann man aus der allgemeinen Lösung die Koeffizienten zu $c_1 = -1$ und $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bestimmen, und erhält mit

$$u(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) - \cos(\sqrt{3}x) \right)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

2.6.3 Inhomogene lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ausgehend von Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung soll nun mit der Methode der **Variation der Konstanten** eine Lösung der inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten (38) mit $g(x) \neq 0$ konstruiert werden.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll diese Methode am Beispiel einer DGL 2-ter Ordnung der Form

$$y'' + a y' + b y = g(x) \tag{43}$$

diskutiert werden. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen von (43) für den Fall $g(x) = 0$, d.h., es gilt

$$y_k'' + a y_k' + b y_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

und

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung haben bekanntlich die Form

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) ,$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind, die im Falle der Vorgabe von Anfangsbedingungen zu spezifizieren sind. Für die Lösung der Gleichung (43) machen wir den Ansatz

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) , \tag{44}$$

d.h., wir wollen durch die **Variation der Konstanten** C_1 und C_2 der Lösung der homogenen DGL eine Lösung der inhomogenen DGL gewinnen.

Aus dem Ansatz (44) folgt

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) \quad \text{bzw.}$$

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) , \tag{45}$$

wenn wir von den Funktionen C_1 und C_2

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \tag{46}$$

fordern. Durch weitere Differentiation von (45) erhält man für $y''(x)$

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x). \quad (47)$$

Nach dem Einsetzen der Beziehungen (45) und (47) in die Gleichung (43) und nach Umordnung der Glieder erhalten wir schließlich

$$C_1(x)[y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] + \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \quad .$$

Da y_1 und y_2 Lösungen der homogenen DGL sind, verschwinden die Glieder in den eckigen Klammern, so daß die Gleichung

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \quad (48)$$

übrig bleibt. Mit (46) und (48) hat man nun ein Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1' und C_2' zur Verfügung. Da y_1, y_2 ein Fundamentalsystem sein sollte ($W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$), ist das Gleichungssystem lösbar, mit den Lösungen

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)},$$

und damit

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(\tilde{x})g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x} + C_3 \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(\tilde{x})g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x} + C_4,$$

so daß man die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (43) in der Form

$$y(x) = [C_1 - \int \frac{y_2(\tilde{x})g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x}]y_1(x) + [C_2 + \int \frac{y_1(\tilde{x})g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x}]y_2(x) \quad (49)$$

aufschreiben kann (C_1 und C_2 sind dabei reelle Konstanten).

Die Methode der **Variation der Konstanten** kann auf lineare DGL beliebiger Ordnung angewendet werden, wobei man bei jeder Berechnung der nächst höheren Ableitung Zusatzbedingungen der Art (46) einführen muß. So sind bei einer Gleichung n -ter Ordnung, in der die variierten Konstanten $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ und das Fundamentalsystem der homogenen DGL $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ vorkommen, die Zusatzbedingungen

$$C_1'y_1^{(k)} + C_2'y_2^{(k)} + \dots + C_n'y_n^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

einzuführen, die zusammen mit der Gleichung

$$C_1'y_1^{(k)} + C_2'y_2^{(k)} + \dots + C_n'y_n^{(k)} = g(x)$$

ein lösbares Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1', C_2', \dots, C_n' bilden.

Beispiel:

Wir betrachten die DGL

$$y'' + 5y' + 6y = xe^{-x}. \quad (50)$$

Mit den Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -2$ des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ erhält man mit

$$y_{hom}(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$$

die Lösung der homogenen Aufgabe. $y_1 = e^{-3x}$ und $y_2 = e^{-2x}$ bilden ein Fundamentalsystem und für $W(x)$ erhält man $W(x) = e^{-5x}$. Damit ergibt sich nach (49) mit

$$y(x) = [C_1 - \int x e^{2x} dx]e^{-3x} + [C_2 + \int x e^x dx]e^{-2x}$$

bzw. nach Auswertung der Integrale

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{3}{4} e^{-x}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL 2-ter Ordnung (50).

2.6.4 Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und "einfachen" Inhomogenitäten

Die Methode der Variation der Konstanten führt in jedem Fall zu einer partikulären Lösung einer inhomogenen linearen DGL n -ter Ordnung (sowohl bei konstanten, als auch bei nicht konstanten Koeffizienten).

Es gibt aber bei speziellen rechten Seiten von linearen DGLn n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten eine einfachere Methode zur Berechnung von partikulären Lösungen. Wenn es sich um rechte Seiten der Form

$$p_m(x), \quad p_m(x)e^{\alpha x}, \quad p_m(x)\sin(\beta x), \quad p_m(x)\cos(\gamma x), \quad m \in \mathbb{N}$$

oder Linearkombinationen dieser Funktionen handelt, kann man für die partikuläre Lösung einen **Ansatz nach der Art der rechten Seite** machen ($p_m(x)$ steht hier für ein Polynom m -ten Grades).

Wenn wir das obige Beispiel

$$y'' + 5y' + 6y = x e^{-x}$$

betrachten, so kann man für die partikuläre Lösung den Ansatz nach der Art der rechten Seite machen

$$y_p(x) = a e^{-x} + b x e^{-x}.$$

Mit

$$y_p' = -a e^{-x} + b e^{-x} - b x e^{-x}$$

$$y_p'' = a e^{-x} - b e^{-x} - b e^{-x} + b x e^{-x} = a e^{-x} - 2b e^{-x} + b x e^{-x}$$

erhält durch Einsetzen in die DGL

$$a e^{-x} - 2b e^{-x} + b x e^{-x} - 5a e^{-x}$$

$$+ 5b e^{-x} - 5b x e^{-x} + 6a e^{-x} + 6b x e^{-x} = x e^{-x}.$$

bzw.

$$(2a + 3b)e^{-x} + 2b x e^{-x} = x e^{-x},$$

woraus

$$b = \frac{1}{2} \quad a = -\frac{3}{4}$$

folgt, so daß die allgemeine Lösung die Form

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{3}{4} e^{-x}$$

hat.

Es gibt nun sehr viele Fälle, die man beim Ansatz nach der Art der rechten Seite zu unterscheiden hat. Einige sollen im Folgenden diskutiert werden.

Bemerkung 2.22. (Resonanzfall)

Der Begriff "Resonanz" stammt von einem harmonischen, ungedämpften⁴ Schwingungsproblem der Form

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t) .$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$ sind

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i .$$

Für den Fall $\omega \neq \omega_0$ führt der Ansatz

$$y_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

durch Einsetzen in die DGL zu der partikulären Lösung

$$y_p = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

und damit durch Superposition zu allgemeinen Lösung der inhomogenen DGL

$$y = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) .$$

Im Fall $\omega = \omega_0$ führt der Ansatz

$$y_p = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$$

nach Einsetzen in die DGL zu der partikulären Lösung

$$y_p = -\frac{K}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t) .$$

Man spricht hier vom "Resonanzfall", da die Amplitude von y_p im gleichen Maße wie t wächst. Die Frequenz ω der äußeren Kraft (rechte Seite) stimmt mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems überein.

Definition 2.23. (Resonanz)

In Verallgemeinerung des Resonanzfalles eines Schwingungsproblems wollen wir von Resonanz sprechen, wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x) \tag{51}$$

Fundamentallösung der homogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

ist.

⁴Hat die Schwingungsgleichung die Form $y'' + ry' + \omega_0 y = K \sin(\omega t)$, spricht man im Fall $r \neq 0$ von einem gedämpften System.

In der folgenden Tabelle werden für rechte Seiten der Art

$$p_m(x), \quad p_m(x)e^{\alpha x}, \quad p_m(x) \sin(\beta x), \quad p_m(x) \cos(\gamma x)$$

die Ansätze nach der Art der rechten Seite für eine spezielle Lösung $y_p(x)$ angegeben. Mit $p_m(x)$, $R_m(x)$, $S_m(x)$, $T_m(x)$ und $Q_m(x)$ bezeichnen wir Polynome m -ten Grades.

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen DGL ist, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen DGL ist.
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x) \sin(\beta x)$ $R_m(x) \cos(\beta x)$	$T_m(x) \sin(\beta x)$ $+ Q_m(x) \cos(\beta x)$	
Kombination dieser Funktionen	entspr. Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

Ist die rechte Seite eine Summe von zwei oder mehreren in der Tabelle aufgeführten möglichen Typen, z.B.

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

so macht man einen Ansatz y_{p1} nach der Art von g_1 und einen Ansatz y_{p2} nach der Art von g_2 , und erhält mit

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

die gesuchte partikuläre Lösung.

Da es schwer möglich ist, alle Fälle zu erfassen, sei darauf hingewiesen, daß man im Falle eines falschen Ansatzes für $y_p(x)$ spätestens beim Versuch der Bestimmung der Koeffizienten a, b, \dots scheitert, denn die Koeffizienten lassen sich **nur im Falle eines richtigen Ansatzes** eindeutig bestimmen!

Zur Rechtfertigung der in der Tabelle angegebenen Ansätze sollen nun einige Typen von rechten Seiten $g(x)$ diskutiert werden.

(a) $g(x) = A e^{\lambda x}$, $A, \lambda \in \mathbb{R}$

Ansatz:

$$y_p = B e^{\lambda x}. \quad (52)$$

Nach dem Einsetzen in die DGL (51) mit dem charakteristischen Polynom $P(\lambda)$ erhält man

$$B P(\lambda) e^{\lambda x} = A e^{\lambda x}$$

und damit unter der Voraussetzung $P(\lambda) \neq 0$ die partikuläre Lösung

$$y_p = B e^{\lambda x} = \frac{A}{P(\lambda)} e^{\lambda x}.$$

Der Ansatz (52) ist also nur möglich, wenn λ **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Sei nun λ k -fache Nullstelle von $P(\lambda)$. Ein Ansatz der Form

$$y_p = B x^k e^{\lambda x} \quad (53)$$

führt durch Einsetzen in die DGL (51) zu der partikulären Lösung

$$y_p = B x^k e^{\lambda x} = \frac{A}{P^{(k)}(\lambda)} x^k e^{\lambda x} .$$

- (b) $g(x) = R_m(x) e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $R_m(x)$ Polynom m -ten Grades.
Ist λ keine Nullstelle von $P(\lambda)$, so führt der Ansatz

$$y_p = T_m(x) e^{\lambda x} \quad (54)$$

mit einem Polynom $T_m(x)$ m -ten Grades zu einer partikulären Lösung, wobei die Koeffizienten von $T_m(x)$ nach Einsetzen des Ansatzes (54) in die DGL (51) durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen sind.

Ist λ eine k -fache Nullstelle von $P(\lambda)$ so führt der Ansatz

$$y_p = T_m(x) x^k e^{\lambda x} \quad (55)$$

zu einer partikulären Lösung, wobei die Koeffizienten von $T_m(x)$ nach Einsetzen des Ansatzes (55) in die DGL (51) durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen sind.

- (c) $g(x) = R_m(x) e^{ax} \cos(bx + c)$ oder $g(x) = R_m(x) e^{ax} \sin(bx + c)$,
 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ist $\lambda = a + i b$ keine (komplexe) Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$, so führt der Ansatz

$$y_p = T_m(x) e^{ax} \cos(bx) + S_m(x) e^{ax} \sin(bx) \quad (56)$$

zu einer partikulären Lösung, wobei die Koeffizienten von $T_m(x)$ und $S_m(x)$ nach Einsetzen des Ansatzes (56) in die DGL (51) durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen sind.

Ist $\lambda = a + i b$ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ so führt der Ansatz

$$y_p = x^k [T_m(x) e^{ax} \cos(bx) + S_m(x) e^{ax} \sin(bx)] \quad (57)$$

zu einer partikulären Lösung, wobei die Koeffizienten von $T_m(x)$ und $S_m(x)$ nach Einsetzen des Ansatzes (56) in die DGL (51) durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen sind.

Ist $a = 0$, so liegt der oben beschriebene Resonanzfall vor, wenn $\lambda = i b$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist.

Beispiel 1:

$$u'' + 2u' + 2u = 3 \sin(2x)$$

Zur Lösung der homogenen DGL bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

und erhalten

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i .$$

Damit sind

$$z_1(x) = e^{(-1+i)x}, \quad z_2(x) = e^{(-1-i)x}$$

komplexe Fundamentallösungen, und damit sind

$$y_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad y_2(x) = e^{-x} \sin x$$

die reellen Fundamentallösungen der homogenen DGL $u'' + 2u' + 2u = 0$. Damit liegt kein Resonanzfall vor, und für $y_p(x)$ ist der Ansatz

$$y_p(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$$

zu machen. Mit $y_p' = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)$ und $y_p'' = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x)$ erhält durch Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + 4a \cos(2x) - 4b \sin(2x) \\ + 2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) = 3 \sin(2x), \end{aligned}$$

bzw.

$$[-2a - 4b] \sin(2x) + [-2b + 4a] \cos(2x) = 3 \sin(2x).$$

Zur Bestimmung von a und b ergibt sich beim Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2a - 4b &= 3 \\ 4a - 2b &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = -\frac{3}{10}$ und $b = -\frac{3}{5}$.

Als allgemeine Lösung ergibt sich schließlich

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x - \frac{3}{10} \sin(2x) - \frac{3}{5} \cos(2x).$$

Beispiel 2:

$$y'' - y = 4e^x$$

Die Auswertung des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

ergibt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 1$ und damit die Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

Da die rechte Seite Lösung der homogenen DGL ist, liegt ein Resonanzfall vor. Weil die Nullstelle $\lambda = 1$ die Vielfachheit 1 hat, ergibt sich der Ansatz nach der Art der rechten Seite

$$y_p(x) = a x e^x.$$

Mit $y_p'(x) = a e^x + a x e^x$ und $y_p''(x) = a e^x + a e^x + a x e^x$ ergibt sich nach dem Einsetzen in die DGL

$$2a e^x + a x e^x - a x e^x = 4 e^x.$$

Daraus folgt $a = 2$ und es ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL zu

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2 x e^x.$$

Beispiel 3:

$$y''' - 2y'' = 1 + 2x - (3 + x + 5x^2)e^{2x}.$$

Die Auswertung des charakteristischen Polynoms ergibt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 2,$$

aufgrund der Vielfachheit 2 der Nullstelle $\lambda = 0$ ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = x e^{0x} = x, \quad y_3(x) = e^{2x}.$$

Die rechte Seite hat die Form $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Aufgrund der Resonanz und der Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ ergibt sich für y_{p1} der Ansatz

$$y_{p1} = (a + bx)x^2,$$

und nach dem Einsetzen in die DGL ergibt sich

$$y'_{p1} = bx^2 + (a + bx)2x, \quad y''_{p1} = 4bx + (a + bx)2, \quad y'''_{p1} = 6b,$$

und damit

$$y'''_{p1} - 2y''_{p1} = 1 + 2x \quad \text{bzw.} \quad 6b - 4a - 12bx = 1 + 2x.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$b = -\frac{1}{6}, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad \text{und damit} \quad y_{p1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x\right)x^2.$$

Der Ansatz für y_{p2} lautet aufgrund der Resonanz

$$y_{p2} = (c + dx + kx^2)xe^{2x}.$$

Mit

$$\begin{aligned} y''_{p2} &= (2d + 6kx)e^{2x} + (c + 2dx + 3kx^2)2e^{2x} \\ &\quad + (c + 2dx + 3kx^2)2e^{2x} + (cx + dx^2 + kx^3)4e^{2x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y'''_{p2} &= 6ke^{2x} + 12kxe^{2x} + (2d + 6kx)4e^{2x} + (c + 2dx + 3kx^2)8e^{2x} \\ &\quad + (c + 2dx + 3kx^2)4e^{2x} + (cx + dx^2 + kx^3)8e^{2x} \end{aligned}$$

ergibt sich nach dem Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} y'''_{p2} - 2y''_{p2} &= (12c + 8d + 6k)e^{2x} + (8c + 24d + 36k)xe^{2x} + (8d + 36k)x^2e^{2x} + 8kx^3e^{2x} \\ &\quad - (8c + 4d)e^{2x} - (8c + 16d + 12k)xe^{2x} - (8d + 24k)x^2e^{2x} - 8kx^3e^{2x} \\ &= -3e^{2x} - xe^{2x} - 5x^2e^{2x}. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich

$$4c + 4d + 6k = -3, \quad 8d + 24k = -1, \quad 12k = -5$$

ergibt

$$k = -\frac{5}{12}, \quad d = \frac{9}{8}, \quad c = -\frac{30}{24} = -\frac{5}{4}$$

Mit

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x\right)x^2 + \left(-\frac{5}{4} + \frac{9}{8}x - \frac{5}{12}x^2\right)xe^{2x}$$

hat man eine partikuläre Lösung bestimmt.

2.7 Spezielle reduzierbare DGLn 2.Ordnung

2.7.1 Die DGL vom Typ $F(x, y', y'') = 0$

Hier liegt eine Differentialgleichung vor, in der y nicht explizit auftritt. Mit der Substitution

$$v := y'$$

ergibt sich mit

$$F(x, v, v') = 0 \tag{58}$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion v . Ist $v = \Psi(x, C)$ die allgemeine Lösung der DGL (58), so erhält man mit

$$y(x) = \int \Psi(x, C) dx + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R} \tag{59}$$

die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Beispiel:

$$y'' = 5 \ln x y', \quad x > 0.$$

Für $v = y'$ erhält man die DGL

$$v' = 5 \ln x v,$$

mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhält man

$$\int \frac{dv}{v} = 5x \ln x - 5x + C,$$

bzw.

$$\ln |v| = 5x \ln x - 5x + C \quad \text{und damit} \quad v = C_1 e^{5x \ln x - 5x} = C_1 x^{5x} e^{-5x}.$$

Die Integration⁵ ergibt mit

$$y(x) = C_1 \int x^{5x} e^{-5x} dx + C_2$$

eine Lösung der DGL 2. Ordnung.

Als weiteres Beispiel kann als **Übung** die DGL

$$y'' = a \sqrt{1 + y'^2}$$

mit der beschriebenen Methode gelöst werden. Hinweis:

Als Lösung erhält man bei richtiger Rechnung

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax + C) + C_1.$$

⁵Wenn hier explizit keine analytische Stammfunktion gefunden wird, muß man die Lösung eines AWP gegebenenfalls numerisch berechnen.

2.7.2 Die DGL vom Typ $F(y, y', y'') = 0$

Die unabhängige Veränderliche x tritt nicht explizit in der DGL auf. Wenn man y' als Funktion v von y betrachtet, also

$$v(y) := y'$$

setzt, erhält mit der Kettenregel

$$y'' = \frac{d}{dx}v(y) = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y).$$

Damit erhält man statt der ursprünglichen DGL 2. Ordnung die DGL 1. Ordnung

$$F(y, v, v'v) = 0 \tag{60}$$

für v . Ist $v = \Psi(y, C)$ die allgemeine Lösung der DGL (60), so ergibt sich auf Grund des Ansatzes $v(y) = y'$ mit

$$y' = \Psi(y, C)$$

eine trennbare DGL für y mit der allgemeinen **impliziten** Lösung

$$\int_{y_0}^y \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:

$$y'' = -\frac{y'^2}{5y}.$$

Mit $v(y) = y'$ bzw. $y'' = v'v$ erhält man die DGL 1. Ordnung

$$vv' = -\frac{v^2}{5y}$$

für v . Mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhalten wir

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{5} \ln |y| + C \quad \text{bzw.} \quad v(y) = C_1 y^{-\frac{1}{5}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz $y' = v(y)$ führt auf die Gleichung

$$y' = C_1 y^{-\frac{1}{5}},$$

für die man mit der Methode der Trennung der Veränderlichen

$$\int y^{\frac{1}{5}} dy = C_1 x + C_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} = C_1 x + C_2$$

und damit die Lösung

$$y(x) = [C_3 x + C_4]^{\frac{5}{6}}$$

erhält.

Als weiteres Beispiel sei die Differentialgleichung zur Berechnung der Fallgeschwindigkeit (\dot{x} als Zeitableitung des bewegten Punktes $x(t)$) eines Fallschirmspringers

$$\ddot{x} = g - k^2 \dot{x}^2$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ gegeben ($x(t)$ beschreibt hier den zurückgelegten Weg des Fallschirmspringers). In der DGL fehlen x und die unabhängige Veränderliche t . Mit der Substitution $\dot{x} = v(x)$ erhält man $\ddot{x} = v'v$ und die DGL 1. Ordnung

$$v'v = g - k^2v^2$$

für v . Mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhält man

$$\int \frac{v \, dv}{g - k^2v^2} = \int dx = x + C \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{2k^2} \ln(g - v^2k^2) = x + C$$

wenn man $(g - k^2v^2) > 0$ fordert⁶ Es ergibt sich nun

$$g - k^2v^2 = e^{-2k^2(x+C)}$$

und für $t = 0$ erhält man $g = e^{-2k^2C}$. Schließlich ergibt sich damit

$$g - k^2v^2 = ge^{-2k^2x} \quad \text{bzw.} \quad v^2 = \frac{1}{k^2}g(1 - e^{-2k^2x}).$$

Für die Geschwindigkeit \dot{x} erhält man letztlich

$$\dot{x} = v = \frac{1}{k} \sqrt{g(1 - e^{-2k^2x})}.$$

2.8 Numerische Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLn

Zahlreiche Problemstellungen der angewandten Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften führen auf mehr oder weniger komplizierte Differentialgleichungen oder Systeme von DGLn, die man sehr oft nicht analytisch lösen kann. Aufgrund der Kenntnisse über die Existenz und Einzigkeit von Lösungen in Abhängigkeit von den Eigenschaften der DGL ist es aber möglicherweise lohnenswert, auf numerischen Weg nach der oder einer Lösung zu suchen. Einige numerische Lösungsmethoden sollen im Folgenden dargestellt werden.

