

Höhere Mathematik für Ingenieure III  
Script zur Vorlesung an der TU Berlin im  
SS 99

Günter Bärowolf <sup>1</sup>

April 99 - Juli 99, ergänzt und überarbeitet im WS 99/00

<sup>1</sup>Technische Universität Berlin, email:baerwolf@math.tu-berlin.de



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
1.1	Eigenschaften von Punktfolgen aus dem $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
1.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	8
1.3	Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
1.4	Stetigkeit von Abbildungen . . . . .	13
1.5	Partielle Ableitung einer Funktion . . . . .	15
1.6	Ableitungsmatrix und Hesse-Matrix . . . . .	18
1.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen . . . . .	19
1.8	Differenzierbarkeitsregeln und die Richtungsableitung . . . . .	20
1.9	Lineare Approximation . . . . .	22
1.10	Totales Differential . . . . .	23
1.11	Taylorformel und Mittelwertsatz . . . . .	24
1.11.1	Taylorformel im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
1.11.2	Taylorpolynom 2. Grades . . . . .	27
1.12	Satz über implizite Funktionen . . . . .	27
1.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen . . . . .	30
1.14	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .	33
1.15	Ausgleichsrechnung . . . . .	35
1.16	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, Newton-Verfahren . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Grundlegende Elemente der Vektoranalysis</b>	<b>40</b>
2.1	Motivation . . . . .	40
2.2	Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis . . . . .	40
2.3	Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis . . . . .	43
2.4	Einige hilfreiche formale Berechnungsregeln . . . . .	45
2.5	Die Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	46
2.6	Eine Grundfrage der Vektoranalysis . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Skalare Kurvenintegrale und Gradientenfelder</b>	<b>47</b>
3.1	Kurvenintegral einer Funktion . . . . .	48
3.2	Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve . . . . .	50
3.3	Stammfunktion eines Gradientenfeldes . . . . .	53
3.4	Berechnungsmethoden für Stammfunktionen . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Integration ebener Bereiche und Oberflächen</b>	<b>59</b>
4.1	Flächeninhalt ebener Bereiche . . . . .	59
4.2	Riemannsches Doppelintegral . . . . .	61
4.3	Normalbereiche und die konkrete Doppelintegralberechnung . . . . .	64
4.4	Satz von Green . . . . .	66
4.5	Transformationsformel für Doppelintegrale . . . . .	68
4.6	Integration über Flächen . . . . .	71
4.6.1	Oberfläche eines regulären Flächenstücks . . . . .	73
4.6.2	Oberflächenintegral einer Funktion . . . . .	76
4.6.3	Oberflächenintegral eines Vektorfeldes . . . . .	78
4.6.4	Zirkulation, Wirbelstärke . . . . .	79
4.7	Satz von Stokes . . . . .	81

<b>5</b>	<b>Volumenberechnung und Dreifachintegrale</b>	<b>83</b>
5.1	Volumen räumlicher Bereiche . . . . .	83
5.2	Riemannsches Dreifachintegral . . . . .	85
5.3	Normalbereiche und die konkrete Dreifachintegralberechnung . . . . .	88
5.4	Transformationsformel für Dreifachintegrale . . . . .	91
5.5	Satz von Gauss . . . . .	94
5.6	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung mit dem Satz von Gauss . . . . .	97
5.7	Nutzung des Satzes von Gauss zur Konstruktion numerischer Lösungsverfahren . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>101</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	101
6.2	Was ist eine partielle Differentialgleichung? . . . . .	101
6.3	Beispiele . . . . .	102
6.4	Korrektheit von Problemstellungen der mathematischen Physik und des Ingenieurwesens . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>105</b>
7.1	Periodische Funktionen . . . . .	105
7.2	Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten . . . . .	105
7.3	Komplexe Schreibweise von Fourier-Reihen . . . . .	112
7.4	Fourier-Reihen komplexwertiger Funktionen . . . . .	114
7.5	Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit der Fourierschen Methode . . . . .	116
7.6	Diskrete Fourieranalyse * . . . . .	120
<b>8</b>	<b>Integraltransformationen</b>	<b>126</b>
8.1	Fouriertransformation . . . . .	127
8.1.1	Umkehrung der Fouriertransformation . . . . .	131
8.1.2	Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	131
8.1.3	Anwendung der Fouriertransformation auf partielle Differentialgleichungen . . . . .	133
8.2	Laplacetransformation . . . . .	135
8.2.1	Definition der Laplacetransformation . . . . .	136
8.2.2	Inverse Laplacetransformation . . . . .	137
8.2.3	Rechenregeln der Laplacetransformation . . . . .	139
8.2.4	Praktische Arbeit mit der Laplace-Transformation und der Rücktransformation . . . . .	143
<b>9</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>147</b>
9.1	Einige mathematische Grundlagen . . . . .	147
9.2	Abbildungen und Funktionale auf Banachräumen und Variationsprobleme . . . . .	151
9.3	Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten . . . . .	154
9.4	Klassische Variationsrechnung . . . . .	157
9.5	Einige Variationsaufgaben . . . . .	158
9.5.1	Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten . . . . .	158
9.5.2	Das Fermat-Prinzip . . . . .	158
9.5.3	Kubische Splines als Ergebnis einer Variationsaufgabe . . . . .	159
9.6	Natürliche Randbedingungen, Transversalität . . . . .	161

## 0 Vorbemerkungen

Schwerpunkt der HM III für Ingenieure ist die Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Partielle Ableitungen, Mehrfachintegrale, Kurven-, Oberflächen- und Volumenintegrale begegnen dem Ingenieur und dem Ingenieurstudenten i.d.R. während seiner gesamten Laufbahn.