2.8.1 Die Methode von Euler

Wir betrachten die DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{61}$$

für die gesuchte Lösungsfunktion $y(x)$ bei Vorgabe der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, \tag{62}$$

wobei x_0 und y_0 vorgegebene Werte sind. Da die DGL (61) im Punkt (x_0, y_0) mit dem Wert $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ die Steigung der Tangente der gesuchten Funktion festlegt, besteht die einfachste numerische Methode zur numerischen Lösung des AWP (61,62) darin, die Lösungskurve im Sinn einer Linearisierung durch die Tangente zu approximieren. Mit der Schrittweite h und den zugehörigen äquidistanten Stützstellen

$$x_k = x_0 + k h, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

erhält man die Näherungen y_k für die exakten Lösungswerte $y(x_k)$ aufgrund der Rechenvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{63}$$

⁶Auf der linken Seite wurde $[\ln(g - k^2v^2)]' = \frac{-2k^2v}{g - k^2v^2}$ genutzt.

Die durch (63) definierte Methode nennt man **Integrationsmethode von Euler**. Sie benutzt in den einzelnen Näherungspunkten (x_k, y_k) die Steigung des durch die DGL definierten Richtungsfeldes dazu, den nächstfolgenden Näherungswert y_{k+1} zu bestimmen. Wegen der anschaulich geometrischen Konstruktion der Näherungen bezeichnet man das Verfahren auch **Polygonzugmethode**. Diese Methode ist recht grob und ergibt nur bei sehr kleinen Schrittweiten h gute Näherungswerte. Die Polygonzugmethode ist die einfachste explizite Einzelschrittverfahren. Die Abbildung 8 verdeutlicht die Methode graphisch.

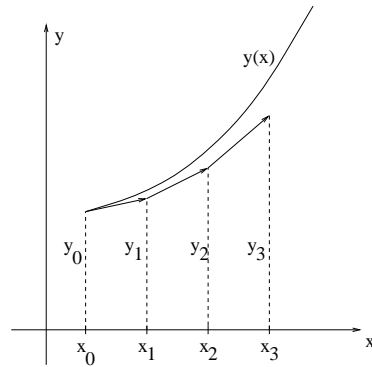


Abbildung 8: explizite Euler-Methode

2.8.2 Diskretisierungsfehler und Fehlerordnung

Beim Euler-Verfahren wurde schon darauf hingewiesen, daß es sich um eine grobe Methode handelt. Zur quantitativen Beurteilung der Genauigkeit von Einzelschrittverfahren betrachten wir in Verallgemeinerung der bisher betrachteten Methode eine implizite Rechenvorschrift der Art

$$y_{k+1} = y_k + h \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) \quad (64)$$

aus der man bei gegebener Information (x_k, y_k) und der Schrittweite h den neuen Näherungswert y_{k+1} an der Stelle $x_{k+1} = x_k + h$ zu berechnen hat. Bei der expliziten Euler-Methode ist

$$\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) = f(x_k, y_k)$$

als explizite Methode unabhängig von y_{k+1} . Hängt Φ tatsächlich von y_{k+1} ab, bedeutet (64) in jedem Zeitschritt die Lösung einer i.allg. nichtlinearen Gleichung zur Bestimmung von y_{k+1} .

Definition 2.24. (lokaler Diskretisierungsfehler)

Unter dem lokalen Diskretisierungsfehler an der Stelle x_{k+1} versteht man den Wert

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) \quad (65)$$

Der lokale Diskretisierungsfehler d_{k+1} stellt die Abweichung dar, um die die exakte Lösungsfunktion $y(x)$ die Integrationsvorschrift in einem einzelnen Schritt nicht erfüllt. Im Fall der Euler-Methode besitzt d_{k+1} die Bedeutung der Differenz zwischen dem exakten Wert $y(x_{k+1})$ und dem berechneten Wert y_{k+1} , falls an der Stelle x_k vom exakten Wert $y(x_k)$ ausgegangen wird. Der Wert d_{k+1} stellt dann den **lokalen** Fehler eines einzelnen Integrationsschrittes dar. Für praktische numerische Lösung der DGL ist der Fehler wichtig, den die Näherung nach einer bestimmten Zahl von Integrationsschritten gegenüber der exakten Lösung aufweist.

Definition 2.25. (globaler Diskretisationsfehler)

Unter dem globalen Diskretisationsfehler g_k an der Stelle x_k versteht man den Wert

$$g_k := y(x_k) - y_k \quad (66)$$

Es ist im Rahmen einer HM II-Vorlesung nicht möglich, ausführlich über die Hintergründe von numerischen Lösungsverfahren von DGL sprechen. Ein Eindruck und einige wichtige Aussagen sollen jedoch gemacht werden.

Um Fehler überhaupt abschätzen zu können, sind von Φ Lipschitz-Bedingungen der Art

$$|\Phi(x, y, z, h) - \Phi(x, y^*, z, h)| \leq L|y - y^*| \quad (67)$$

$$|\Phi(x, y, z, h) - \Phi(x, y, z^*, h)| \leq L|z - z^*| \quad (68)$$

für x, y, y^*, z, z^*, h aus einem Bereich, der für die DGL relevant ist, zu erfüllen. Für die Lipschitz-Konstante soll $0 < L < \infty$ gelten. Außerdem fordert man von der Lösungsfunktion $y(x)$ und von Φ , daß sie hinreichend oft stetig differenzierbar sein sollen.

Aus der Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers errechnet man

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) + d_{k+1}$$

und durch Subtraktion von (64) erhält man nach Ergänzung einer "nahrhaften" Null

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= g_k + h[\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h) + \\ &\quad + \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)] + d_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen der Lipschitz-Bedingungen folgt daraus im allgemeinen impliziten Fall

$$\begin{aligned} |g_{k+1}| &\leq |g_k| + h[L|y(x_k) - y_k| + L|y(x_{k+1}) - y_{k+1}|] + |d_{k+1}| \\ &= (1 + hL)|g_k| + hL|g_{k+1}| + |d_{k+1}|. \end{aligned} \quad (69)$$

Unter der Voraussetzung $hL < 1$ ergibt sich weiter

$$|g_{k+1}| \leq \frac{1 + hL}{1 - hL}|g_k| + \frac{|d_{k+1}|}{1 - hL}. \quad (70)$$

Zu jedem $h > 0$ existiert eine Konstante $K > 0$, so daß in (70)

$$\frac{1 + hL}{1 - hL} = 1 + hK$$

gilt. Für ein explizites Einschrittverfahren entfällt in (69) das Glied $hL|g_{k+1}|$, so daß aus (69) die Ungleichung

$$|g_{k+1}| \leq (1 + hL)|g_k| + |d_{k+1}| \quad (71)$$

folgt. Der Betrag des lokalen Diskretisierungsfehlers soll durch

$$\max_k |d_k| \leq D$$

abgeschätzt werden. Bei entsprechender Festsetzung der Konstanten a und b erfüllen die Beträge gemäß (70) und (71) eine Differenzungleichung

$$|g_{k+1}| \leq (1 + a)|g_k| + b. \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (72)$$

Lemma 2.26.

Erfüllen die Werte g_k die Ungleichung (72), dann gilt

$$|g_n| \leq \frac{(1+a)^n - 1}{b} + (1+a)^n |g_0| \leq \frac{b}{a} [e^{na} - 1] + e^{na} |g_0|. \quad (73)$$

Der Beweis ergibt sich durch die wiederholte Anwendung der Ungleichung (72) bzw. der Eigenschaft der Exponentialfunktion $(1+t) \leq e^t$ für alle t . Aus dem Hilfssatz ergibt sich der folgende wichtige Satz.

Satz 2.27.

Für den globalen Fehler g_n an der festen Stelle $x_n = x_0 + nh$ gilt für eine explizite Einschritt-
methode

$$|g_n| \leq \frac{D}{hL} [e^{nhL} - 1] \leq \frac{D}{hL} e^{nhL}, \quad (74)$$

und für eine implizite Methode

$$|g_n| \leq \frac{D}{hK(1-hL)} [e^{nhK} - 1] \leq \frac{D}{hK(1-hL)} e^{nhK}. \quad (75)$$

Unter "normalen" Umständen⁷ kann man für die Konstante D zur Abschätzung des maximalen lokalen Diskretisationsfehlers die Beziehung

$$D \leq \frac{1}{2} h^2 M \quad (76)$$

zeigen, wobei M eine obere Schranke des Betrages der 2. Ableitungen von der Lösung y ist. Damit ergibt sich z.B. für das explizite Euler-Verfahren die Abschätzung

$$|g_n| \leq h \frac{M}{2L} e^{L(x_n - x_0)} := hC, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (77)$$

für den globalen Fehler. Wenn man die Stelle x_n festhält und die Schrittweite $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ mit größer werdenden n abnimmt, dann bedeutet (77), daß die Fehlerschranke proportional zur Schrittweite abnimmt. Man sagt, daß die Methode von Euler die Fehlerordnung 1 besitzt.

Definition 2.28.

Ein Einschrittverfahren (64) besitzt die Fehlerordnung p , falls für seinen lokalen Diskretisationsfehler d_k die Abschätzung

$$\max_{1 \leq k \leq n} |d_k| \leq D = \text{const.} \cdot h^{p+1} = O(h^{p+1}) \quad (78)$$

gilt.

Korollar 2.29.

Der globale Fehler einer expliziten Methode mit der Fehlerordnung p ist wegen (74) beschränkt durch

$$|g_n| \leq \frac{\text{const.}}{L} e^{nhL} \cdot h^p = O(h^p). \quad (79)$$

Definition 2.30.

Ein Einschrittverfahren (64) heißt mit der Differentialgleichung (61) konsistent, falls seine Fehlerordnung mindestens gleich 1 ist.

⁷Hier ist die p -fache stetige Differenzierbarkeit der Lösungsfunktion y der DGL gemeint.

2.8.3 Verbesserte Polygonzugmethode und Trapezmethode

Um zu einer Methode mit einer Fehlerordnung größer als 1 zu gelangen, nehmen wir an, mit der Polygonzugmethode (63) seien bis zu einer gegebenen Stelle x zwei Integrationen durchgeführt worden, zuerst mit der Schrittweite $h_1 = h$ und dann mit der Schrittweite $h_2 = \frac{h}{2}$. Für die erhaltenen Werte y_n und y_{2n} nach n , bzw. $2n$ Integrationsschritten gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} y_n &\approx y(x) + c_1 h + O(h^2) \\ y_{2n} &\approx y(x) + c_1 \frac{h}{2} + O(h^2) . \end{aligned}$$

Durch Linearkombination der beiden Beziehungen erhält man nach der sogenannten Richardson-Extrapolation den extrapolierten Wert

$$\tilde{y} = 2y_{2n} - y_n \approx y(x) + O(h^2) , \quad (80)$$

dessen Fehler gegenüber $y(x)$ von **zweiter** Ordnung in h ist.

Anstatt eine DGL nach der Eulermethode zweimal mit unterschiedlichen Schrittweiten parallel zu integrieren, ist es besser, die Extrapolation direkt auf die Werte anzuwenden, die einmal von einem Integrationsschritt mit der Schrittweite h und andererseits von einem Doppelschritt mit halber Schrittweite stammen. In beiden Fällen startet man vom Näherungspunkt (x_k, y_k) .

Der Normalschritt mit der Eulermethode mit der Schrittweite h ergibt

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf(x_k, y_k) . \quad (81)$$

Ein Doppelschritt mit der Schrittweite $\frac{h}{2}$ ergibt sukzessiv die Werte

$$\begin{aligned} y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) , \\ y_{k+1}^{(2)} &= y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} + \frac{h}{2} f(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}) . \end{aligned} \quad (82)$$

Die Richardson-Extrapolation angewandt auf $y_{k+1}^{(2)}$ und $y_{k+1}^{(1)}$ ergibt

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 2y_{k+1}^{(2)} - y_{k+1}^{(1)} \\ &= 2y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}) - y_k - hf(x_k, y_k) \\ &= 2y_k + hf(x_k, y_k) + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}) - y_k - hf(x_k, y_k) \\ &= y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)) . \end{aligned} \quad (83)$$

Wir fassen das Ergebnis (83) algorithmisch zusammen

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h k_2 \end{aligned} \quad (84)$$

und nennen die Rechenvorschrift (84) **verbesserte** Polygonzugmethode von Euler. Dabei stellt k_1 die Steigung des Richtungsfeldes im Punkt (x_k, y_k) dar, mit der der Hilfspunkt $(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1)$ und die dazugehörige Steigung k_2 berechnet wird. Schließlich wird y_{k+1} mit der Steigung k_2 berechnet. Die geometrische Interpretation eines Verfahrensschrittes ist in Abb. 9 dargestellt.

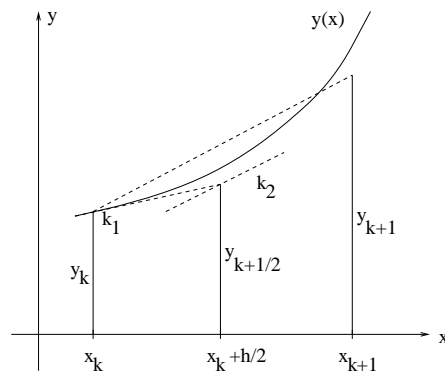


Abbildung 9: verbesserte Polygonzug-Methode

Eine genaue Untersuchung des lokalen Diskretisationsfehlers d_{k+1} , die hier nicht angeführt werden soll, ergibt eine Fehlerordnung der verbesserte Polygonzugmethode von 2.

Wenn man die DGL (61) integriert, erhält man mit

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (85)$$

eine zur DGL äquivalente Integralgleichung. Da für die rechte Seite i.d.R. keine Stammfunktion angegeben werden kann, wird das Integral mit einer Quadraturformel approximiert. Wenn man die Trapezregel anwendet, wird (85) nur näherungsweise gelöst, so daß $y(x_{k+1})$ durch y_{k+1} und $y(x_k)$ durch y_k ersetzt werden, und man erhält mit

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \quad (86)$$

die **Trapezmethode** als **implizite** Integrationsmethode, weil in jedem Integrationsschritt eine Gleichung zur Bestimmung von y_{k+1} zu lösen ist.

Da diese Gleichung oft nichtlinear ist, wird zur Lösung eine Fixpunkt-Iteration (siehe HM I) verwendet. Man startet mit

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (87)$$

und die Wertefolge

$$y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s)})], \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (88)$$

konvergiert gegen den Fixpunkt y_{k+1} , falls $\Psi(x, y) := f(x, y)$ die Bedingung (67) mit der Konstanten L erfüllt und $\frac{hL}{2} < 1$ ist, weil damit die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Da der Wert y_{k+1} , wie er durch (86) definiert ist, nur eine Näherung für $y(x_{k+1})$ ist, beschränkt man sich in der Praxis darauf, in der Fixpunktiteration (88) nur einen Schritt auszuführen. Damit erhält man die Methode von Heun in der Form

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(p)} &= y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)})]. \end{aligned} \quad (89)$$

Dabei wird mit der expliziten Methode von Euler ein sogenannter **Prädiktorwert** $y_{k+1}^{(p)}$ bestimmt, der dann mit der impliziten Trapezmethode zum Wert y_{k+1} korrigiert wird. Die Methode

von Heun bezeichnet man deshalb auch als **Prädiktor-Korrektor**-Methode, die algorithmisch die Form

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + h, y_k + h k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}[k_1 + k_2] \end{aligned} \quad (90)$$

hat. Es werden also die Steigungen k_1 und k_2 zur Bestimmung von y_{k+1} gemittelt. Die Trapez-Methode und die Prädiktor-Korrektor-Methode haben ebenso wie die verbesserte Polygonzugmethode die Fehlerordnung 2.

2.8.4 Runge-Kutta-Verfahren

Die verbesserte Polygonzugmethode und die Methode von Heun sind Repräsentanten von expliziten zweistufigen **Runge-Kutta**-Verfahren mit der Fehlerordnung 2. Nun soll die Herleitung von Einzelschrittmethoden höherer Fehlerordnung am Beispiel eines dreistufigen Runge-Kutta-Verfahrens kurz dargelegt werden.

Ausgangspunkt ist wiederum die zur DGL äquivalente Integralgleichung

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx .$$

Der Wert des Integrals soll durch eine allgemeine Quadraturformel, die auf 3 Stützstellen im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ mit entsprechenden Gewichten beruht, beschrieben werden, so daß man den Ansatz

$$y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + h[c_1 f(\xi_1, y(\xi_1)) + c_2 f(\xi_2, y(\xi_2)) + c_3 f(\xi_3, y(\xi_3))] \quad (91)$$

erhält. In (91) sind also einerseits die Integrationsstellen ξ_i und die unbekanntenen Werte $y(\xi_i)$ festzulegen. Für die letzteren wird die Idee der Prädiktormethode verwendet, wobei die Methode explizit bleiben soll. Für die Integrationsstellen setzt man

$$\xi_1 = x_k, \quad \xi_2 = x_k + a_2 h, \quad \xi_3 = x_k + a_3 h, \quad 0 < a_2, a_3 \leq 1, \quad (92)$$

an. Wegen $\xi_1 = x_k$ wird $y(\xi_1) = y_k$ gesetzt. Für die verbleibenden Werte werden die Prädiktoransätze

$$\begin{aligned} y(\xi_2) : \quad y_2^* &= y_k + h b_{21} f(x_k, y_k) \\ y(\xi_3) : \quad y_3^* &= y_k + h b_{31} f(x_k, y_k) + h b_{32} f(x_k + a_2 h, y_2^*) \end{aligned} \quad (93)$$

mit den drei weiteren Parametern b_{21}, b_{31}, b_{32} gemacht. Der erste Prädiktorwert y_2^* hängt von der Steigung in (x_k, y_k) ab, und der zweite Wert y_3^* hängt darüberhinaus noch von der Steigung im Hilfspunkt (ξ_2, y_2^*) ab. Wenn man die Ansätze (92) und (93) in (91) einsetzt, ergibt sich der Algorithmus

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + a_2 h, y_k + h b_{21} k_1) \\ k_3 &= f(x_k + a_3 h, y_k + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)) \\ y_{k+1} &= y_k + h[c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3] . \end{aligned} \quad (94)$$

Da beim Algorithmus (94) die Funktion $f(x, y)$ pro Integrationsschritt dreimal ausgewertet werden muß, spricht man von einem dreistufigen Runge-Kutta-Verfahren.

Ziel bei der Bestimmung der 8 Parameter $a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}, c_1, c_2, c_3$ ist eine möglichst hohe Fehlerordnung des Verfahrens. Dies wird im Rahmen einer Analyse des lokalen Diskretisierungsfehlers getan. Bevor man dies tut, wird von den Parametern

$$a_2 = b_{21} \quad a_3 = b_{31} + b_{32} \quad (95)$$

gefordert, mit dem Motiv, daß die Prädiktorwerte y_2^* und y_3^* für die spezielle DGL $y' = 1$ exakt sein sollen.

Der lokale Diskretisierungsfehler des Verfahrens (94) ist gegeben durch

$$d_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h[c_1 \bar{k}_1 + c_2 \bar{k}_2 + c_3 \bar{k}_3], \quad (96)$$

wobei \bar{k}_i die Ausdrücke bedeuten, die aus k_i dadurch hervorgehen, daß y_k durch $y(x_k)$ ersetzt wird. Nach der Entwicklung von k_i in Taylorreihen an der Stelle x_k und längeren Herleitungen, die in der Lehrveranstaltung "Numerik für Ingenieure" fallen, erhält man für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= hF_1[1 - c_1 - c_2 - c_3] + h^2 F_2\left[\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3\right] + \\ &+ h^3\left[F_{31}\left(\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{32}\right) + F_{32}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} a_2^2 c_2 - \frac{1}{2} a_3^2 c_3\right)\right] + O(h^4), \end{aligned} \quad (97)$$

wobei F_1, F_2, F_{31}, F_{32} Koeffizientenfunktionen sind, die im Ergebnis der Taylorreihenentwicklung entstehen und von den Ableitungen der Lösungsfunktion $y(x)$ abhängen. Soll das Verfahren mindestens die Fehlerordnung 3 haben, ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ a_2 c_3 + a_3 c_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2 c_3 b_{32} &= \frac{1}{6} \\ a_2^2 c_2 + a_3^2 c_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (98)$$

zu erfüllen, denn dann fallen in (97) alle Glieder außer $O(h^4)$ weg. Unter der Einschränkung $a_2 \neq a_3$ und $a_2 \neq \frac{2}{3}$ erhält man in Abhängigkeit der freien Parameter a_2, a_3 die Lösung

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{3a_3 - 2}{6a_2(a_3 - a_2)}, & c_3 &= \frac{2 - 3a_2}{6a_3(a_3 - a_2)} \\ c_1 &= \frac{6a_2 a_3 + 2 - 3(a_2 + a_3)}{6a_2 a_3}, & b_{32} &= \frac{a_3(a_3 - a_2)}{a_2(2 - 3a_2)}. \end{aligned} \quad (99)$$

Ein Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung erhält man z.B. mit

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad b_{32} = \frac{2}{3}, \quad b_{31} = a_3 - b_{32} = 0.$$

Man nennt das Verfahren auch Methode von Heun dritter Ordnung, und der Algorithmus lautet

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + h \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}k_2\right) \\ y_{k+1} &= y_k + h\left[\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3\right]. \end{aligned} \quad (100)$$

Die Wahl der Parameter erfolgt auch so, daß man möglichst prägnante Koeffizienten und ein "einfaches" Verfahren erhält. Man sieht, daß durch die Existenz unendlich vieler Lösungen unendlich viele Runge-Kutta-Verfahren existieren. Wir lassen es aber bei dem Verfahren (100) bewenden. Die folgenden beiden Abbildungen 10 und 11 zeigen die Ergebnisse der Berechnung der Lösung des AWP

$$y' = \frac{1}{x \ln x} y \quad y(2) = \ln 2$$

mit der Euler-Methode, der verbesserten Polygonzugmethode, der Trapez-Heun-Methode und der Runge-Kutta-Methode dritter Ordnung im Vergleich mit der exakten Lösung $y = \ln x$ im Intervall $[2, 100]$.

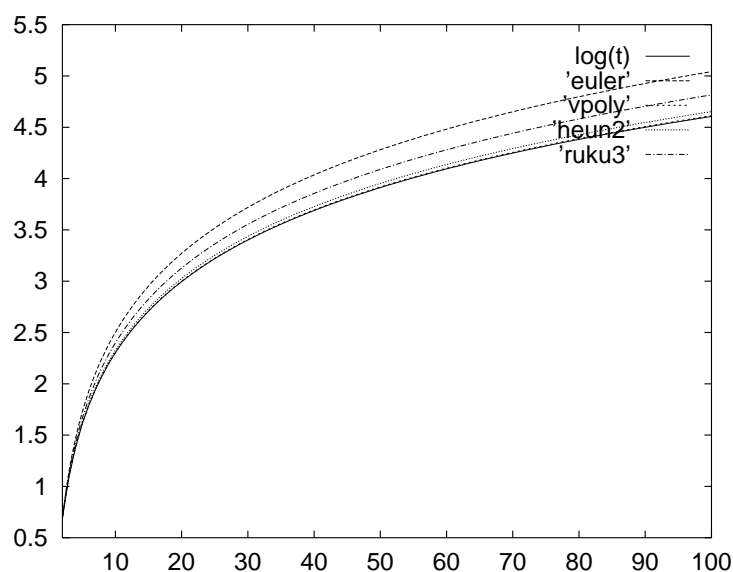


Abbildung 10: numerische Lösung mit der Schrittweite $h = 0.5$

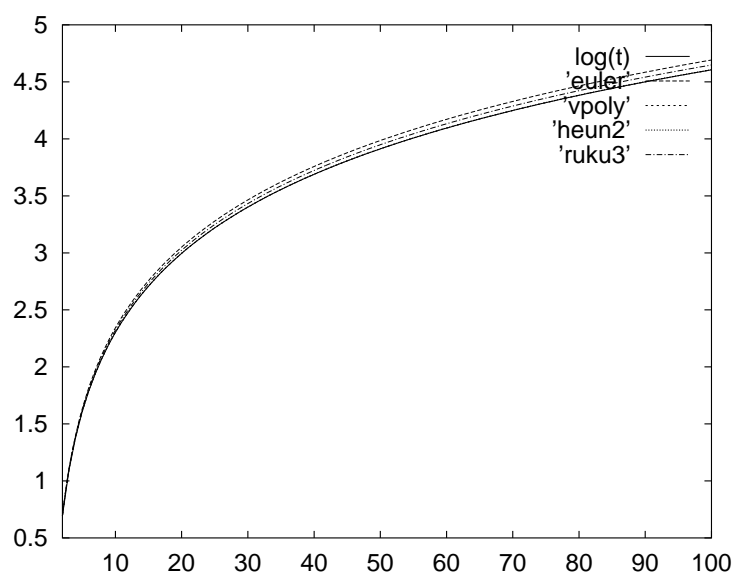


Abbildung 11: numerische Lösung mit der Schrittweite $h = 0.1$

3 Reihen

In der HM I-Vorlesung haben wir uns bereits mit speziellen Reihen befaßt, den Taylorreihen. Dabei ging es um die Approximation von Funktionen durch Potenzreihen. Weitere Anwendungsgebiete von Reihen ist die näherungsweise Berechnung von Integralen und Differentialgleichungen. Bei der Beschreibung von periodischen Prozessen spielen spezielle Funktionenreihen im Rahmen der Fourieranalyse eine zentrale Rolle.

Neben der Approximationsproblematik haben Reihen von Zahlen in der Finanzmathematik Bedeutung.

3.1 Zahlenreihen

3.1.1 Konvergenz unendlicher Reihen

Definition 3.1.

Wir betrachten die Zahlenfolge

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

Wenn man die Elemente nacheinander aufaddiert, entsteht mit

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

eine Zahlenfolge (s_n) , die man unendliche Reihe nennt.

Man beschreibt die unendliche Reihe symbolisch durch

$$[a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots] \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Statt unendlicher Reihe sagt man auch kurz Reihe.

Die Summen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \tag{101}$$

heißen Partialsummen der Reihe.

Als Beispiel einer Reihe sei die spezielle geometrische Reihe

$$[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

genannt.

Definition 3.2.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt genau dann konvergent, wenn die Folge (s_n) ihrer Partialsummen konvergiert. Ist s der Grenzwert dieser Folge, also $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so schreibt man dafür auch

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

s heißt Grenzwert oder Summe der Reihe.

Eine Reihe, die nicht konvergent ist, heißt divergent.

Satz 3.4.

Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert, subtrahiert und mit einem konstanten Faktor multipliziert werden.

Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Man überlegt sich schnell, daß Reihen nur dann konvergieren können, wenn die Glieder **nicht** gegen eine endliche Zahl $c \neq 0$ streben. Deshalb gilt das folgende notwendige Kriterium.

Satz 3.5.

Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergieren die Glieder gegen Null, d.h.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Am Beispiel der harmonischen Reihe sieht man, daß die Umkehrung des Satzes **nicht** gilt.

3.1.2 Allgemeine Konvergenzkriterien**Satz 3.6.** (Monotoniekriterium für Reihen)

Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern a_k konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Dies folgt sofort aus dem Satz über beschränkte und monotone Folgen, da $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ monoton steigt.

Satz 3.7. (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m > n > n_0$ stets

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon \tag{102}$$

gilt.

Bemerkung 3.8.

Daß Cauchy-Folgen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} einen Grenzwert haben, charakterisiert gerade \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . In \mathbb{Q} (Körper der rationalen Zahlen) gilt das nicht.

Satz 3.9. (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe

$$[a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots]$$

konvergiert, wenn die Folge der Glieder $a_k > 0$ monoton fallend ist und gegen Null strebt, also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0 .$$

Beispiel:

Wenn man statt der harmonischen Reihe die daraus modifizierte alternierende Reihe

$$\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

betrachtet, so konvergiert diese nach dem Leibnizkriterium.

3.1.3 Absolut konvergente Reihen

Definition 3.10. (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut** konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Glieder konvergiert, d.h., wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent ist.

Korollar 3.11.

Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Diese Folgerung ergibt sich wegen der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_m|, \quad m, n \text{ beliebig,}$$

aus dem Cauchy-Kriterium.

Bemerkung 3.12.

Absolut konvergente Reihen stellen den **Normalfall** konvergenter Reihen dar. D.h., konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren, sind selten und bilden die Ausnahme. Es sei daran erinnert, daß bei Reihen mit positiven Gliedern Konvergenz gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz ist.

Deshalb werden wir uns etwas intensiver mit Konvergenzkriterien und den Eigenschaften absolut konvergenter Reihen befassen.

Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, heißen **bedingt konvergente** Reihen.

Satz 3.13.

Absolut konvergente Reihen dürfen beliebig "umgeordnet" werden, d.h., ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit dem Grenzwert s , so konvergiert jede durch Umordnung ihrer Glieder daraus entstehende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$ ebenfalls gegen s .

In der Folge (n_k) kommt jeder Index $0, 1, 2, \dots$ genau einmal vor.

Satz 3.14. (Multiplikationssatz)

Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

absolut konvergente Reihen, so folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0, j=0}^{\infty} a_k b_j, \quad (103)$$

wobei die Indizes (k, j) in der rechten Summe alle Paare

$$\begin{array}{cccc} (0, 0) & (0, 1) & (0, 2) & \dots \\ (1, 0) & (1, 1) & (1, 2) & \dots \\ (2, 0) & (2, 1) & (2, 2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

in irgendeiner Weise durchläuft. Wählt man die Reihenfolge in der nachfolgend skizzierten Weise

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0) & & (0, 1) & & (0, 2) & & (0, 3) & \dots \\ (1, 0) & \nearrow & (1, 1) & \nearrow & (1, 2) & \nearrow & \dots & \\ (2, 0) & \nearrow & (2, 1) & \nearrow & \dots & \nearrow & & \\ (3, 0) & \nearrow & \dots & \nearrow & & & & \\ \dots & \nearrow & & & & & & \end{array}$$

so folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} \quad (104)$$

Das Produkt (104) nennt man auch **Cauchy-Produkt**.

3.1.4 Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen

Im Folgenden werden die wichtigsten Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen bzw. Reihen mit positiven Gliedern dargestellt.

Satz 3.15. (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und gilt

$$|b_k| \leq |a_k|$$

für alle k von einem Index k_0 an, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{heißt eine Majorante von} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k .$$

Beweis.

Aus

$$\sum_{k=k_0}^n |b_k| \leq \sum_{k=k_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$$

folgt mit dem Monotoniekriterium 3.6 die Behauptung. □

Satz 3.16. (Vergleichskriterien)

Seien die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k > 0, \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{mit} \quad b_k > 0,$$

gegeben.

(1) Gilt für alle k

$$a_k \leq b_k$$

so folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k,$$

und

ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ($\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist konvergente Majorante), bzw.

ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent ($\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergente Minorante).

(2) Existiert ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} =: c \neq 0 \quad \text{mit} \quad b_k \neq 0,$$

so gilt:

Es konvergieren beide Reihen,

oder es divergieren beide Reihen.

Satz 3.17. (Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es eine Zahl $c < 1$ gibt, mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq c, \quad a_k \neq 0, \quad (105)$$

für alle k von einem Index k_0 an. Gilt andererseits von einem Index k_0 an

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1, \quad a_k \neq 0,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis.

Aus (105) folgt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| = \left| \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \right| \cdot \left| \frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \leq c \cdot c \cdot \dots \cdot c = c^{k-k_0},$$

also

$$\left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| \leq c^{k-k_0} \quad \text{bzw.} \quad |a_k| \leq Bc^k, \quad \text{mit} \quad B = c^{-k_0} |a_{k_0}|.$$

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} Bc^k$ bei $c < 1$ gegen $\frac{B}{1-c}$ folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. \square

Satz 3.18. (Wurzelkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es eine Zahl $c < 1$ gibt, mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq c, \quad a_k \neq 0, \quad (106)$$

für alle k von einem Index k_0 an. Gilt andererseits von einem Index k_0 an

$$\sqrt[k]{|a_k|} > 1, \quad a_k \neq 0,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis.

Aus (106) folgt $|a_k| \leq c^k$. Damit ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. \square

Aus dem Quotientenkriterium und dem Wurzelkriterium kann man nun direkt die etwas "griffigeren" Kriterien folgern.

Korollar 3.19. (*Quotienten- und Wurzelkriterium*)

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existiere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d \quad (a_k \neq 0)$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d.$$

Dann folgt:

Die Reihe konvergiert absolut, falls $0 < d < 1$ ist, und sie divergiert, falls $d > 1$ ist.

3.1.5 Integralkriterium für Reihen

Mit den Majorantenkriterium und den Vergleichskriterien wurde schon deutlich, daß es Ähnlichkeiten zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen (eine Integrationsgrenze gleich ∞) gibt. Es sei nun f eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenem Intervall $[m, p] \subset [m, \infty)$ integrierbar ist.

Satz 3.20. (*Integralkriterium für Reihen*)

Ist $f(x)$ auf $[m, \infty)$ positiv und monoton fallend (m ganzzahlig), so haben

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \quad \text{und} \quad \int_m^{\infty} f(x) dx$$

gleiches Konvergenzverhalten.

Beweis.

Es gilt $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ für alle $x \in [k, k+1]$ und jede ganze Zahl $k \geq m$. Nach Integration über $[k, k+1]$ folgt

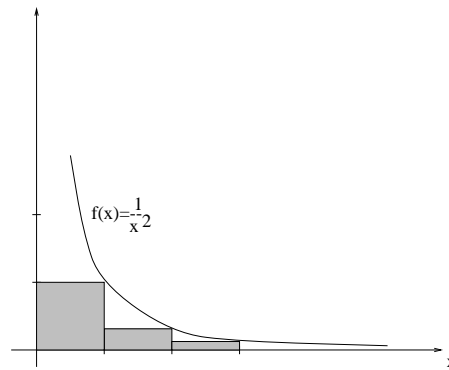
$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1).$$

Die Summation über k von m bis n ergibt

$$\sum_{k=m}^n f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k).$$

Aus dem Monotoniekriterium für Reihen (Satz 3.6) und dem Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale folgt die Behauptung des Satzes. \square

Die Abbildung 12 zeigt die Begrenzung des Wertes der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ durch das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Abbildung 12: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ als Majorante von $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2}$

3.2 Funktionenfolgen*

Bevor wir Funktionenreihen behandeln wollen, soll der Begriff der Funktionenfolge erklärt werden.

Definition 3.21. (Funktionenfolge)

Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots \quad (107)$$

der Funktionen $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, nennen wir Funktionenfolge auf D und schreiben dafür wie im Falle von Zahlenfolgen auch kurz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (f_n) .

Definition 3.22. (punktweise Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf D heißt punktweise konvergent, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert. Die Grenzfunktion f ist dabei durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x) \quad \text{für jedes } x \in D$$

erklärt.

Nach diesem Konvergenzbegriff strebt die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

Damit haben wir die Situation, daß eine Folge stetiger Funktionen punktweise gegen eine offensichtlich unstetige Grenzfunktion konvergiert. Um zu sichern, daß sich im Ergebnis des Grenzprozesses eine stetige Grenzfunktion steht, muß ein "schärferer" Konvergenzbegriff gefunden werden.

Bevor mit der gleichmäßigen Konvergenz dieser "schärfere" Konvergenzbegriff formuliert wird, soll der "Abstand" zweier Funktionen definiert werden.

Definition 3.23. (Abstand und Supremumsnorm)

Seien f und g beschränkte Funktionen auf D , so nennt man

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

den Abstand beider Funktionen voneinander.

Die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$ ist das Supremum von $|f(x)|$ auf D

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

oder der Abstand der Funktion f von der Funktion $g \equiv 0$.

Bemerkung 3.24.

Unter dem Supremum verstehen wir die kleinste obere Schranke. Betrachten wir z.B. die Funktion $f(x) = \arctan x$ auf $D = [0, \infty)$. Wir wissen, daß für alle $x \in D$

$$f(x) < \frac{\pi}{2}$$

gilt. Andererseits finden wir keine Schranke $c < \frac{\pi}{2}$ mit

$$f(x) < c$$

denn man findet z.B. mit $x_0 = \tan((\frac{\pi}{2} + c)/2)$ immer ein Element aus D mit

$$\frac{\pi}{2} > f(x_0) > c$$

so daß $\frac{\pi}{2}$ die kleinste obere Schranke ist.

Es gibt allerdings kein Element $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \frac{\pi}{2}$, so daß auf $D = [0, \infty)$ die Funktion f kein Maximum annimmt. Es gilt

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)| = \frac{\pi}{2}.$$

Definition 3.25. (gleichmäßige Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf D konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f auf D , wenn von einem Index n_0 an alle Funktionen $f_n - f$ beschränkt sind und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

gilt. In diesem Falle schreibt man auch kürzer

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \rightarrow f \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es folgt unmittelbar, daß

Korollar 3.26.

Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert auch punktweise.

Satz 3.27. (Cauchysches Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf D ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0 , so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \epsilon.$$

Satz 3.28.

Jede gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat eine stetige Grenzfunktion f . Anders ausgedrückt gilt für $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k)) .$$

Beweis.

Da die Aussage des Satzes ja das eigentliche Motiv für den Übergang vom Begriff der punktweisen zur gleichmäßigen Konvergenz war, soll der Satz bewiesen werden.

(f_n) konvergiere gleichmäßig auf $D \subset \mathbb{R}$ gegen f . Zum Nachweis der Stetigkeit von f ist die Differenz $|f(x) - f(x_0)|$ für $x, x_0 \in D$ abzuschätzen. Es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \quad (108)$$

für $x, x_0 \in D$. Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Jeder der drei Summanden der rechten Seite von (108) soll kleiner als $\epsilon/3$ gemacht werden, damit die linke Seite kleiner als ϵ wird.

Da (f_n) gleichmäßig gegen f strebt, gibt es ein f_n mit $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ für $x \in D$. Da f_n stetig ist, existiert zu x_0 ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{mit } |x - x_0| \leq \delta .$$

Zusammen folgt aus (108)

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \quad \text{falls } |x - x_0| \leq \delta ,$$

also ist f stetig. □

Satz 3.29.

Sind (f_n) und (f'_n) auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent, so folgt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$.

Satz 3.30.

Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$, so ist ihre Grenzfunktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

3.3 Gleichmäßig konvergente Reihen

Mit den Begriffen **Funktionsfolge** und **gleichmäßige Konvergenz** von Funktionsfolgen, soll nun der Begriff der Funktionsreihe eingeführt werden.

Definition 3.31. (Funktionsreihe)

Sei (f_n) eine Funktionsfolge auf D , dann definieren wir durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

eine neue Funktionsfolge (s_n) , und nennen diese Folge unendliche Reihe - oder kurz Reihe - der Funktionen f_k . Die f_k heißen Glieder der Reihe und die s_n Partialsummen. Man beschreibt die Reihe auch durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad \text{mit } x \in D .$$

Definition 3.32. (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist punktweise oder gleichmäßig konvergent, wenn (s_n) eine solche Eigenschaft hat. Die Grenzfunktion $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ wird auch Summe der Reihe genannt und durch

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \text{ mit } x \in D,$$

bezeichnet.

Satz 3.33. (Cauchysches Konvergenzkriterium für gleichmäßig konvergente Reihen)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen auf D konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn folgendes erfüllt ist:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0 , so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Definition 3.34.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von beschränkten Funktionen auf D heißt genau dann gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$ konvergiert.

Korollar 3.35.

In diesem Fall ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, denn es gilt

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_{\infty}.$$

Satz 3.36. (Majorantenkriterium)

Gilt für die Glieder der Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

und ist die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ konvergent, so ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ heißt eine Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Satz 3.37.

Sind die Glieder einer gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig, so ist die Summe $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig.

Satz 3.38. (gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$. Existiert der Grenzwert $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für wenigstens ein $x \in [a, b]$, und ist die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$, so ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$ und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

Satz 3.39. (gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$ besitzt eine integrierbare Summenfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf $[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

3.4 Potenzreihen

Definition 3.40. (Potenzreihe)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R} \quad (109)$$

mit den Polynomen $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$ als Partialsummen heißt **Potenzreihe**.

In diesem Abschnitt sollen nun die allgemeinen Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen untersucht werden.

Bemerkung 3.41.

Durch die Transformation $x^* = x - x_0$ genügt es, Potenzreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ zu untersuchen.

Satz 3.42. (Satz von Cauchy und Hadamard)

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gibt es ein Konvergenzintervall $(-\rho, \rho)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Potenzreihe konvergiert in $(-\rho, \rho)$ punktweise. Sie konvergiert außerdem gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(-\rho, \rho)$.
- (b) Außerhalb von $[-\rho, \rho]$ divergiert die Potenzreihe.

Die Fälle $\rho = 0$ und $\rho = \infty$ sind zugelassen (Im Falle $\rho = 0$ ist $(-\rho, \rho)$ leer, und für $\rho = \infty$ ist $(-\rho, \rho) = \mathbb{R}$).

ρ heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Satz 3.43. (Konvergenzradius)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c > 0, \quad (110)$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0, \quad (111)$$

so ist

$$\rho = \frac{1}{c}$$

der Konvergenzradius der Reihe.

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Nachweis der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

Wir wenden auf die Potenzreihe das Quotientenkriterium für Zahlenreihen an, für benachbarte Glieder erhält man

$$\left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x| \rightarrow c|x|, \quad \text{für } k \rightarrow \infty, (k > k_0).$$

Nach dem Quotientenkriterium liegt Konvergenz für $c|x| < 1$, also für

$$|x| < \frac{1}{c} = \rho$$

vor. □

Bemerkung 3.44. (Reihen mit "Lücken")

Die Anwendung der Berechnungsformeln (110) bzw. (111) für Reihen, bei denen Glieder mit bestimmten x -Potenzen fehlen, z.B. bei der Reihe

$$\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ist nicht möglich, da die Koeffizienten a_0, a_2, a_4, \dots alle gleich Null sind.

In einem solchen oder ähnlichen Fall wird statt (110) der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \right|$$

berechnet, wobei a_{n_k} und $a_{n_{k+1}}$ je zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten von vorhandenen x -Potenzen sind. Im Falle der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

errechnet man

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2(k+1)+1)!}}{\frac{1}{(2k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)!}{(2(k+1)+1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 0, \end{aligned}$$

also ergibt sich der Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Bemerkung 3.45. (Immergültige Formel für den Konvergenzradius)*

Bezeichnet man mit

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

den **größten** Häufungspunkt der Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ oder **Limes-superior**, so kann man den Konvergenzradius **immer** mit der Formel

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (112)$$

berechnen. Wenn die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ist, legen wir den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{\infty} = 0$ fest.

Hat die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ nur einen Häufungspunkt, gilt

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

und die Formeln (111) und (112) sind identisch.

3.5 Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen sowie Differenzieren und Integrieren

Aus den Sätzen über die gliedweise Addition und das Cauchy-Produkt folgt unmittelbar für Potenzreihen

Satz 3.46.

Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$
gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-x_0)^k \quad (113)$$

bzw.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \quad (114)$$

mit $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$.

Satz 3.47. (gliedweises Differenzieren und Integrieren)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$ ⁹.

(a) Die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

darf auf dem Konvergenzintervall $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ beliebig oft differenziert werden. Die Ableitungen erhält man durch **gliedweises Differenzieren** der Potenzreihe:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} \quad (115)$$

(b) Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b]$ des Konvergenzintervalls darf f gliedweise integriert werden. Insbesondere hat f auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine Stammfunktion, die man durch **gliedweises Integrieren** erhält:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} \quad (116)$$

Satz 3.48. (Identitätssatz)

Es seien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ zwei Funktionen von Potenzreihen, die beide im offenen Intervall I um x_0 konvergieren. Stimmen dann f und g auf nur einer Folge x_1, x_2, x_3, \dots mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ($x_0 \neq x_n$) überein, d.h., $f(x_k) = g(x_k)$ für $k = 1, 2, 3, \dots$, so sind beide Potenzreihen identisch, also gilt

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in I, \text{ und } a_k = b_k \text{ für alle } k.$$

Satz 3.49. (Abelscher Grenzwertsatz)

Durch $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ sei die Funktion einer Potenzreihe dargestellt, die einen endlichen Konvergenzradius $\rho > 0$ besitzt. Ist die Potenzreihe im rechten Randpunkt $x_0 + \rho$ des Intervalls $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ konvergent, so ist f dort auch (linksseitig) stetig, d.h., es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \rho, x < x_0 + \rho} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0 + \rho)^k.$$

Entsprechendes gilt für die Konvergenz und Stetigkeit im linken Randpunkt $x_0 - \rho$.

⁹Hier ist x_0 das Zentrum des Konvergenzintervalls und die Reihe konvergiert für alle $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Satz 3.50. (Abel)

- (a) Ist für ein $x_1 \neq 0$ die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für alle x mit $|x| < |x_1|$.
- (b) Ist für ein $x_1 \neq 0$ die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ divergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergent für alle x mit $|x| > |x_1|$.

3.6 Konstruktion von Reihen

In der HM I haben wir mit dem Satz von Taylor eine Grundlage zur Konstruktion von Potenzreihen behandelt. Oben haben wir festgestellt, daß man gleichmäßig konvergente Potenzreihen addieren und multiplizieren bzw. gliedweise differenzieren und integrieren kann. Im folgenden sollen diese Prinzipien genutzt werden, um schnell und effizient Reihen herzuleiten oder zu konstruieren.

Die gliedweise Addition von Reihen kann man nutzen, um z.B. für die Funktion $\cosh x$ unter Nutzung der Exponentialreihe eine Reihe aufzustellen. Es gilt per definitionem

$$\cosh x := \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}]$$

und mit den Reihen für e^x bzw. e^{-x} erhält man

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right] \\ &= \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Die Multiplikation von Potenzreihen unter Nutzung des Cauchy-Produktes kann man z.B. zur Konstruktion einer Produktreihe für $e^{-x} \sin x$ anwenden, man erhält

$$\begin{aligned} e^{-x} \sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - + \dots \end{aligned}$$

Durch gliedweises Differenzieren erhält man zum Beispiel ausgehend von der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \end{aligned}$$

Will man zum Beispiel eine Reihe für den $\arcsin x$ haben, und hat die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

zur Verfügung, erhält man durch Integration

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Da die Taylorreihenentwicklung eine recht wichtige Methode zur Konstruktion von Potenzreihen ist, soll der Satz von Taylor hier noch einmal angegeben werden.

Satz 3.51. (*Taylorformel*)

Für jede auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f und $x, x_0 \in I$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x, x_0) \quad (117)$$

mit dem Restglied nach Lagrange

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \xi \text{ Wert zwischen } x \text{ und } x_0. \quad (118)$$

Die Koeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ heißen Taylor-Koeffizienten und x_0 heißt Entwicklungspunkt der Taylorreihe oder Mittelpunkt.

Ist $x_0 = 0$, spricht man statt der Taylor-Reihe auch von der Mac Laurin-Reihe.

Aus dem Satz von Taylor kann man unmittelbar schlußfolgern

Korollar 3.52.

Für jede auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion f und $x, x_0 \in I$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

wenn für das Restglied

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad (119)$$

gilt.

Bemerkung 3.53.

Die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ ist für elementare Funktionen immer erfüllt. Außerdem überlegt man sich, daß die Bedingung immer dann erfüllt ist, wenn x aus dem Konvergenzintervall der Reihe ist.

Wenn man $f^{(k)}(x_0)$ in der Grenzwertbildung nicht berücksichtigen muß oder wenn $f^{(k)}(x_0)$ für alle k beschränkt ist, ergibt sich die Bedingung (119) sofort.

3.7 Anwendung von Potenzreihen zur numerischen Integalberechnung und zur Lösung von DGLn

Die über ein Integral definierte Fehlerfunktion

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

läßt sich nicht geschlossen analytisch integrieren. Es ist allerdings möglich, unter Nutzung der Reihe

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \quad t \in \mathbb{R}$$

eine gliedweise Integration vorzunehmen. Man erhält dann

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Damit hat man eine Darstellung, die die Berechnung der Funktionswerte bis zu einer beliebigen Genauigkeit ermöglicht. Es ist zu beachten, daß für "große" x entsprechend mehr Glieder zur Erreichung einer vorgegebenen Genauigkeit erforderlich sind als bei x -Werten in der Nähe des Nullpunktes.

In der HM I haben wir festgestellt, daß die elliptischen Integrale der Form

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (0 \leq k^2 < 1)$$

nicht analytisch auswertbar sind. Die Entwicklung des Integranden in eine Reihe ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \sin^4 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k^6 \sin^6 t + \dots$$

so daß man nach der gliedweisen Integration

$$F(\phi, k) = \phi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\phi} \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \int_0^{\phi} \sin^4 t dt + \dots$$

erhält. Das **vollständige elliptische** Integral für $\phi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich zu

$$K(k) := F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

Für den Integralsinus

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

ergibt sich unter Nutzung der Reihe

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} Si x &= \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right] dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3! \cdot 3} + \frac{t^5}{5! \cdot 5} - \dots \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \end{aligned}$$

Für das Fresnel-Integral $\int_0^x \cos(t^2) dt$ erhält man unter Nutzung der $\cos(t^2)$ -Reihe

$$\begin{aligned} \int_0^x \cos(t^2) dt &= \int_0^x \left[1 - \frac{(t^2)^2}{2!} + \frac{(t^2)^4}{4!} - \frac{(t^2)^6}{6!} + \dots \right] dt \\ &= \left[t - \frac{t^5}{2! \cdot 5} + \frac{t^9}{4! \cdot 9} - \frac{t^{13}}{6! \cdot 13} + \dots \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(2k)! (4k+1)} \quad . \end{aligned}$$

Abschließend soll am Beispiel der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + y = \cos(2x) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

die Anwendung von Potenzreihenansätzen zur Lösung von Differentialgleichungen demonstriert werden¹⁰.

Für die Lösung des AWP machen wir den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad . \quad (120)$$

Da $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllt sein muß, ergibt sich sofort $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Für die erste und die zweite Ableitung des Ansatzes (120) erhalten wir

$$y'(x) = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

bzw.

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

Für die "rechte" Seite $\cos(2x)$ verwenden wir die entsprechende Reihe

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$$

Das Einsetzen der Reihen für $y(x)$, $y''(x)$ und $\cos(2x)$ in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} &2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots}{\frac{4}{2!} x^2 + \dots} - \frac{16}{4!} x^4 + \frac{64}{6!} x^6 + \dots \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich führt zu den Beziehungen

$$2a_2 = 1 \quad 6a_3 + 1 = 0 \quad 12a_4 + a_2 = -\frac{4}{2!} \quad 20a_5 + a_3 = 0 \quad \dots$$

und man erhält schließlich

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = -\frac{1}{6} \quad a_4 = -\frac{5}{24} \quad a_5 = \frac{1}{120} \quad ,$$

so daß sich für die Lösung die Reihe

$$\begin{aligned} y(x) &= x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24} x^4 + \frac{x^5}{120} + \dots \\ &= \sin x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{24} x^4 + \dots \end{aligned}$$

¹⁰Der aufmerksame Leser wird schnell feststellen, daß man die Lösung des AWP auch analytisch geschlossen durch die Lösung des homogenen Problems und einen Ansatz nach der Art der rechten Seite erhalten kann. Dies kann getan werden, um die Richtigkeit des Ergebnisses zu testen.

ergibt. Eine einfache Rechnung¹¹ zeigt, daß der Reihenanteil

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

das Ergebnis der Differenz der Reihen $\frac{1}{3} \cos x$ und $\frac{1}{3} \cos(2x)$ ist, denn es ist

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \cos(2x) &= 1 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 - \frac{64}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

und für $\frac{1}{3}(\cos x - \cos(2x))$ erhält man

$$\frac{1}{3}(\cos x - \cos(2x)) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \dots \quad ,$$

so daß wir als Lösung schließlich

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \cos(2x)$$

erhalten. Zur Übung und zur Überprüfung des Ergebnisses auf Richtigkeit sollte die Lösung des AWP auf anderem Wege ermittelt werden.

Hat man nicht wie im besprochenen Beispiel Anfangswerte für $x_0 = 0$ vorgegeben, sondern Anfangswerte der Art

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \neq 0,$$

vorgegeben, so empfiehlt sich die Verwendung des Ansatzes

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k. \quad (121)$$

für die Lösung der DGL. Ansonsten geht man genau wie oben vor, und bestimmt die Koeffizienten a_k letztendlich durch die Auswertung der Anfangsbedingungen und einen Koeffizientenvergleich.

Eine weitere Möglichkeit der Nutzung von Reihen zur näherungsweisen Lösung von DGLn besteht in der Nutzung von Taylorpolynomen. Wir erinnern uns an das Taylorpolynom n -ten Grades einer Funktion $y(x)$

$$T_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Hat man nun ein AWP der Form

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben, kann man ausgehend von der DGL und dem Anfangswert ein Taylorpolynom aufstellen. Der AW $y(x_0) = y_0$ ergibt das absolute Glied des Taylorpolynoms, also

$$y(x_0) = y_0.$$

¹¹Hier gebe ich gern zu, daß man auf diese Rechnung dann recht schnell kommt, wenn man die Lösung anderwärtig kennengelernt hat.

Unter Nutzung der DGL erhält man

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) .$$

Differenziert man nun die DGL, erhält man

$$y'' = \frac{df}{dx}(x, y)$$

und damit eine Möglichkeit zur Berechnung von $y''(x_0)$. Im Ergebnis dieses sukzessiven Prozesses erhält man mit dem so konstruierten Taylorpolynom eine Näherung der Lösung des AWP in einer Umgebung von x_0 . Es muß hier allerdings angemerkt werden, daß eine Abschätzung der Genauigkeit einer solchen Näherungslösung in der Regel **nicht** möglich ist, da eine allgemeine Formel für $y^{(n)}(x_0)$ nicht bekannt ist.

Beispiel:

Wir betrachten das AWP

$$y' = x + y^2 \quad y(0) = 1 ,$$

und wollen die Lösung durch ein Taylorpolynom 4. Grades annähern. Wir müssen also $y'(0)$, $y''(0)$ und $y'''(0)$ sukzessiv berechnen. Durch Einsetzen erhalten wir

$$y'(0) = 1 .$$

Durch Differentiation der DGL ergibt sich

$$\begin{aligned} y'' &= 1 + 2yy' & y''' &= 2y'y' + 2yy'' \\ y^{(4)} &= 2y''y' + 2y''y' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y''y' + 2yy''' . \end{aligned}$$

Damit berechnet man

$$y''(0) = 3 \quad y'''(0) = 8 \quad y^{(4)}(0) = 18 + 16 = 34 ,$$

so daß sich das Taylorpolynom 4. Grades

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{34}{24}x^4$$

zur Näherung von $y(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ ergibt.

Auf die Anwendung von Potenzreihen zur Grenzwertberechnung oder groben Näherung von Formeln soll hier nicht eingegangen werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die in der HM I behandelten und verwendeten "äquivalenten Größen" zur Grenzwertberechnung Ergebnisse von Potenzreihenentwicklungen sind.

4 Lineare Algebra II

Im der HM I-Vorlesung haben wir uns bereits mit Eigenwertproblemen befaßt. Nun soll diese Thematik mit Blick auf die Anwendung der Theorie auf die Lösung von Aufgabenstellungen wie z.B.

- Lösung von Schwingungsproblemen bzw.
- Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten und
- Klassifikation von Quadriken

angewandt werden.

4.1 Grundlagen

Im folgenden soll in einer kompakten Darstellung die Eigenwertproblematik noch einmal dargestellt werden.

Definition 4.1. (Eigenwert/Eigenvektor)

Es sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit Elementen aus dem Körper der komplexen Zahlen¹² \mathbb{C} . Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger **Eigenvektor**, wenn

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (122)$$

gilt.

Die Gleichung $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ heißt **Eigengleichung** zu A und läßt sich in $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bzw. mit $\mathbf{x} = E\mathbf{x}$ in

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \quad (123)$$

umschreiben.

Das **Eigenwertproblem** für A besteht darin, alle Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) von A zu finden. Die Menge aller EW von A heißt das **Spektrum** von A .

Bemerkung 4.2.

Es sei hier daran erinnert, daß die Eigengleichung (123) ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ist, und wir erinnern uns weiter, daß dieses Gleichungssystem nur dann eine vom Nullvektor verschiedene Lösung \mathbf{x} haben kann, wenn die Matrix

$$(A - \lambda E)$$

nicht regulär ist, d.h., $rg(A - \lambda E) < n$ bzw.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

gelten muß.

Definition 4.3. (charakteristisches Polynom)

Ist A eine $(n \times n)$ -Matrix über \mathbb{C} , so heißt

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) \quad , \lambda \in K,$$

das **charakteristische Polynom** von A , das den Grad n hat.

¹²Bei den für Ingenieure relevanten Anwendungen ist hauptsächlich der Fall der reellen Matrizen von Interesse. Allerdings wissen wir ja bereits, daß die Eigenwerte reeller Matrizen komplex sein können.

Hieraus ergibt sich die Folgerung

Korollar 4.4.

Die Eigenwerte einer $(n \times n)$ -Matrix über \mathbb{C} sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ von A .

Beispiel 1:

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es sollen die EW und EV berechnet werden. Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 = 10 - 7\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 \end{aligned}$$

Für die Nullstellen errechnet man

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2},$$

so daß A die EW $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 3$ hat.

Zur Berechnung der EV sind die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_2 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & = 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 & -2x_2 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & = 0 \end{array}$$

zu lösen. Das linke Gleichungssystem zur Berechnung der Eigenvektoren, die zum EW λ_1 gehören, hat die Lösung

$$\mathbf{x}_1 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in K, c \neq 0,$$

und das rechte Gleichungssystem zur Berechnung der Eigenvektoren, die zum EW λ_2 gehören, hat die Lösung

$$\mathbf{x}_2 = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d \in K, c \neq 0.$$

Beispiel 2:

In diesem Beispiel soll die Beziehung zwischen Eigenwertproblemen und Differentialgleichungssystemen skizziert werden. Für einen **Zwei-Massen-Schwinger** der Massen m_1, m_2 ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \end{aligned}$$

wobei die Punkte über den beiden Massenpunkten x_j die Ableitungen nach der Zeit markieren. k_1, k_2, k_3 sind Federkonstanten. Mit den Verabredungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_3+k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

kann man die Differentialgleichungen in der Form

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

aufschreiben. Mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

erhält man über $\dot{\mathbf{x}} = i\omega\mathbf{b}e^{i\omega t}$ und $\ddot{\mathbf{x}} = i^2\omega^2\mathbf{b}e^{i\omega t}$ das Eigenwertproblem

$$A\mathbf{b}e^{i\omega t} = -\omega^2\mathbf{b}e^{i\omega t} \quad \text{bzw.} \quad A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \lambda = -\omega^2,$$

dessen Lösung (Bestimmung der EW $\lambda_{1,2}$ und EV $\mathbf{b}_{1,2}$) die Form

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1e^{i\omega_1 t} + c_2\mathbf{b}_2e^{i\omega_2 t} \quad \omega_j = \sqrt{-\lambda_j}$$

hat. Die reellen Lösungen ergeben sich als Linearkombinationen von $Re \mathbf{x}$ und $Im \mathbf{x}$.

Auf spezielle Eigenschaften des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$, d.h., den Zusammenhang zwischen der Determinanten und den sogenannten Hauptunterdeterminanten soll hier nicht weiter eingegangen werden. Allerdings sollte als grobe Kontrollinformation bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms auf jeden Fall beachtet werden, daß das absolute Glied gleich der Determinante von A ist, und daß der Faktor von der höchsten Potenz von λ , also λ^n gleich $(-1)^n$ ist.

Es folgen nun weitere wichtige Begriffe, die z.T. aus der HM I bekannt sind, in einer kompakten Darstellung.

Definition 4.5. (algebraische Vielfachheit)

Ist der Eigenwert λ_j eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A von A , so nennt man λ_j einen k -fachen Eigenwert von A . Die Zahl k heißt algebraische Vielfachheit κ_j von λ_j .

Definition 4.6. (Eigenraum)

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix über \mathbb{C} und λ_j einer ihrer EW. Die Lösungen der Eigengleichung

$$(A - \lambda_j E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{124}$$

bilden einen Unterraum von \mathbb{C}^n , der der **Eigenraum** zu λ_j genannt wird. Seine Dimension wird die **geometrische Vielfachheit** γ_j von λ_j genannt.

Sie errechnet sich aus

$$\gamma_j = \dim \ker(A - \lambda_j E) = n - \text{rg}(A - \lambda_j E) \quad ,$$

ist also gleich der Anzahl der freien Parameter der Lösung der Eigengleichung.

Bemerkung 4.7.

Ist A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix und ist der EW λ_j ebenfalls reell, so kann man als Lösung der Eigengleichung folgerichtig **reelle** EV berechnen und die Basis des Eigenraumes aus reellen EV bilden. Mit der geometrischen Vielfachheit γ_j kann man im Eigenraum von λ_j also γ_j linear unabhängige reelle Vektoren, die den Eigenraum aufspannen, finden.

Korollar 4.8.

Für die geometrische Vielfachheit γ_j und die algebraische Vielfachheit κ_j eines EW λ_j gilt

$$1 \leq \gamma_j \leq \kappa_j \quad .$$

Es soll nun die Frage der "Größe" des Vektorraums, der von allen EV einer (n,n) -Matrix A über \mathbb{C} aufgespannt wird, untersucht werden.

Satz 4.9.

Gehören die EV $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ der (n, n) -Matrix A über \mathbb{C} , dann sind sie linear unabhängig.

Beweis.

Wir nehmen, daß es $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$ gibt. Dann gilt aber auch $\lambda_1\mathbf{x}A\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$ und damit $\lambda_1 = \lambda_2$, was einen Widerspruch zur Annahme bedeutet. \square

Satz 4.10.

Eine $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} hat genau dann n linear unabhängige EV, wenn algebraische und geometrische Vielfachheit bei jedem EW übereinstimmen.

Korollar 4.11.

Hat die $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} genau n paarweise verschiedene EW, so spannen die zugehörigen EV den Raum \mathbb{C}^n auf.

Entsprechend der Bemerkung 4.7 spannen im Falle einer reellen (n, n) -Matrix A bei n reellen EV die zugehörigen EV den gesamten \mathbb{R}^n auf.

4.2 Transformation und Diagonalisierung**Definition 4.12.**

Es seien A und C (n, n) -Matrizen über \mathbb{C} , wobei C regulär ist, d.h., $\det C \neq 0$. Man kann die Matrix

$$B = C^{-1}AC \quad (125)$$

bilden. Man sagt in diesem Fall, daß B aus A durch Transformation mit C hervorgegangen ist.

Satz 4.13.

Das charakteristische Polynom einer $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} bleibt bei einer Transformation unverändert, d.h., für jede reguläre $(n \times n)$ -Matrix C über \mathbb{C} gilt

$$\chi_A = \chi_{C^{-1}AC} \quad .$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det(CC^{-1}(A - \lambda E)) = \det(C)\det(C^{-1}(A - \lambda E)) \\ &= \det(C^{-1}(A - \lambda E))\det(C) = \det(C^{-1}AC - \lambda E) \end{aligned}$$

\square

Korollar 4.14.

Bei einer Transformation einer $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} bleiben **alle EW** samt ihren algebraischen Vielfachheiten **unverändert**.

Satz 4.15.

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix über \mathbb{C} .

(a) *EW von Dreiecksmatrizen*

Bei Dreiecksmatrizen sind die Diagonalelemente die EW.

(b) *Verschieben von EW (shiften)*

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die EW von A , so besitzt die Matrix

$$A_\epsilon := A + \epsilon E \quad \text{die EW} \quad \mu_j = \lambda_j + \epsilon, \quad (j = 1, \dots, r).$$

μ_j und λ_j haben die gleiche algebraische Vielfachheit.

(c) *EW von Matrixpotenzen*

Hat A die EW λ_j ($j=1, \dots, r$), so sind λ_j^m ($m \in \mathbb{N}$) EW von A^m .

(d) *EW der transponierten Matrix*

Die transponierte Matrix A^T hat das gleiche charakteristische Polynom wie die Matrix A und somit die gleichen EW.

Definition 4.16. (Diagonalisierbarkeit)

Eine $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} heißt diagonalisierbar (oder diagonalähnlich), wenn sie sich in eine Diagonalmatrix transformieren läßt, d.h., wenn es eine reguläre (n, n) -Matrix C über \mathbb{C} gibt mit

$$C^{-1}AC = D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (\alpha_j \in \mathbb{C}).$$

Satz 4.17.

Eine $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} läßt genau dann in eine Diagonalmatrix transformieren, wenn sie n linear unabhängige EV besitzt.

Sind $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ die eben genannten linear unabhängigen EV von A , so gilt mit der daraus gebildeten Matrix $C = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, also der Matrix, die als Spalten die EV hat,

$$C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad .$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von A , die den Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ entsprechen. Ein EW λ_j erscheint in $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ genau κ_j -mal, wobei κ_j die algebraische Vielfachheit von λ_j ist.

Korollar 4.18. (Diagonalisierbarkeitskriterium)

Eine $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{C} ist genau dann diagonalisierbar, wenn die algebraische und geometrische Vielfachheit für jeden EW von A übereinstimmen.

4.3 Symmetrische reelle Matrizen und ihre EW

Bei Schwingungs- oder Bewegungsgleichungen treten wie im Fall der Darstellung von quadratischen Formen und Quadriken symmetrische Matrizen mit reellen Elementen auf. Im folgenden sollen die recht angenehmen Eigenschaften symmetrischer reeller Matrizen und ihrer Eigenwerte summarisch in Sätzen dargestellt werden.

Satz 4.19. (Eigenschaften symmetrischer reeller Matrizen)

Für jede reelle symmetrische $(n \times n)$ -Matrix $S = (s_{ij})$ gilt folgendes:

(a) *Alle EW von S sind reell.*

(b) *EV $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$, die zu verschiedenen EW λ_j, λ_k von S gehören, stehen senkrecht aufeinander, d.h. $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle = 0$.*

(c) *Geometrische und algebraische Vielfachheit stimmen bei jedem EW von S überein.*

Beweis.

Bewiesen soll nur die Behauptung (a) werden. Wir bezeichnen mit \mathbf{x}^* den Vektor $\overline{\mathbf{x}}^T$, wobei $\overline{\mathbf{x}}$ der konjugiert komplexe Vektor zu \mathbf{x} ist. Sei nun λ ein EW von S und \mathbf{x} ein zugehöriger EV. Damit ist $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 =: r > 0$ reell, und es folgt

$$\mathbf{x}^* S \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \lambda r.$$

Für jede komplexe Zahl z , aufgefaßt als (1×1) -Matrix gilt $z = z^T$. Damit und aus der Symmetrie von S folgt für die komplexe Zahl $\mathbf{x}^* S \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^* S \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* S \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T S \mathbf{x}^{*T} = \overline{\mathbf{x}^*} S \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}^* S \mathbf{x}} = \overline{\lambda r} = \overline{\lambda} r$$

Es ergibt sich schließlich $\overline{\lambda} r = \lambda r$, d.h., λ ist reell. □

Satz 4.20.

Zu jeder symmetrischen reellen $(n \times n)$ -Matrix S kann man n EV $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ finden, die eine Orthonormalbasis¹³ des \mathbb{R}^n bilden.

Satz 4.21. (Diagonalisierung symmetrischer Matrizen)

Zu jeder symmetrischen reellen $(n \times n)$ -Matrix S gibt es eine orthogonale Matrix¹⁴ C mit

$$C^T S C =: M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) .$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die EW von S . Die $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sind hierbei nicht notwendig verschieden. Jeder EW kommt in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so oft vor, wie seine algebraische Vielfachheit angibt. Die Spalten $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ von C sind EV von S , d.h., \mathbf{x}_j ist ein zu λ_j gehörender EV. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ bilden eine Orthonormalbasis.

4.4 Hauptachsentransformation**Definition 4.22.** (quadratische Form)

Einen quadratischen Ausdruck der Form

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$$

nennen wir **quadratische Form**, wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ein Vektor aus dem \mathbb{R}^n sein soll, und die Koeffizienten α_{ij} ebenfalls reell sein sollen.

Mit der Matrix $A = (a_{ij})$ und

$$a_{ii} = \alpha_{ii} \quad \text{und} \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{\alpha_{ij}}{2}, \quad i \neq j .$$

kann man $q(\mathbf{x})$ auch in der Form

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

aufschreiben, wobei die Matrix A reell und symmetrisch ist.

Bemerkung 4.23.

Da jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar ist, d.h., es gilt

$$C^T A C = M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) ,$$

kann man durch die Substitution $\mathbf{x} = C \mathbf{y}$ die quadratische Form p auch in der Form

$$\hat{p}(\mathbf{y}) = p(C \mathbf{y}) = (C \mathbf{y})^T A (C \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T C^T A C \mathbf{y} = \mathbf{y}^T M \mathbf{y}$$

aufschreiben. Mit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ erhält die quadratische Form folglich die Normalform

$$\hat{q}(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad .$$

Die eben beschriebene Transformation einer quadratischen Form bezeichnet man als **Hauptachsentransformation**.

Definition 4.24.

Die Spalten der orthogonalen Matrix C aus $C^T A C = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, also die zu den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gehörenden orthonormalen EV $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, bezeichnet man als Hauptachsen der quadratischen Form $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

¹³Es sei daran erinnert, daß wir unter einer Orthonormalbasis eine Basis verstehen, wo alle paarweise verschiedenen Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen.

¹⁴Unter einer Orthogonalmatrix C verstehen wir bekanntlich eine Matrix mit der Eigenschaft $C^T C = E$.

4.5 Klassifikation von Quadriken

Definition 4.25. (Quadrik)

Die Menge aller $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \beta = 0 \quad (126)$$

bezeichnet man als Quadrik, wobei die (n,n) -Matrix A reell und symmetrisch ist, und der Spaltenvektor \mathbf{b} aus dem \mathbb{R}^n ist. β ist eine reelle Zahl.

Definition 4.26. (Koordinatensystem)

Sei mit $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ gegeben, dann bezeichnet man durch

$$(\mathbf{u}; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$$

ein Koordinatensystem mit dem Ursprung \mathbf{u} .

Ist $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, dann ist das Koordinatensystem $(\mathbf{u}; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$ aus dem Standard-Koordinatensystem $(\mathbf{0}; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$ mit dem Nullpunkt als Ursprung durch eine Verschiebung von $\mathbf{0}$ nach \mathbf{u} hervorgegangen.

Satz 4.27.

1) Mit einer Hauptachsentransformation kann man man die Quadrik q mit der Gleichung (126) in der Form

$$\hat{q}(\mathbf{y}) = q(C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T M \mathbf{y} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} + \beta = 0 \quad (127)$$

aufschreiben, wobei

$$M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C^T A C \quad \text{und} \quad \mathbf{d}^T = \mathbf{b}^T C$$

mit der Orthogonalmatrix C der orthonormalen EV gilt.

Die Gleichung (127) hat ausgeschrieben die Form

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + \beta = 0 \quad (128)$$

Seien die EW so geordnet, daß $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, die von Null verschiedenen EW sind, und $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ gilt. 2) Mit einer quadratischen Ergänzung kann man die Gleichung (128) durch die Einführung von

$$z_j = \begin{cases} y_j & , \text{ falls } \lambda_j = 0 \\ y_j + \frac{d_j}{2\lambda_j} & , \text{ falls } \lambda_j \neq 0 \end{cases}$$

in der Form

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + d_{r+1} z_{r+1} + \dots + d_n z_n + \beta - \sum_{j=1}^r \frac{d_j^2}{4\lambda_j} = 0 \quad (129)$$

notieren.

3) Ist einer der Koeffizienten d_{r+1}, \dots, d_n verschieden von Null, etwa d_s , kann man durch die Substitution

$$w_s = z_s + \frac{\beta - \sum_{j=1}^r \frac{d_j^2}{4\lambda_j}}{d_s} \quad w_j = z_j \quad \text{für } j \neq s,$$

die Gleichung (129) letztendlich in der Form

$$\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_r w_r^2 + d_{r+1} w_{r+1} + \dots + d_n w_n = 0 \quad (130)$$

schreiben.

Bemerkung 4.28.

Die einzelnen Teile des Satzes 4.27 bedeuten

- 1) eine Drehung des ursprünglichen kanonischen Koordinatensystems $(\mathbf{0}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ in das Koordinatensystem $(\mathbf{0}; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$, wobei $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ die Hauptachsen der quadratischen Form $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ sind,
- 2) eine Verschiebung des Koordinatenursprungs von $\mathbf{0}$ nach \mathbf{u} mit

$$\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{z})^T \quad \text{und}$$

- 3) einer weiteren Verschiebung des Ursprungs von \mathbf{u} nach \mathbf{v} mit

$$\mathbf{v} = (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T .$$

4.6 Anwendung der Hauptachsentransformationen und Diagonalisierung

Anhand von zwei Beispielen soll die konkrete Anwendung der Hauptachsentransformation oder die Diagonalisierung von Matrizen demonstriert werden, da die obige Darstellung zugegebnermaßen recht allgemein war.

4.6.1 Lösung eines linearen DGL-Systems

Betrachten wir das lineare DGL-System

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 - 8x_2 - 12x_3 \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} . \tag{131}$$

Mit den Vereinbarungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann man das DGL-System auch in der Matrixform

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

schreiben. Wir versuchen die Matrix A zu diagonalisieren, um das DGL-System in einer gewissen Weise zu entkoppeln. Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)\lambda$$

und hat damit die Nullstellen bzw. EW

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2 .$$

Für λ_1 findet man mit

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen EV, für λ_2 erhält man den EV

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für λ_3 ergibt sich der EV

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die EV sind linear unabhängig und damit ist die Matrix $B = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ regulär und ergibt die Transformation

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D \quad .$$

Wenn wir durch $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ einen Hilfsvektor einführen, erhalten wir ausgehend von (131)

$$\mathbf{x}' = AB\mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad B^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{y}' = B^{-1}AB\mathbf{y}$$

und damit

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y} \quad \text{oder} \quad y_1' = 0, \quad y_2' = y_2, \quad y_3' = 2y_2$$

mit den Lösungen

$$y_1 = c_1 \quad y_2 = c_2 e^t \quad y_3 = c_3 e^{2t} .$$

Wir erinnern uns an die Gleichung $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ und erhalten schließlich mit

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 4 + c_2 4e^t + c_3 2e^{2t} \\ -c_1 - c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^t \end{pmatrix}$$

die Lösung des DGL-Systems (131) mit den reellen Konstanten c_1, c_2, c_3 .

Die entscheidende Hilfe bei der Lösung des DGL-Systems (131) war die Diagonalisierbarkeit der Matrix A , die hier nicht symmetrisch war (und damit ist die Diagonalisierbarkeit nicht in jedem Fall gesichert). Bei symmetrischen Koeffizientenmatrizen A ist die Diagonalisierung und die verwendete Methodik immer möglich.

4.6.2 Klassifikation einer Quadrik

Als zweites Beispiel soll die Quadrik

$$2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + y - 6 = 0 \tag{132}$$

klassifiziert werden. Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und den Vektoren} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kann man die Gleichung (132) auch in der Form

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} - 6 = 0 \tag{133}$$

aufschreiben. A kann diagonalisiert werden, man erhält das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

mit den Nullstellen bzw. EW $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$. Für λ_1 erhält man den orthonormierten EV

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für λ_2 ergibt sich der EV der Länge eins

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Matrix

$$C = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt die Transformation

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} =: D.$$

Mit der Substitution $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ erhält man ausgehend von (133) die Gleichung

$$\mathbf{y}^T D \mathbf{y} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} - 6 = 0,$$

wobei $\mathbf{d}^T = \mathbf{b}^T C = \frac{1}{\sqrt{5}}(-3, 4)$ gilt. Ausgeschrieben hat die Gleichung damit die Form

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_2 - 6 = 0.$$

Die quadratische Ergänzung führt auf

$$\begin{aligned} 3\left(y_1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 6 \\ = 3z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{23}{4} = 0, \end{aligned} \quad (134)$$

mit $z_1 = y_1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}$ und $z_2 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}$. Aus der Gleichung (134) erkennt man¹⁵, daß die Gleichung eine Hyperbel beschreibt.

Zusammengefaßt wurde mit der Hauptachsentransformation eine Drehung des ursprünglichen Koordinatensystems in ein Koordinatensystem mit den Hauptachsen \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 als Koordinatenrichtungen durchgeführt.

Mit der quadratischen Ergänzung wurde der Ursprung des Koordinatensystems vom Nullpunkt in den Punkt $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben. In der Abb. 13 ist die Drehung und die Verschiebung skizziert.

¹⁵nach einem Blick in die ausgereichte Klassifikationstabelle

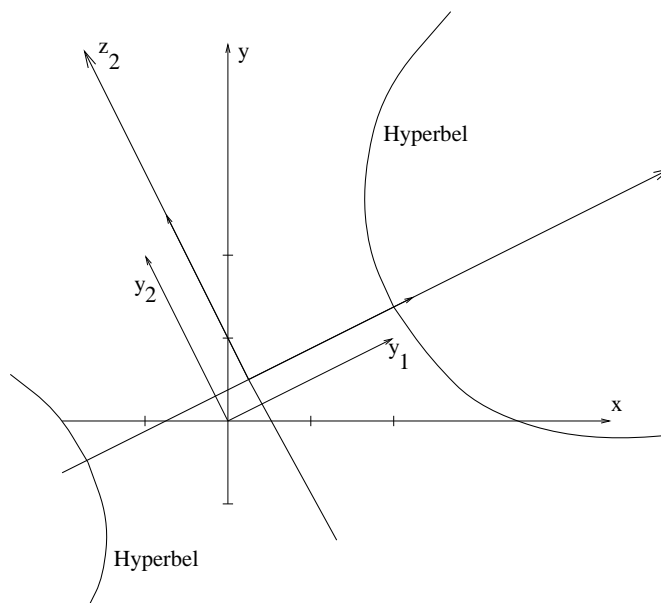


Abbildung 13: Drehung und Verschiebung

5 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Der \mathbb{R}^n ist uns als n -dimensionaler Vektorraum aus der HM I bekannt. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n befaßt sich vorwiegend mit Eigenschaften von Abbildungen oder Funktionen, deren Definitionsbereich D eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, und deren Wertebereich W eine Teilmenge des \mathbb{R}^m ist. Dabei ist der Fall $n = m = 1$ als Spezialfall eingeschlossen. I.allg. ist jedoch entweder n oder m eine natürliche Zahl größer als 1.

Ein Beispiel für eine reellwertige Funktion zweier Veränderlicher ist die Zustandfunktion idealer Gase

$$p(V, T) = R \cdot VT \quad p : D \rightarrow \mathbb{R}^1, D \subset \mathbb{R}^2,$$

also ein Gesetz zur Berechnung des Druckes in Abhängigkeit von dem Volumen und der Temperatur. In diesem Fall ist $n = 2$ und $m = 1$. Für den \mathbb{R}^1 schreibt man normalerweise abkürzend \mathbb{R} .

Bevor Abbildungen untersucht werden, ist es erforderlich einige wichtige Eigenschaften von Mengen aus dem \mathbb{R}^n zu behandeln.

5.1 Eigenschaften von Punktfolgen aus dem \mathbb{R}^n

Aus dem \mathbb{R} kennen wir die Begriffe "absoluter" Betrag $|x|$ oder $|x - y|$ als Abstand der reellen Zahlen x und y auf der reellen Zahlengeraden. Diese Begriffe sollen nun für Elemente des \mathbb{R}^n erklärt werden. Zuerst verständigen wir uns darauf, daß wir ein Element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Koordinatenform

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

darstellen, also als Spaltenvektor der Koordinaten, wobei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die kanonische Basis des n -dimensionalen Vektorraumes \mathbb{R}^n ist.

Definition 5.1. (Betrag, Abstand)

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann definieren wir den Betrag oder die Länge von \mathbf{x} als

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (135)$$

Als Abstand oder Differenz d der Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

also den Betrag des Differenzvektors. d ist der euklidische Abstand und bedeutet im \mathbb{R}^n , $n \leq 3$, die kürzeste Verbindung der Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Definition 5.2. (Umgebungen)

Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

bezeichnen wir als offene Kugelumgebung des Punktes \mathbf{x}_0 mit dem Radius r .

Die Menge

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

bezeichnen wir als abgeschlossene Kugelumgebung des Punktes \mathbf{x}_0 mit dem Radius r .

Hinweis:

Im \mathbb{R} ist eine offene Kugelumgebung einer reellen Zahl x_0 genau das offene Intervall $(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2})$,

im \mathbb{R}^2 ist eine offene Kugelumgebung eines Elements (Punktes) $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ genau die offene Kreisscheibe

$$K_{\mathbf{x}_0, r} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2 \right\}.$$

Definition 5.3. (offene Menge, innerer Punkt)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x}, r}$ gefunden werden kann, die in der Menge M liegt, also $K_{\mathbf{x}, r} \subset M$.

Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M , wenn eine Umgebung $K_{\mathbf{x}, r}$ existiert, die ganz in der Menge M liegt.

Die Menge aller inneren Punkte der Menge M bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{M}$.

Definition 5.4. (Häufungspunkt)

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung des Punktes \mathbf{x}_0 , also in $K_{\mathbf{x}_0, r}$, $r > 0$, beliebig, ein Punkt der Menge M liegt. Das bedeutet

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0, r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

Definition 5.5. (Randpunkt)

Ein Punkt \mathbf{x}_r heißt Randpunkt der Menge M , wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}, r}$ sowohl mindestens ein Punkt der Menge M liegt als auch ein Punkt des \mathbb{R}^n , der nicht in der Menge M liegt.

Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit ∂M .

Definition 5.6. (abgeschlossene Menge)

Eine Menge M heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Definition 5.7. (beschränkte Menge, kompakte Menge)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|\mathbf{x}\| \leq C, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M$$

gilt. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition 5.8. (zusammenhängende Menge)

Die Verbindungsstrecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ der Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} aus der Menge M ist durch

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}), s \in [0, 1]\}$$

definiert. Mit

$$[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] = \bigcup_{j=1}^p [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p$ jeweils durch Strecken verbindet. Eine Menge M heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} durch einen Polygonzug verbunden werden können, so daß alle Punkte des Polygonzuges zur Menge M gehören.

Definition 5.9. (Folge im \mathbb{R}^n)

Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im \mathbb{R}^n und bezeichnen sie durch

$$(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{bzw. abkürzend durch} \quad (\mathbf{a}_k).$$

Definition 5.10. (Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n)

Sei (\mathbf{a}_k) eine Folge im \mathbb{R}^n . $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert von (\mathbf{a}_k) wenn für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0\| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

gilt. Wir schreiben dafür

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder} \quad \mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Beispiel 1:

Die Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 5 \right\}$ ist eine abgeschlossene Menge im \mathbb{R}^2 . Außerdem stellt man fest, daß für alle Elemente von M

$$\|\mathbf{x}\| < 18$$

gilt. Damit ist M beschränkt und abgeschlossen, also **kompakt**.

Beispiel 2:

Die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1, a, b, c \text{ positive reelle Zahlen} \right\}$$

ist eine offene Menge im \mathbb{R}^3 . Sie ist außerdem beschränkt. Geben Sie als Übung eine Schranke C an.

Beispiel 3:

Wir betrachten die Folge (\mathbf{a}_k) mit $\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{k} \\ \frac{k^2}{3k^2+5k} \end{pmatrix}$. Als Grenzwert errechnet man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Berechnung nutzen wir eine nützliche Eigenschaft aus, die wir im folgenden Satz fixieren.

Satz 5.11.

Der Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n existiert dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{1k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

5.2 Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher

In der HM I haben wir uns mit der Differential- und Integralrechnung von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen befaßt. Jetzt wollen wir den Funktionsbegriff verallgemeinern.

Definition 5.12. (Abbildung)

Unter einer Abbildung

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, wobei wir die Schreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

verwenden.

D heißt Definitionsbereich der Abbildung \mathbf{f} .

$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ heißt Wertebereich der Abbildung \mathbf{f} .

Beispiele¹⁶:

1)

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}.$$

2)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

¹⁶Wir verabreden, daß vektorwertige Abbildungen ($m > 1$) mit dem Schrifttyp "bold" (fett) bezeichnet werden, und reellwertige Abbildungen ($m = 1$) mit normalem Schrifttyp gekennzeichnet werden.

Bemerkung 5.13. (Spezialfälle von Abbildungen)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Abbildung.

- a) Ist $m = 1$, bezeichnet man die Abbildung f auch als Skalarfeld oder Funktion.
- b) Ist $m > 1$, bezeichnet man die Abbildung \mathbf{f} auch als Vektorfeld.
- c) Ist $n = 1$, bezeichnet man die Abbildung \mathbf{f} auch als Kurve¹⁷, wobei D ein abgeschlossenes Intervall aus dem $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ sein soll.

Bemerkung 5.14. (Abbildungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3)

Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ordnet jedem Punkt der $x - y$ -Ebene einen Wert z zu, so daß der Graph

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y)^T \in D\}$$

der Funktion eine Fläche im \mathbb{R}^3 ergibt.

Bei Abbildungen mit $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, verwenden wir verabredungsgemäß statt x_1, x_2, x_3 auch x, y, z .

5.3 Kurven im \mathbb{R}^n

In der Bemerkung 5.13 wurde unter c) der Fall einer Abbildung $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, $D = I$ abgeschlossenes Intervall, hervorgehoben, und \mathbf{f} als Kurve bezeichnet. Kurven kennen wir bereits aus der HM I. Wir haben solche Begriffe wie Bogenlänge und Bogenelement schon für Kurven im \mathbb{R}^2 erklärt, so daß viele der folgenden Begriffe einfache Verallgemeinerungen darstellen werden. Wir wollen im folgenden Abbildungen aus dem \mathbb{R}^1 in den \mathbb{R}^n mit dem griechischen Buchstaben γ bezeichnen.

Eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat als Ergebnis einen Vektor aus dem \mathbb{R}^n und wir verwenden die Schreibweise

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

Bemerkung 5.15.

Wenn wir von der Stetigkeit einer Kurve sprechen, oder von der Differenzierbarkeit, dann bedeutet dies, daß die Koeffizientenfunktionen $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, die entsprechenden Eigenschaften haben müssen.

Differenzierbarkeit auf einem abgeschlossenen Intervall bedeutet die Differenzierbarkeit im Intervallinneren und die links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit an den Intervallgrenzen.

Definition 5.16. (Kurve, Kurvenstück)

Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Kurvenstück.

Unter einer Kurve γ verstehen wir eine endliche Anzahl von Kurvenstücken $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$, die miteinander verbunden sind, also für die

$$\gamma_{j+1}(t_j) = \gamma_j(t_j), \quad j = 1, \dots, k - 1,$$

¹⁷Die präzise Definition einer Kurve (auch Raumkurve genannt) erfordert noch Differenzierbarkeitseigenschaften, die noch formuliert werden.

gilt.

Man verwendet auch die Bezeichnung

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k],$$

und spricht bei $\gamma : [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einer stückweise glatten Kurve.

D.h., an den Nahtstellen der Kurvenstücke sind "Ecken" bzw. Nichtdifferenzierbarkeitsstellen erlaubt.

Satz 5.17. (Ableitungsregeln)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen (komponentenweise zu verstehen), und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gelten die Regeln

(a) Linearität

$$\frac{d}{dt}(\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t)$$

(b) Produktregel für das Skalarprodukt

$$\frac{d}{dt}[\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)] = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t)$$

(c) Produktregel für das Vektorprodukt ($n = 3$)

$$\frac{d}{dt}[\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)] = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t)$$

(d) Produktregel für Multiplikation mit einer skalaren Funktion α

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t)\gamma_1(t)] = \dot{\alpha}(t)\gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t)$$

Als Beispiel einer Kurve im \mathbb{R}^3 soll die Schraubenlinie $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]$$

genannt werden.

Definition 5.18. (reguläre Kurve)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Unter $\dot{\gamma}(t)$ versteht man den Vektor der Ableitungen der Komponentenfunktionen von γ , also

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

γ heißt reguläre Kurve, wenn

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [t_a, t_e]$$

gilt.

Definition 5.19. (Bogenlänge)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

bezeichnen wir als **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[t_a, t]$.

Bemerkung 5.20.

Es ergibt sich

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad . \quad (136)$$

mit

$$ds := \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

bezeichnet man das (skalare) Bogenelement.

Definition 5.21. (Tangentenvektor)

Sei γ eine reguläre Kurve. Mit

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

bezeichnet man den Tangentenvektor der Kurve γ zum "Zeitpunkt" t .

Die Gleichung der Kurventangente in $\gamma(t_0)$ lautet

$$\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad .$$

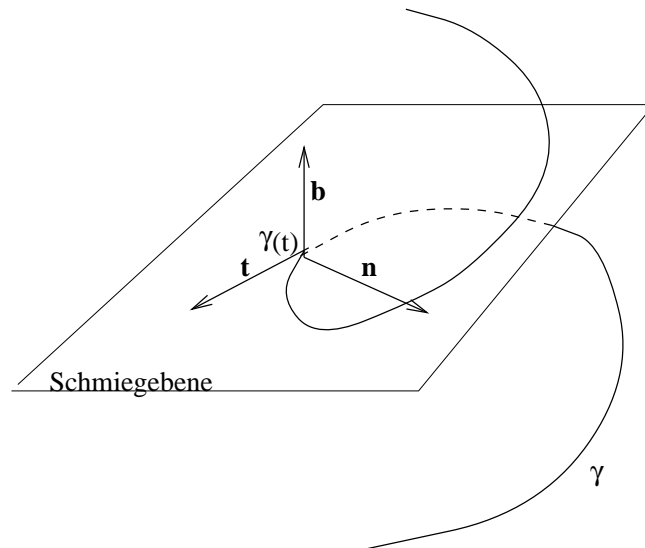


Abbildung 14: begleitendes Dreibein und Schmiegebene

Definition 5.22. (Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor)

Ist die Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal (komponentenweise) stetig differenzierbar, regulär und gilt $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq \mathbf{0}$, so nennt man die zu \mathbf{t} orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|} \quad \text{Hauptnormalenvektor} \quad (137)$$

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{Binormalenvektor} \quad (138)$$

und das Rechtssystem¹⁸ $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ das **begleitende Dreibein** der Kurve an der Parameterstelle t .

Die von $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{n}(t)$ aufgespannte Ebene durch $\gamma(t)$

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

nennt man **Schmiegeebene** der Kurve an der Stelle t (s. auch Abb. 14).

Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)] ,$$

also die Änderung des Tangentenvektors entlang eines Wegstückes beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve im Parameterintervall $[t, t_1]$. Mit der l'Hospital-Regel erhält man die

Definition 5.23. (Krümmungsvektor, Krümmung)

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{t}}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s}$$

heißt Krümmungsvektor. Die Länge des Krümmungsvektors ergibt sich zu

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} \|\dot{\mathbf{t}}(t)\| = \frac{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \quad (139)$$

und bezeichnet die Krümmung der Kurve an der Stelle t .

Bemerkung 5.24.

Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$ und Beschleunigungsvektor $\ddot{\gamma}(t)$ lassen sich im begleitenden Dreibein $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ unter Nutzung der Beziehung (136) auch in der Form

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{s}(t) \mathbf{t}(t) , \quad (140)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{s}(t) \mathbf{t}(t) + \dot{s}(t)^2 \kappa(t) \mathbf{n}(t) \quad (141)$$

darstellen. Mit $\mathbf{t}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t)$ ergeben (140,141)

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \dot{s}(t)^3 \kappa(t) \mathbf{t}(t) .$$

Wegen $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ folgt $\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| = \dot{s}(t)^3 \kappa(t)$. Damit ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \quad (142)$$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} \quad (143)$$

Das Herauswinden der Kurve aus der Schmiegeebene wird durch die Änderungsrate des Binormalvektors, bezogen auf die Bogenlänge beschrieben, also formulieren wir die

¹⁸Ein System dreier linear unabhängiger Vektoren $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ heißt Rechtssystem, wenn für das Spatprodukt $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ gilt.

Definition 5.25. (Torsionsvektor)

Man nennt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

den Torsionsvektor einer dreimal stetig differenzierbaren Kurve an der Stelle t .

Aus der Produktregel für das Skalarprodukt folgt aufgrund von $\|\mathbf{b}(t)\| = 1$

$$\dot{\mathbf{b}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = 0$$

und wegen

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}$$

auch orthogonal zu \mathbf{t} , also parallel zu \mathbf{n} . D.h., es gibt eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t) \mathbf{n}(t). \quad (144)$$

Definition 5.26. (Torsion)

Man nennt $\tau(t)$ die Torsion einer dreimal stetig differenzierbaren Kurve.

Korollar 5.27.

Für die Torsion gilt

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}.$$

Beweis.

Aus $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ folgt $\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$ und deshalb führt (144) auf

$$\tau = -\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\dot{s}(t)} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{n}}.$$

Auf der rechten Seite setzen wir \mathbf{b} aus (143) ein, und $\dot{\mathbf{n}}$ aus der nochmals differenzierten Gleichung (141) ein und erhalten nach kurzer Rechnung mit (142) die Behauptung. \square

Die dargestellten Rechnungen und Formeln fassen wir nun zusammen.

Satz 5.28.

Ein dreimal stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ besitzt an jeder Parameterstelle t mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$

- den Tangentenvektor

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|},$$

- den Binormalenvektor

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|},$$

- den Hauptnormalenvektor

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t),$$

- die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

- die Torsion

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}.$$

5.4 Stetigkeit von Abbildungen

Definition 5.29. (Stetigkeit)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

- a) f ist stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, wenn für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ aus $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$$

folgt.

- b) f ist stetig auf $A \subset D$, wenn für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: f ist stetig in \mathbf{x} .
 c) f ist stetig, wenn f auf dem gesamten Definitionsbereich D stetig ist.

Definition 5.30.

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

\mathbf{f} ist stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig, wenn f_j stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig ist für alle $j = 1, 2, \dots, m$.

Definition 5.31. (Maximum, Minimum)

M heißt Maximum der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_M) = M$$

gibt.

m heißt Minimum der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_m) = m$$

gibt.

Satz 5.32.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, dann nimmt f auf D ihr Maximum und ihr Minimum an.

Bemerkung 5.33. (Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher)

1.) Verkettungen von elementaren Funktionen, wie z.B.

$$f(x, y, z) = \sin(xy)e^z$$

oder

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} \ln y, \quad y > 0,$$

sind stetig.

2.) Vorsicht ist bei Funktionen geboten, die aufgrund von Singularitäten (Polstellen) fortgesetzt werden, z.B. ist die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(x, y)^T = \mathbf{0}$ nicht stetig, denn man findet leicht 2 Folgen, nämlich $(\frac{2}{k}, \frac{1}{k})^T$ und $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})^T$, die jeweils gegen $\mathbf{0}$ konvergieren, allerdings ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{5} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{5} \neq f(\mathbf{0}).$$

5.5 Partielle Ableitung einer Funktion

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Fixieren wir bis auf die Veränderliche x_j die anderen Veränderlichen durch die Beziehungen

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_{j+1} = a_{j+1}, \dots, x_n = a_n,$$

so ist durch

$$f^* : d \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad d \subset \mathbb{R},$$

eine "partielle" Funktion einer Veränderlichen definiert. Wenn von dieser partiellen Funktion die Ableitung an der Stelle $x_j = a_j$ existiert, so nennt man diese Ableitung **partielle** Ableitung der Funktion f nach x_j im Punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ und bezeichnet sie durch

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

die bis auf die Punkte mit $x_1 \cdot x_2 = 0$ in der $x_1 - x_2$ -Ebene definiert ist. Wir wollen die partielle Ableitung nach x_1 im Punkt $\mathbf{a} = (2, 3)^T$ berechnen. Nach der obigen Überlegung betrachten wir dazu die "partielle" Funktion

$$f^*(x_1) = f(x_1, 3) = \frac{1}{3x_1}.$$

Die Ableitung dieser Funktion an der Stelle $x_1 = 2$ existiert, es ergibt sich $\frac{df^*}{dx_1}(2) = -\frac{1}{3x_1^2}(2) = -\frac{1}{12}$, so daß wir die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}(2, 3) = -\frac{1}{12}$$

erhalten. Was bedeuten nun die obigen Überlegungen geometrisch oder anschaulich?

Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2)$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Wenn wir nun eine Variable, hier $x_2 = 3$ fixieren und damit eine partielle Funktion definieren, so bedeutet das, den Graphen bzw. die Fläche mit der Ebene $x_2 = 3$, zu schneiden. Als Ergebnis dieses Schnittes erhalten wir dann den Graphen der partiellen Funktion f^* einer Veränderlichen. Die Abbildungen 15 und 16 zeigen die Graphen der Funktion und der partiellen Funktion, wobei der Anstieg der in der Abb. 16 eingezeichneten Tangente gleich dem Wert der partiellen Ableitung ist.

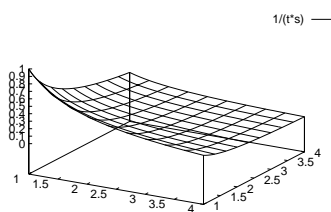


Abbildung 15: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$

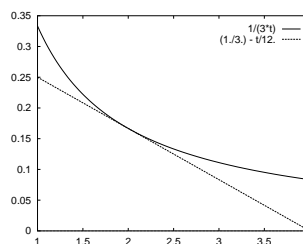


Abbildung 16: Graph von $f^*(x_1) = \frac{1}{3x_1}$ incl. Tangente an f^*

Das Zeichen ∂ in der partiellen Ableitung soll den Unterschied zu einer Ableitung einer Funktion mit einer Veränderlichen deutlich machen. Die Erläuterungen zur partiellen Ableitung fassen wir in der folgenden Definition zusammen.

Definition 5.34. (partielle Ableitung)

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} \end{aligned}$$

dann ist die Funktion f an der Stelle \mathbf{x} partiell differenzierbar und durch den Grenzwert ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

von f an der Stelle \mathbf{x} definiert.

f ist partiell differenzierbar auf $A \subset D$, A offen, wenn f in allen Punkten $\mathbf{x} \in A$ partiell differenzierbar ist.

f ist partiell differenzierbar, wenn f auf D partiell differenzierbar ist.

Für die partielle Ableitung nach x_j wird auch die Bezeichnung f_{x_j} verwendet.

Definition 5.35. (partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. f ist heißt partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

Definition 5.36. (stetige partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. f ist stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.

Bemerkung 5.37. (Differentiationstechnik)

Es ist selbstverständlich möglich, partielle Ableitungen gemäß Definition über die Berechnung des entsprechenden Grenzwertes zu berechnen.

Meistens geht es aber auch einfacher. Zur praktischen Berechnung der partiellen Ableitung einer Funktion f nach x_j werden die Veränderlichen x_i , $i = 1, \dots, n, i \neq j$, also alle Veränderlichen außer x_j , als Parameter behandelt und unter Anwendung der bekannten Differenzierbarkeitsregeln die Ableitung nach x_j gebildet.

Beispiele:

1) Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = x \sin x \cos(yz)$. Für die partiellen Ableitungen nach x, y, z berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} &= \sin x \cos(yz) + x \cos x \cos(yz), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} &= -x \sin x \sin(yz)z, \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} &= -x \sin x \sin(yz)y.\end{aligned}$$

2) $f(x, y, z) = x^2 \ln x + yz + yx$, $x > 0$.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} = 2x \ln x + x + y, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} = z + x, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} = y.$$

Wenn alle partiellen Ableitungen einer Funktion f existieren, kann man den Gradienten der Funktion bilden. Er ist wie folgt definiert:

Definition 5.38. (Gradient einer Funktion)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, partiell differenzierbar. Dann nennt man

$$\mathit{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

den Gradienten der Funktion f .

Die Abbildung $\mathit{grad} f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine vektorwertige Abbildung, d.h., jedem $\mathbf{x} \in D$ wird mit $\mathit{grad} f(\mathbf{x})$ ein Vektor aus dem \mathbb{R}^n zugeordnet.

Wir merken an, daß die partielle Ableitung einer Funktion f wiederum eine Funktion ist, und zwar

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R},$$

also kann man $g(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ evtl. wieder partiell differenzieren. Wenn g nach x_i partiell differenzierbar ist, dann existieren "höhere" partielle Ableitungen von f .

Definition 5.39. (höhere partielle Ableitungen)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, nennt man

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_j und x_i . Existieren alle 2. Ableitungen, also für $i, j = 1, 2, \dots, n$, nennt man f 2-mal partiell differenzierbar.

Höhere Ableitungen (k -te Ableitungen) werden entsprechend rekursiv definiert.

Zur Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei der Bildung höherer partieller Ableitungen betrachten wir den folgenden Satz.

Satz 5.40. (Satz von Schwarz)

Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ p -mal stetig differenzierbar, so kann man in allen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}, \quad \text{mit } 1 < k \leq p,$$

die Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ beliebig ändern, ohne daß sich die partiellen Ableitungen dabei ändern.

Die Indizes i_1, i_2, \dots, i_k sind dabei beliebige Elemente der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Bemerkung 5.41.

Ist f eine Funktion mit zwei Veränderlichen, dann gilt im Falle der 2-fachen stetigen Differenzierbarkeit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Definition 5.42. (partielle Ableitung einer vektorwertigen Abbildung)

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D offene Menge, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

\mathbf{f} ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar,

wenn f_j partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar ist für alle $j = 1, 2, \dots, m$.

5.6 Ableitungsmatrix und Hesse-Matrix

Durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

sei eine Abbildung beschrieben, die in \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar ist. Damit existieren alle Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

und man kann die Ableitungsmatrix wie folgt definieren.

Definition 5.43. (Jacobi-Matrix)

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$, in \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (145)$$

Ableitungs- oder Jacobi-Matrix von \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 .

Beispiel:

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_2 x_3) \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix},$$

also eine Abbildung vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2 . Die Ableitungsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(x_2 x_3) & -x_1 x_3 \sin(x_2 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_2 x_3) \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$, die in $\mathbf{x} \in D$ 2-mal partiell differenzierbar sein soll. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Damit kann man die Hesse-Matrix wie folgt definieren.

Definition 5.44. (Hesse-Matrix)

Die Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (146)$$

heißt **Hesse-Matrix** der Funktion f .

Aufgrund des Satzes 5.40 ergibt sich für die Hesse-Matrix die Folgerung

Korollar 5.45.

Die Hesse-Matrix einer 2-mal stetig differenzierbaren Abbildung ist symmetrisch.

Beispiel:

Betrachten wir die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cos x_3.$$

Für die Hesse-Matrix errechnet man

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & \cos x_3 & -x_2 \sin x_3 \\ \cos x_3 & 0 & -x_1 \sin x_3 \\ -x_2 \sin x_3 & -x_1 \sin x_3 & -x_1 x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}$$

5.7 Differenzierbarkeit von Abbildungen

Definition 5.46.

Eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt \mathbf{x}_0 von D differenzierbar, wenn sie in \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar ist und in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (147)$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{k}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{k}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \quad (148)$$

gilt.

\mathbf{f} heißt differenzierbar in $A \subset D$, wenn \mathbf{f} in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt f eine differenzierbare Abbildung.

Bemerkung 5.47. (reelle Funktion)

Ist f eine reellwertige Funktion mit einer veränderlichen Variablen, kann man die Beziehung (147) umschreiben zu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \frac{k(x)}{x - x_0}.$$

Die Forderung, daß $\frac{k(x)}{x-x_0}$ für $x \rightarrow x_0$ gegen Null strebt, ist im vorliegenden Fall gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

also der Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Da $\frac{k(x)}{x-x_0}$ für $x \rightarrow x_0$ gegen Null strebt, reicht es nicht aus, wenn $k(x) = O(|x - x_0|)$ gilt, sondern es muß

$$k(x) = O(|x - x_0|^\nu) \quad \text{mit } \nu > 1$$

gelten. $k(x)$ muß also überlinear für $x \rightarrow x_0$ gegen Null streben.

Mit dem folgenden Satz hat man ein Kriterium, was in den meisten praktischen Fällen zur Überprüfung der Differenzierbarkeit von Abbildungen genutzt werden kann.

Satz 5.48.

$\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist in dem inneren Punkt \mathbf{x}_0 aus D differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von \mathbf{f} in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 existieren und in \mathbf{x}_0 stetig sind.

5.8 Differenzierbarkeitsregeln und die Richtungsableitung

Satz 5.49. (Regeln für differenzierbare Abbildungen)

a) *Linearität*

Sind $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in \mathbf{x}_0 , so ist auch $\lambda \mathbf{f} + \mu \mathbf{g}$ (λ und μ reell) in \mathbf{x}_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda \mathbf{f} + \mu \mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0).$$

b) *Kettenregel*

Es sei $\mathbf{h} : C \rightarrow D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in C$ und $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.

Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ in \mathbf{x}_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0) \mathbf{h}'(\mathbf{x}_0).$$

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2$, und die Abbildung $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^3 \end{pmatrix}$. Die Ableitung von

$$y = f \circ \mathbf{h}(t) = f(h_1(t), h_2(t)) = \cos^2 t \sin t^3$$

kann man nun nach der Kettenregel wie folgt berechnen.

Für f' berechnen wir

$$f'(x_1, x_2) = [2x_1 \sin x_2, x_1^2 \cos x_2]$$

und für \mathbf{h}'

$$\mathbf{h}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= (f \circ \mathbf{h}(t))' = f'(h_1(t), h_2(t)) \mathbf{h}'(t) \\ &= [2 \cos t \sin t^3, \cos^2 t \cos t^3] \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = -2 \sin t \cos t \sin t^3 + 3t^2 \cos^2 t \cos t^3. \end{aligned}$$

Wenn wir nun eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten, die im Punkt \mathbf{x}_0 differenzierbar sein soll, und eine Funktion

$$\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

dann errechnet man $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{a}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Anwendung der Kettenregel ergibt für $f \circ \mathbf{h}$

$$(f \circ \mathbf{h})'(0) = f'(\mathbf{x}_0) \mathbf{a}.$$

$\mathbf{h}(t)$ beschreibt eine "Gerade" in \mathbb{R}^n durch \mathbf{x}_0 in Richtung \mathbf{a} , was man sich am besten im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 anschaulich klar macht. Aus diesem Grunde nennt man $f'(\mathbf{x}_0) \mathbf{a} = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}$ auch **Richtungsableitung**, wobei man $|\mathbf{a}| = 1$ fordert.

Eine allgemeinere Definition der Richtungsableitung, die die Differenzierbarkeit von f nicht fordert, wird nun formuliert.

Definition 5.50. (Richtungsableitung)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)],$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle \mathbf{x}_0 in Richtung \mathbf{a} .

Korollar 5.51.

Sind die partiellen Ableitungen von f in \mathbf{x}_0 stetig¹⁹, dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung \mathbf{a}

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}.$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die partielle Ableitung einer Funktion f nach x_j genau die Richtungsableitung von f in Richtung \mathbf{e}_j ist, denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}_0).$$

Beispiel:

Zu bestimmen ist die Richtungsableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x^2 \cos(xy)e^z$ im Punkt $(1, 0, 1)$ in Richtung $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$. Es ergibt sich

$$\text{grad } f = (2x \cos(xy)e^z - x^2 y \sin(xy), -x^3 \sin(xy)e^z, x^2 \cos(xy)e^z)^T,$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(1, 0, 1) = (2e, 0, e)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}3e.$$

5.9 Lineare Approximation

Bei komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert die Frage, ob man die entsprechende Funktion zumindest in der lokalen Umgebung eines Punktes \mathbf{x}_0 des Definitionsbereiches durch eine recht einfache Approximation annähern kann.

Aus der Beziehung (147) wird ersichtlich, daß die Abbildung \mathbf{f} in der Nähe des Punktes \mathbf{x}_0 durch die Abbildung $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{149}$$

ersetzen kann, ohne wegen der "Kleinheit" von $\|\mathbf{k}(\mathbf{x})\|$ einen allzu großen Fehler zu machen.

Die durch (149) definierte Abbildung \mathbf{g} nennt man **Tangentenabbildung** oder **lineare Approximation** von \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 .

Betrachten wir zur Veranschaulichung eine differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, dann ergibt sich in $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + k(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + k(x, y), \end{aligned} \tag{150}$$

¹⁹Damit folgt die Differenzierbarkeit von f in \mathbf{x}_0 .

und die Tangentenabbildung

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Man überlegt sich nun, daß der Graph von g eine Ebene, die wir Tangentenebene nennen, mit den folgenden Eigenschaften ist:

- a) die Ebene berührt im Punkt $P = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ den Graphen der Funktion f , also ist

$$(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) ,$$

und sie schmiegt sich wegen der Kleinheit von $k(x, y)$ an den Graphen von f ,

- b) die Tangenten an den Funktionen $f^*(x) := f(x, y_0)$ an der Stelle x_0 und $f^{**}(y) := f(x_0, y)$ an der Stelle y_0 liegen in der Ebene,

- c) in der unmittelbaren Umgebung von $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ stellt die Ebene wegen der Kleinheit von $k(x, y)$ eine gute Näherung der Funktion f dar.

Korollar 5.52.

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist genau dann in $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ differenzierbar, wenn es eine Tangentenebene an den Graphen von f in \mathbf{x}_0 gibt.

Beispiel:

Betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$. Gesucht ist eine lineare Approximation durch die Tangentenebene in der Umgebung des Punktes $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Mit

$$f'(\mathbf{x}) = [\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x]$$

erhält man

$$g(x, y) = 0 + [0, \frac{\pi}{2} + 1] \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} = (\frac{\pi}{2} + 1)y .$$

Die Ebenengleichung in der aus der HM I bekannten parameterfreien Form ($z = g(x, y)$) lautet also

$$(\frac{\pi}{2} + 1)y - z = 0 .$$

5.10 Totales Differential

Ebenso wie im Fall der Funktionen einer reellen Veränderlichen ist für Funktionen mit mehreren Variablen eine Näherungs-Formel für die Differenz

$$\Delta z := f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

für eine differenzierbare Funktion interessant. Ausgehend von der für differenzierbare Funktionen gültigen Darstellung

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x})$$

ergibt sich für Δz

$$\Delta z = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}) .$$

Da $\|k(\mathbf{x})\|$ für kleine $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ sehr kleine Werte hat, gibt $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ in guter Näherung die Abweichung Δz des Wertes $f(\mathbf{x})$ von $f(\mathbf{x}_0)$ an.

Wir wählen, wie in der Physik und Ingenieurwissenschaft üblich, die Bezeichnungen

$$d\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad dz := f'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x} . \quad (151)$$

Mit der Komponentendarstellung

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

kann man (151) ausführlicher schreiben.

Definition 5.53. (totales oder vollständiges Differential)

Die durch

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j \quad (152)$$

beschriebene lineare Funktion mit den reellwertigen Variablen dx_1, dx_2, \dots, dx_n heißt das vollständige oder totale Differential von f in \mathbf{x}_0 . Die Funktion wird auch durch $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$df(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j \quad (153)$$

symbolisiert.

Mit der Verabredung

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

wird das vollständige Differential auch durch die Gleichung

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_j} dx_j \quad (154)$$

in einer Schreibweise angegeben, die in Physik und Technik sehr gebräuchlich ist.

Das vollständige Differential hat Bedeutung in der Abschätzung von Meßfehlern. Betrachtet man z.B. eine Funktion $f(x, y)$ und möchte man etwas zum Fehler bei der Berechnung des Funktionswertes an der Stelle (x_0, y_0) wissen, wenn x_0 und y_0 mit den Fehlern $dx = x - x_0$ bzw. $dy = y - y_0$ behaftet sind, dann kann man das totale Differential nutzen. Dazu schreiben wir das vollständige Differential von f an der Stelle (x_0, y_0) auf und erhalten

$$dz = df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy .$$

Damit kann man die Auswirkung der Fehler dx und dy auf den Fehler im Funktionswert abschätzen. Man erhält mit

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |dz| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| |dx| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| |dy|$$

die gewünschte Fehlerabschätzung. Hier sei darauf hingewiesen, daß man bei Fehlerabschätzungen genau wie im Fall des totalen Differentials einer Funktion einer reellen Veränderlichen zwischen relativen ($\frac{|dz|}{|z|}$) und absoluten Fehlern ($|dz|$) unterscheidet.

Beispiel:

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für das vollständige Differential ist die näherungsweise Berechnung von $2,02^{3,01}$.

Wir führen dazu die Funktion

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y > 0$$

ein und ermitteln $f(2,02, 3,01)$ näherungsweise durch $f(2, 3) + df$, wobei

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)dy$$

mit $dx = 0,02$ und $dy = 0,01$ ist. Die partiellen Ableitungen von f lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x,$$

und man erhält

$$2,02^{3,01} = f(2,02, 3,01) \approx 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0,02 + 2^3 \ln 2 \cdot 0,01 \approx 8,295.$$

Auf meinem Taschenrechner habe ich für $2,02^{3,01}$ das Ergebnis $8,3$ erhalten, wobei ich nicht genau weiß, wie mein Taschenrechner zu dem Ergebnis gekommen ist.

5.11 Taylorformel und Mittelwertsatz

Ziel dieses Abschnitts ist die näherungsweise Darstellung einer $(p+1)$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, als ein spezielles Polynom p -ten Grades. Ein solches Polynom läßt sich i.d.R. leichter berechnen als die Funktion und nähert zweitens die Funktion genauer als die lineare Approximation.

5.11.1 Taylorformel im \mathbb{R}^n

Wir benötigen zur Aufstellung der Taylorformel einige Hilfsmittel. Mit

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

führen wir den sogenannten Nabla-Operator als symbolischen Vektor ein²⁰. Die formale skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit einem Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{h} := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

²⁰Der Name Nabla-Operator rührt von einem hebräischen Saiteninstrument her, das in etwa die Form des Nabla-Zeichens hat.

ergibt mit

$$\mathbf{h} \cdot \nabla := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

einen Operator, den man auf die Funktion f anwenden kann. Man erhält

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Unter der k -ten Potenz von $\mathbf{h} \cdot \nabla$ wollen wir den Operator

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

verstehen. In der Summe wird über alle k -Tupel (i_1, i_2, \dots, i_k) mit $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ summiert, so daß die Summe n^k Glieder hat.

Für $k = 2$ erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 &= \sum_{i,j=1}^2 h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= h_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + h_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}, \end{aligned}$$

und angewandt auf die Funktion f erhalten wir

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}) = h_1 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + h_2 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}.$$

Die Anwendung von $(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k$ auf f ergibt

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

Hat man mit \mathbf{a} und \mathbf{h} beliebige Vektoren aus dem \mathbb{R}^n gegeben, so bezeichnen wir mit

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] = \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{h} \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

die Verbindungsstrecke der Punkte \mathbf{a} und $\mathbf{a} + \mathbf{h}$. Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 entspricht das den üblichen Vorstellungen der kürzesten Verbindungsgeraden zwischen \mathbf{a} und $\mathbf{a} + \mathbf{h}$. Mit den eben definierten Begriffen kann nun der Satz von Taylor im \mathbb{R}^n formuliert werden.

Satz 5.54. (Taylorformel im \mathbb{R}^n)

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke.

Dann gilt die Taylorformel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) \\ &+ \frac{1}{1!} (\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{p!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{a}) + R(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \end{aligned} \tag{155}$$

mit dem Restglied

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{p+1} f(\mathbf{a} + s\mathbf{h}) ds. \quad (156)$$

Es ergibt sich die Abschätzung

$$|R(\mathbf{a}, \mathbf{h})| \leq \frac{\|\mathbf{h}\|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{p+1}=1}^n |f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p+1}}}(\mathbf{a} + s\mathbf{h})|^2}. \quad (157)$$

Definition 5.55. (Taylorpolynom p -ten Grades)

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke.

Dann heißt

$$T_p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) := f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} (\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{p!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{a}) \quad (158)$$

Taylorpolynom p -ten Grades an der Stelle \mathbf{a} .

Wenn wir $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ setzen, erhalten wir für das Taylorpolynom p -ten Grades

$$T_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}_0) + \dots + \frac{1}{p!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{x}_0), \quad (159)$$

wobei $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ist.

Für $p = 0$ folgt aus der Taylorformel der folgende Satz.

Satz 5.56. (Mittelwertsatz)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke.

Dann gilt

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \int_0^1 (\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{a} + s\mathbf{h}) ds, \quad (160)$$

sowie

$$|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| \leq \|\mathbf{h}\| \sup_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_{x_i}(\mathbf{a} + s\mathbf{h})|^2}. \quad (161)$$

5.11.2 Taylorpolynom 2. Grades

Der Formalismus beim Taylorpolynom p -ten Grades ist, wie die obigen Vorbereitungen und die mehrfache Summierung zeigen, recht aufwendig. Glücklicherweise benötigt man in der Regel nur Taylorpolynome bis zum 2. Grad. Zum Taylorpolynom 1. Grades bleibt nur anzumerken, daß es gleich der Tangentenabbildung $g(\mathbf{x})$ ist, die wir im Zusammenhang mit der linearen Approximation behandelt haben (zur Übung sollte man sich dies allerdings mit der Definition (158) klar machen).

Für das Taylorpolynom $T_2(\mathbf{x})$ gibt es ebenfalls eine recht einprägsame Darstellung.

Satz 5.57. (Taylorpolynom 2. Grades)

Das Taylorpolynom 2. Grades einer Funktion f an der Stelle \mathbf{x}_0 kann man in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (162)$$

darstellen, wobei H_f die Hesse-Matrix der Funktion f ist.

Führt man die skalare Multiplikation $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ und das Matrixprodukt $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ der Darstellung (162) aus, erhält man die Beziehung (159) für $p = 2$.

Beispiel:

Betrachten wir wiederum die Funktion $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$. Gesucht ist eine Approximation mit einem Taylorpolynom 2. Grades. Als Entwicklungspunkt nehmen wir $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Weiter oben haben wir

$$f'(\mathbf{x}) = [\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x]$$

gefunden. Für die Hesse-Matrix erhalten wir

$$H_f = \begin{pmatrix} -y \sin x & \cos y + \cos x \\ \cos y + \cos x & -x \sin y \end{pmatrix}.$$

Damit können wir das Taylorpolynom 2. Grades aufschreiben und erhalten

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \text{grad } f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}, y) H_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)y + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)y + \frac{1}{2}[(x - \frac{\pi}{2})y + y(x - \frac{\pi}{2})] \\ &= y + xy \end{aligned}$$

5.12 Satz über implizite Funktionen

Wir haben bisher an verschiedenen Stellen implizite funktionale Zusammenhänge der Form

$$f(x, y) = 0 \quad \text{oder allgemein} \quad f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

benutzt. Z.B. hatten wir als Lösung einer DGL

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

bzw.

$$f(y, x) = y - C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$$

erhalten. Es stellt sich dann die Frage, unter welchen Voraussetzungen man $f(x, y) = 0$ nach y eindeutig "auflösen" kann. Das muß keineswegs der Fall sein, denn möglicherweise gibt es überhaupt keine Lösung der Gleichung $f(x, y) = 0$, oder zu einem x existieren mehrere y -Werte, so daß $f(x, y) = 0$ ist. Überhaupt nicht auflösbar ist z.B. die Gleichung

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

und die Gleichung

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

hat für den x -Wert 0 die beiden y -Werte $y = 1$ und $y = -1$, so daß man aufgrund der Mehrdeutigkeit nicht von einer Funktion $y = y(x)$ sprechen kann.

Antwort auf die gestellten Fragen gibt der Satz über implizite Funktionen.

Satz 5.58. (Satz über implizite Funktionen, zweidimensionaler Fall)

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, D offen, eine stetig differenzierbare Funktion. Für einen Punkt $(x_0, y_0)^T \in D$ sei

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (163)$$

Damit folgt

- a) Es gibt ein Intervall U um x_0 und ein Intervall V um y_0 mit der Eigenschaft:
Zu jedem $x \in U$ existiert genau ein $y \in V$ mit

$$f(x, y) = 0.$$

Jedem $x \in U$ ist auf diese Weise eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \rightarrow V$, mit der Funktionsgleichung $y = g(x)$, erfüllt die Gleichung

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

- b) g ist stetig differenzierbar, und es gilt für jedes $x \in U$:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}. \quad (164)$$

Die entscheidende Voraussetzung des Satzes ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Das wird auch deutlich, wenn wir uns die grobe Beweisidee ansehen.

Wenn wir die verkettete Funktion

$$f(x, y) \quad \text{mit} \quad y = g(x)$$

nach x differenzieren, erhalten wir mit der Kettenregel

$$f'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (165)$$

Unter der Voraussetzung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ können wir nun y' aus der Gleichung (165) bestimmen und erhalten

$$y' = g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Die Voraussetzung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ist auch entscheidend für den Nachweis von Behauptung a).

Beispiel 1:

Betrachten wir die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 1 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Für einen beliebigen x -Wert erhält man immer zwei y -Werte, und zwar $y = \sqrt{x^2 + 1}$ und $y = -\sqrt{x^2 + 1}$. Wendet man den Satz über implizite Funktionen an, stellt man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

fest, und damit die eindeutige Auflösbarkeit in Punkten (x, y) mit $y \neq 0$. In Punkten des Typs $(x, y) = (x, 0)$ mit $f(x, y) = 0$ kann man nicht eindeutig nach y auflösen.

Beispiel 2:

$$f(y, x) = y - C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0,$$

also unsere "implizite" Lösung einer DGL. Wir rechnen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2 \frac{x^2}{2y^3} C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

aus und haben mit

$$1 + 2 \frac{x^2}{2y^3} C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} \neq 0$$

eine Bedingung für die Auflösbarkeit nach y .

Satz 5.59. (Satz über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)

Durch $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ sei eine stetig differenzierbare Funktion von einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in \mathbb{R} beschrieben. Für einen Punkt $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ gelte

$$f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0.$$

Weiterhin sei

$$f_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0.$$

Dann folgt:

- a) Es gibt eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ um \mathbf{x}_0 und ein Intervall V um y_0 mit der Eigenschaft:
Zu jedem $\mathbf{x} \in U$ existiert genau ein $y \in V$ mit

$$f(\mathbf{x}, y) = 0.$$

Jedem $\mathbf{x} \in U$ ist auf diese Weise eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \rightarrow V$ mit der Funktionsgleichung $y = g(\mathbf{x})$ erfüllt die Gleichung

$$f(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U,$$

- b) g ist stetig differenzierbar, und es gilt für jedes $\mathbf{x} \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}. \quad (166)$$

5.13 Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen

Maxima und Minima von Funktionen mehrerer reeller Variabler lassen sich analog zum Fall der Funktion einer reellen Variablen mit Mitteln der Differentialrechnung im \mathbb{R}^n gewinnen.

Definition 5.60.

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ ein Punkt, zu dem es eine Umgebung U mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

gibt, so sagt man: f besitzt in \mathbf{x}_0 ein lokales Maximum.

Der Punkt \mathbf{x}_0 selbst heißt eine lokale Maximalstelle von f .

Steht " $<$ " statt " \leq ", wird \mathbf{x}_0 als echte lokale Maximalstelle von f bezeichnet.

Analog zur Definition des Maximums und der Maximalstelle werden Minimum und Minimalstelle (" \geq " bzw. " $>$ " statt " \leq " bzw. " $<$ ") definiert.

Maximal- und Minimalstellen nennen wir allgemein Extremalstellen oder -punkte.

Wir formulieren nun eine **notwendige** Bedingung für eine Extremalstelle.

Satz 5.61. (notwendige Bedingung)

Ist $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

d.h., sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden²¹.

Beweis.

Es sei $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$ Extremalstelle von f . Wir definieren die Funktion

$$g(x_k) := f(x_{10}, \dots, x_{k-10}, x_k, x_{k+10}, \dots, x_{n0}) \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

als Funktion einer Veränderlichen. Die Funktion g hat in x_{k0} natürlich ein Extremum, also folgt

$$0 = g'(x_{k0}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0),$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 5.62.

Der Satz 5.61 besagt, daß die Lösungen \mathbf{x}_0 des Gleichungssystems

$$f_{x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Kandidaten für Extremalstellen sind. Ob \mathbf{x}_0 tatsächlich Extremalstelle ist, kann man mit dem folgenden hinreichenden Kriterium überprüfen.

Satz 5.63. (hinreichende Bedingung)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, so folgt:

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist eine

- echte Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
- echte Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

²¹Mit \dot{D} sollen im folgenden die inneren Punkte von D bezeichnet werden.

Beweis.

Wir nehmen $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ für alle $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ an. Nach der Taylor-Formel gilt

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) ds,$$

und wegen $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) ds. \quad (167)$$

Aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitung gibt es eine Kugelumgebung $U \subset D$ von \mathbf{x}_0 mit

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x}_0 + s\mathbf{z} \in U, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, 0 < s < 1.$$

Wählt man \mathbf{z} dabei fest, dann nimmt $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z})$ für ein $s \in [0, 1]$ sein Minimum c an (weil $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z})$ eine stetige Funktion in s ist), also gilt

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) \geq c > 0 \quad \text{für alle } s \in [0, 1].$$

Damit erhält man aus (167)

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)c ds = \frac{c}{4} > 0,$$

also $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) > f(\mathbf{x}_0)$ für jedes $\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \in U$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. \mathbf{x}_0 ist damit eine echte Minimalstelle. Durch Übergang von f zu $-f$ erhält man die entsprechende Aussage für echte Maximalstellen. \square

Bemerkung 5.64.

Aus dem Satz von Taylor wissen wir, daß der Ausdruck $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0)$ mit Hilfe der Hesse-Matrix in der Form

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{z} \quad (168)$$

aufgeschrieben werden kann. Damit kann man die hinreichende Bedingung auch anders formulieren.

Satz 5.65. (*hinreichende Bedingung*)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, so folgt:

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist eine

- *echte Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,*
- *echte Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind,*

Beweis.

Für die Eigenwerte λ von $H_f(\mathbf{x}_0)$ gilt

$$H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

wobei \mathbf{x} Eigenvektoren sind. Die skalare Multiplikation von links mit \mathbf{x}^T ergibt

$$\mathbf{x}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2.$$

Sind die Eigenwerte alle kleiner als Null, so folgt aus der Negativität der linken Seite, daß eine Maximalstelle vorliegt. Bei der Positivität der Eigenwerte schlußfolgert man analog, daß eine Minimalstelle vorliegt. \square

Für eine reellwertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ kann man die hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle auch folgendermaßen formulieren.

Satz 5.66.

Ist die reellwertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^2$, so folgt:

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \dot{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (169)$$

und

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (170)$$

ist eine

- echte Maximalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ gilt,
- echte Minimalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ gilt.

Beweis.

Der Beweis des Satzes 5.66 ergibt sich aus der Auswertung der Forderung, daß die Eigenwerte der Hesse-Matrix von f alle positiv oder negativ sein müssen. Zur Bestimmung der EW der Hesse-Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

zu bestimmen, und man erhält

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(f_{xx} + f_{yy})^2}{4} - f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2} \\ &= \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(f_{xx} - f_{yy})^2}{4} + f_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Man überlegt sich nun, daß

$$\sqrt{\frac{(f_{xx} - f_{yy})^2}{4} + f_{xy}^2} > \left| \frac{f_{xx} - f_{yy}}{2} \right| \quad (171)$$

gilt. Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ist, muß aufgrund von (170) auch $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ gelten, und aus (171) folgt

$$\lambda_{1,2} < 0.$$

Ist andererseits $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, muß aufgrund von (170) auch $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ gelten, und damit ergibt sich mit (171)

$$\lambda_{1,2} > 0.$$

□

Bemerkung 5.67.

Hat $H_f(\mathbf{x}_0)$ positive und negative Eigenwerte und gilt $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, dann spricht man bei \mathbf{x}_0 von einem Sattelpunkt.

Beispiel:

Es sind die Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

zu berechnen. Die notwendige Bedingung $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0 \\ 2y + x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{8}{3}$. Zur Auswertung der hinreichenden Bedingung berechnen wir

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1,$$

und damit folgt aus $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$, daß der Punkt $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$ eine Minimalstelle ist.

5.14 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

Oft ist nach Extremwerten einer Funktion f gefragt, wobei noch Nebenbedingungen der Art

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{172}$$

erfüllt sein müssen. Allgemein kann man diese Problemstellung wie folgt formulieren.

Extremalproblem mit m Nebenbedingungen

Gegeben sind zwei stetig differenzierbare Abbildungen

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$.

Gesucht sind die Maximal- und Minimalstellen der Einschränkung $f|_M$ von f auf

$$M := \{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset D. \tag{173}$$

Eine Maximalstelle \mathbf{x}_0 von $f|_M$ ist dabei ein Punkt aus M , zu dem es eine Umgebung $U \subset D$ gibt mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap M.$$

Entsprechendes vereinbart man für Minimalstellen.

Eine Methode bzw. Kriterien zur Ermittlung von Extremalstellen einer Funktion f unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen liefert der folgende Satz.

Satz 5.68. (Lagrange-Multiplikatoren)

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildung $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$, wobei die Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m hat. Dann folgt:

Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, so existiert dazu eine Zeilenmatrix (Zeilenvektor) $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L} \mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \tag{174}$$

Die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ heißen dabei **Lagrangesche Multiplikatoren**.

Bemerkung 5.69.

Bei dem Kriterium handelt es sich um ein notwendiges Kriterium, d.h., eine Extremalstelle \mathbf{x}_0 von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist immer eine Lösung der Gleichungen

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L} \mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (175)$$

Mit den Komponentendarstellungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (176)$$

erhalten die Gleichungen (175) die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, n, \quad (177)$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots, m. \quad (178)$$

Es liegen damit $n + m$ reelle Gleichungen für die $n + m$ reellen Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ vor. Lösungen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ der Gleichungen (177) und (178) heißen **stationäre Punkte** von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Korollar 5.70. (*zweidimensionaler Fall der Lagrange-Multiplikatoren*)

Durch $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ werden zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ beschrieben. Dabei sei $\text{grad } h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Dann folgt:

Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $h(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \lambda \text{grad } h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (179)$$

mit einer reellen Zahl λ (Lagrange-Multiplikator).

Bemerkung 5.71. (Lagrange-Funktion)

Mit der Einführung der Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) \quad (180)$$

als Funktion mit $n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ ist die Problemstellung der Bestimmung von Extremalstellen von f unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $h(\mathbf{x}) = 0$ identisch mit der Bestimmung von Extremalstellen der Lagrange-Funktion L ohne Nebenbedingungen.

Beispiel:

Gesucht sind die Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x, y) = x^2 - y - 2 = 0.$$

Mit $\text{grad } f(x, y) = (2x, 6y)^T$ und $\text{grad } h(x, y) = (2x, -1)^T$ erhält man mit

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) + \lambda \text{grad } h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad h(\mathbf{x}) = 0$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x &= -\lambda 2x \\ 6y &= \lambda \\ y &= x^2 - 2. \end{aligned}$$

Fordert man $x \neq 0$, so folgt aus der ersten Gleichung $\lambda = -1$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich dann $y = -\frac{1}{6}$ und für x rechnet man $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$ aus.

Setzt man $x = 0$, so folgt aus der letzten Gleichung $y = -2$ und aus der zweiten Gleichung $\lambda = 12$.

Damit hat man durch Auswertung der notwendigen Bedingungen die Kandidaten

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right), \quad P_3 = (0, -2)$$

als Extremalstellen der Funktion f bei Berücksichtigung der Nebenbedingung $x^2 - y - 2 = 0$ ermittelt.

Man findet nun durch "Einsetzen" heraus, daß P_3 eine Maximalstelle ist und P_1, P_2 Minimalstellen sind.

Bemerkung 5.72.

In der Regel ist die Frage, ob stationäre Punkte Extremalstellen oder nichts dergleichen sind, im allgemeinen schwer zu beantworten. Hier hilft oft ingenieurmäßige Intuition oder numerische Rechnung. Eine Hilfe bei der Entscheidung liefert der Satz, daß jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Maximum und Minimum annimmt.

Bei kompakter Nebenbedingungsmenge

$$M = \{\mathbf{x} \in D \mid h(\mathbf{x}) = 0\}$$

hat man daher unter den Lösungen der Lagrange-Methode und den Randpunkten aus $M \cap \partial D$ diejenigen mit maximalen Funktionswert $f(\mathbf{x})$ herauszusuchen. Diese Punkte sind alle gesuchten Maximalstellen. Für Minimalstellen gilt Entsprechendes.

5.15 Ausgleichsrechnung

Es ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Einflußgrößen x_1, x_2, \dots, x_n und einer Größe y in der Form

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{181}$$

gesucht. Man weiß über die Abhängigkeit der Größe y von x_1, x_2, \dots, x_n , hat aber z.B. durch Meßreihen o.ä. nur die Matrix

$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ y_2 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ y_m & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{182}$$

gegeben, wobei eine Zeile etwa das Ergebnis einer von insgesamt m Messungen ist, also hat die Größe y bei der j -ten Messung den Wert y_j und die Einflußgrößen x_1, x_2, \dots, x_n die Werte

x_{j1}, \dots, x_{jn} . Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, kennt man nicht. Macht man für f einen Ansatz, z.B.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \quad (183)$$

kann man die Frage stellen, für welche r_0, r_1, \dots, r_n das Funktional

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_n) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn}))^2 \end{aligned} \quad (184)$$

minimal ist, um somit die "beste" Annäherung des funktionalen Zusammenhangs $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ auf der Grundlage der Meßreihe (182) zu erhalten. Diese Methode geht auf Gauss zurück und wird "Methode der kleinsten Quadrate" genannt. Bei der Aufgabe

$$F(r_0, r_1, \dots, r_n) = \text{Min!} \quad (185)$$

handelt es sich um ein Extremalproblem ohne Nebenbedingungen. Die notwendige Bedingung für Extremalpunkte lautet $\text{grad } F = \mathbf{0}$ und aufgrund des linearen Ansatzes (183) erhält man mit der notwendigen Bedingung ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A \mathbf{r} = \mathbf{b} \quad (186)$$

zur Bestimmung des Vektors $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$. Die Gleichung (186) nennt man die **Gauss-Normalgleichung** des linearen Ausgleichsproblems (185).

Für die Elemente der Koeffizientenmatrix A erhält man nach kurzer Rechnung

$$a_{ij} = m \sum_{k=1}^m x_{ki} x_{kj} - \sum_{k=1}^m x_{ki} \sum_{k=1}^m x_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad ,$$

und für die Komponenten der "rechten" Seite \mathbf{b} ergibt sich

$$b_i = m \sum_{k=1}^m x_{ki} y_k - \sum_{k=1}^m x_{ki} \sum_{k=1}^m y_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dabei wurde r_0 aus der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial r_0} = 0$ zu

$$r_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{i=1}^n \left[r_i \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ki} \right]$$

bestimmt und aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial r_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, eliminiert. Die eben beschriebene Methodik kann man im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 5.73. (lineares Ausgleichsproblem)

- (a) Das lineare Ausgleichsproblem (185) ist immer lösbar.
- (b) Die Lösungen von (185) und (186) stimmen immer überein.
- (c) Für zwei Lösungen \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 gilt stets $A \mathbf{r} = A \mathbf{r}_0$. Ist der Rang von A gleich n , so ist die Ausgleichslösung eindeutig.

(d) Ist die Zahl der Messungen m nicht größer als die Zahl der Einflußgrößen n , so ist die Matrix A immer singulär.

Bemerkung 5.74.

Wenn man statt dem Ansatz (183) mit einem Ansatz der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 + r_1\phi_1(x_1) + \dots + r_n\phi_n(x_n) \quad (187)$$

arbeitet, wobei ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ gegebene differenzierbare Funktionen sind, ist die oben beschriebene Methodik dem Prinzip nach ebenso anwendbar. Der Ansatz (187) führt zum Funktional

$$\begin{aligned} G(r_0, r_1, \dots, r_n) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1\phi_1(x_{k1}) + \dots + r_n\phi_n(x_{kn})))^2 \end{aligned} \quad (188)$$

und die Auswertung der notwendigen Bedingung

$$\text{grad } G = \mathbf{0}$$

führt zu einer Modifizierung der Matrix A .

Bemerkung 5.75. (logarithmisch lineares Ausgleichsproblem)

Macht man für die funktionale Beziehung $y = f(x_1, \dots, x_n)$ den Ansatz

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 \cdot x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n} \quad (189)$$

spricht man von einem logarithmisch linearen Ansatz. Durch Logarithmieren erhält man aus (189) die lineare Beziehung

$$\ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln r_0 + r_1 \ln x_1 + r_2 \ln x_2 + \dots + r_n \ln x_n$$

und kann die oben beschriebene Methode zur Berechnung der "besten" r_j verwenden. Denn man hat mit den Festlegungen $y' := \ln y$, $y'_k := \ln y_k$, $r'_0 := \ln r_0$ und $x'_j := \ln x_j$, $x'_{kj} := \ln x_{kj}$ für $k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ statt (182) die Ausgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} y'_1 & x'_{11} & \dots & x'_{1n} \\ y'_2 & x'_{21} & \dots & x'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_m & x'_{m1} & \dots & x'_{mn} \end{pmatrix} \quad (190)$$

zur Bestimmung der "besten" r'_0, r_1, \dots, r_n zur Näherung des funktionalen Zusammenhangs

$$y' = r'_0 + r_1 x'_1 + r_2 x'_2 + \dots + r_n x'_n$$

zu verarbeiten.

5.16 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, Newton-Verfahren

In der HM I-Vorlesung wurde das Newton-Verfahren für die Nullstellenbestimmung einer reellwertigen Funktion einer Veränderlichen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ behandelt.

Hier soll nun kurz das Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n besprochen werden. Es ist ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{191}$$

zu lösen. Mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ und $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ kann man (191) kürzer in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{192}$$

aufschreiben. Dabei sei $D \subset \mathbb{R}^n$ der Definitionsbereich von \mathbf{f} , einer Abbildung von D in den \mathbb{R}^n . \mathbf{f} wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Gesucht sind Punkte $\mathbf{x} \in D$, die die Gleichung (192) erfüllen. Solche \mathbf{x} nennen wir Lösung der Gleichung (192).

Liegt $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ in der Nähe einer Lösung \mathbf{x} von $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, so bildet man die Tangentenabbildung von \mathbf{f} in \mathbf{x}_0

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D,$$

und löst anstelle von $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ die Gleichung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, d.h., man sucht eine Lösung der Gleichung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Es handelt sich dabei um ein **lineares** Gleichungssystem, für das uns Lösungsmethoden bekannt sind. Hat man \mathbf{x}_1 bestimmt, führt man ausgehend von \mathbf{x}_1 den gleichen Rechenschritt aus und sucht ein \mathbf{x}_2 als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}.$$

Allgemein kann man unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{x}_k \in \dot{D}$ ist, \mathbf{x}_{k+1} aus der Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$$

bestimmen und erhält nach Multiplikation der Gleichung mit $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1}$ bei einem gegebenen \mathbf{x}_0 das Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &\quad \text{gegeben,} \\ \mathbf{x}_{k+1} &:= \mathbf{x}_k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{193}$$

Damit ist die vollständige Analogie zum Newton-Verfahren bei einer reellen Unbekannten gegeben.

Wir fassen den Algorithmus des Newton-Verfahrens zusammen:

Es sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar gegeben. Zur Lösung der Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ führt man die folgenden Schritte durch.

(I) Man wählt einen Anfangswert $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$.

(II) Man berechnet $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$ indem man nacheinander für $k = 0, 1, 2, \dots$ das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{z}_{k+1} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tag{194}$$

nach \mathbf{z}_{k+1} auflöst und $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_{k+1}$ bildet. Dabei wird $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ als regulär und $\mathbf{x}_k \in \dot{D}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ vorausgesetzt.

(III) Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die \mathbf{x}_k sich innerhalb eines Rechenschrittes nicht mehr verändern oder eine vorgegebene maximale Iterationszahl erreicht ist.

Satz 5.76. (Konvergenzaussage zum Newton-Verfahren)

$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sei zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\bar{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{D}$. Weiterhin sei $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ regulär. Dann folgt:

Es gibt eine Umgebung U von $\bar{\mathbf{x}}$, so daß die Newton-Folge $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$ von einem beliebigen $\mathbf{x}_0 \in U$ ausgehend, gegen die Nullstelle $\bar{\mathbf{x}}$ konvergiert.

Die Konvergenz ist quadratisch, d.h., es gilt für alle $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \leq C \|\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \text{mit einem } C > 0.$$

Eine einfache Fehlerabschätzung²² lautet

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| \sup_{\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}} \|[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}\|.$$

²²Wenn $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$ -Matrix ist, verabreden wir für den "Betrag" bzw. die Norm der Matrix $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$.

Einige wichtige Formeln

1.) Wichtige Ableitungen

Funktion	Ableitung	Bemerkung	Funktion	Ableitung	Bemerkung
C (Konstante)	0		$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch x$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α reell	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sh x$	
$\ln x $	$\frac{1}{x}$		$\tanh x$	$\frac{1}{ch^2 x}$	
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\coth x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	
e^x	e^x		$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ x < 1$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ x < 1$
$\sin x$	$\cos x$		$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$
$\cos x$	$-\sin x$		$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$	$ x > 1$
$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$	$\operatorname{arc} \cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\operatorname{arc} \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{arc} \cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

2.) Einige Substitutionen (R bezeichnet rationale Funktion, m, n, k natürliche Zahlen)

Integral	Substitution
$\int R(\sinh x, \cosh x, e^x) dx$	$t = e^x$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \tan \frac{x}{2} \quad (dx = \frac{2}{1+t^2} dt)$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$	$t = \tan x$
$\int R(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$
$\int R(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx$	$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0 \quad t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sin t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sinh t$
$\int R(x, \sqrt{(x + \beta)^2 - \alpha^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \cosh t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}) dx$	$\alpha > 0, t = \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} + x\sqrt{\alpha}$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{x}, (r \text{ kgV der Nenner von } m \text{ und } n)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\alpha + \beta x^n} \quad (q \text{ Nenner von } k)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} + k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\frac{\alpha + \beta x^n}{x^n}} \quad (q \text{ Nenner von } k)$

3.) Einige unbestimmte Integrale

Integral	eine Stammfunktion
$\int \sin^n(\alpha x) dx$	$= -\frac{\sin^{n-1}(\alpha x) \cos(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \cos^n(\alpha x) dx$	$= \frac{\cos^{n-1}(\alpha x) \sin(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx$	$= \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctan}\left(\frac{x+b}{\sqrt{D}}\right), \quad D = c - b^2 > 0$
$\int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{x+b}{2(n-1)D(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)D} \int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{(x+\beta)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2\beta-2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$

4.) Identitäten für trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \cos x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \tan x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - (\tan \frac{x}{2})^2} & \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{2 \tan \frac{x}{2}} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

5.) Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu, \quad \binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Index

- Abbildung 90
- Abstand 88
- Anfangswertproblem, AWP 22
- Ansatz nach der Art der rechten Seite 40
- Betrag 88
- Binormalenvektor 94
- Bogenlänge, Bogenelement 93
- Cauchy-Kriterium für Reihen 59
- Cauchy-Produkt 61,70
- Diagonalisierung 81
- Differentialgleichung, gewöhnliche 21
- Differentialgleichung, lineare 27
- Differentiation von Parameterintegralen 6
- Dreibein, begleitendes 94
- Eigenraum 79
- Eigenvektor, EV 77
- Eigenvektorbasis 82
- Eigenwert, EW 77
- Eigenwerte symmetrischer Matrizen 81
- Euler-Verfahren 48
- Extremalstellen 113
- Folge, Grenzwert einer 89
- Folge 89
- Fundamentalsystem von Lösungen 29
- Funktion 90
- Häufungspunkt einer Menge 88
- Hauptachsentransformation 82
- Hauptnormalenvektor 94
- Hesse-Matrix 101
- hinreichende Extremal-Bedingung 113ff
- innerer Punkt 88
- Integralkriterium 63
- Jacobi-Matrix 101
- Kettenregel 103
- Konvergenz, gleichmäßige 65
- Konvergenz, punktweise 64
- Konvergenzradius 68
- Koordinatensystem 83
- Krümmungsvektor 94
- Krümmung 94
- Kurve 91
- Lagrange-Funktion 117
- Lagrange-Interpolation 16
- Lagrange-Multiplikatoren 116
- Leibniz-Kriterium 59
- lineare Approximation 104
- lineares Ausgleichsproblem 119
- logarithmisch-lineares Ausgleichsproblem 120
- Mantelfläche eines Rotationskörpers 5
- Menge, abgeschlossene 88
- Menge, offene 88
- Methode der Trennung der Variablen 24
- Methode der Variation der Konstanten 30,38
- Methode der kleinsten Quadrate 119
- Monotoniekriterium für Reihen 59
- Newton-Interpolation 17
- Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n 121
- notwendige Extremal-Bedingung 113
- partielle Ableitung 98
- partielle Differenzierbarkeit 98
- Polygonzugmethode, verbesserte 52
- Polygonzugmethode 49
- Polynom, charakteristisches 78
- quadratische Form 82
- Quotientenkriterium 62
- Randpunkt einer Menge 88
- Randwertproblem, RWP 22
- Reduktion der Ordnung einer DGL 35
- Reihe, geometrische 58
- Reihe, harmonische 58
- Resonanz 41
- Resonanz 41
- Richtungsableitung 104
- Richtungsfeld einer DGL 22
- Rotationskörper 4
- Runge-Kutta-Verfahren 54
- Satz über implizite Funktionen 111ff
- Satz von Schwarz 100
- Simpson-Formel 13
- Skalarfeld 91
- spline-Interpolation 18
- Stetigkeit von Abbildungen 96
- Tangentenebene 105
- Tangentenvektor einer Kurve 93
- Taylor-Reihe 72
- Taylorformel im \mathbb{R}^n 108
- Taylorpolynom p -ten Grades 109
- Taylorpolynom 2. Grades 110
- Torsionsvektor 95
- Torsion 95
- totales Differential 106
- Trapez-Methode 53
- Trapezregel 13
- Umgebung, abgeschlossene 88

Umgebung, offene 88
uneigentliches Integral 8
Vektorfeld 91
Vergleichskriterium, Majorantenkriterium 61
Vielfachheit, algebraische 79
Vielfachheit, geometrische 79
Volumen eines Rotationskörpers 4
Wronski-Determinante 29,33
Wurzelkriterium 62

Literatur

- [1] Meyberg, Vachenauer
Höhere Mathematik in 2 Bänden,
Springer-Verlag
- [2] Burg, Haf, Wille
Höhere Mathematik für Ingenieure in 5 Bänden,
Teubner-Verlag Stuttgart
- [3] Vorlesungen zur Höheren Mathematik für Ingenieure am Fachbereich Mathematik der TU
Berlin von H. Bausch, K. Kutzler, B. Herz und D. Krüger
- [4] Jeffrey
Mathematik für Ing. und Naturwissenschaftler in 2 Bänden,
Verlag Chemie
- [5] Bronstein, Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik,
Teubner-Verlag
- [6] Wüst
Höhere Mathematik für Physiker in 2 Bänden,
Verlag W. de Gruyter
- [7] Merziger, Wirth
Repetitorium der Höheren Mathematik,
Binomi-Verlag