Ob bei den partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, bei Energie- oder Massenbilanzen, den Maxwellchen Gleichungen, um nur einige Beispiele zu nennen, wird das Instrumentarium der Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ständig benötigt.

Beginnen werde ich die Vorlesung mit einem Nachschlag zur HM I bzw. HM II, nämlich einmal den komplexen Zahlen und Eigenschaften von Polynomen, insbesondere Aussagen zu den Nullstellen und deren Bestimmung, und zweitens einem kurzen Abriss der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Beide Themen wurden in den vergangenen beiden Semestern der HM I und HM II nur sehr kurz gestrifen, so daß möglicherweise wichtige Grundlagen zum Verständnis der Themen fehlen, die gewöhnlichen Differentialgleichungen aber von solcher Wichtigkeit sind, daß man nicht sie nicht ignorieren kann.

Ausgangspunkt für die Vorlesung HM III für Ingenieure war wie bei der HM I und HM II die Frage, womit der Ingenieur in seiner Arbeit konfrontiert wird. Es entstehen mathematische Aufgaben u.a. bei

- der mathematischen Modellierung von technischen Prozessen (z.B. chemische Reaktionen, Rad-Schiene-Systeme, Dampferzeuger),
- der Optimierung von Prozessabläufen,
- der Beschreibung von natürlichen Phänomenen wie Klima, Umwelt, aber auch z.B. der Bevölkerungsentwicklung (Populationsdynamik) und
- der Experimentauswertung.

Die genannten Aufgabenstellungen bedeuten konkret

- die Lösung von Differentialgleichungen,
- die Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen,
- die Auswertung von Integralen,
- die Bestimmung von Extremalstellen von Funktionen,
- die Interpolation von Meßwerten und
- die näherungsweise Beschreibung von nichtlinearen Zusammenhängen durch lineare oder polynomiale Beziehungen,

womit gleichzeitig die Thematik der HM III-Vorlesung grob umrissen ist. Die Themenabfolge und die Themenwahl richtete sich nach den in den letzten 3 Jahren gehaltenen "Höhere Mathematik für Ingenieure"-Veranstaltungen [3] meiner Kollegen.

Dieses Skript kann und will nicht die Standard-Lehrbücher der "Höheren Mathematik für Ingenieure" [1], [4], [6], [5] oder [7] ersetzen, soll aber die mathematischen Themen incl. der grundlegenden Axiome und Definitionen geschlossen, wenn auch weitestgehend ohne sophistische Beweise, darstellen. Aus diesem Grund werden im Skript auch Themen angesprochen, für die in der Vorlesung kein Raum bleibt, die aber hinsichtlich einer halbwegs geschlossenen Darstellung interessant sind. Da diese Themen bei Klausuren und Prüfungen von Ingenieurstudenten

nicht gefragt sind, werden die entsprechenden Abschnitte mit einem \* versehen, d.h. sie können, müssen aber nicht gelesen werden.

Da das Skript immer unter Zeitdruck geschrieben wurde, sind Fehler (hoffentlich nicht zu viele) nicht zu vermeiden.

## 1 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Der  $\mathbb{R}^n$  ist uns als  $n$ -dimensionaler Vektorraum aus der HM I bekannt. Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$  befaßt sich vorwiegend mit Eigenschaften von Abbildungen oder Funktionen, deren Definitionsbereich  $D$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist, und deren Wertebereich  $W$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  ist. Dabei ist der Fall  $n = m = 1$  als Spezialfall eingeschlossen. I.allg. ist jedoch entweder  $n$  oder  $m$  eine natürliche Zahl größer als 1.

Ein Beispiel für eine reellwertige Funktion zweier Veränderlicher ist die Zustandfunktion idealer Gase

$$p(V, T) = R \cdot VT \quad p : D \rightarrow \mathbb{R}^1, D \subset \mathbb{R}^2,$$

also ein Gesetz zur Berechnung des Druckes in Abhängigkeit von dem Volumen und der Temperatur. In diesem Fall ist  $n = 2$  und  $m = 1$ . Für den  $\mathbb{R}^1$  schreibt man normalerweise abkürzend  $\mathbb{R}$ .

Bevor Abbildungen untersucht werden, ist es erforderlich einige wichtige Eigenschaften von Mengen aus dem  $\mathbb{R}^n$  zu behandeln.

### 1.1 Eigenschaften von Punktmenge aus dem $\mathbb{R}^n$

Aus dem  $\mathbb{R}$  kennen wir die Begriffe "absoluter" Betrag  $|x|$  oder  $|x - y|$  als Abstand der reellen Zahlen  $x$  und  $y$  auf der reellen Zahlengeraden. Diese Begriffe sollen nun für Elemente des  $\mathbb{R}^n$  erklärt werden. Zuerst verständigen wir uns darauf, daß wir ein Element  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in der Koordinatenform

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

darstellen, also als Spaltenvektor der Koordinaten, wobei  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  die kanonische Basis des  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Definition 1.1.** (Betrag, Abstand)

Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dann definieren wir den Betrag oder die Länge von  $\mathbf{x}$  als

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1)$$

Als Abstand oder Differenz  $d$  der Elemente  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

also den Betrag des Differenzvektors.  $d$  ist der euklidische Abstand und bedeutet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$ , die kürzeste Verbindung der Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

**Definition 1.2.** (Umgebungen)

Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

bezeichnen wir als offene Kugelumgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0$  mit dem Radius  $r$ .

Die Menge

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

bezeichnen wir als abgeschlossene Kugelumgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0$  mit dem Radius  $r$ .

Hinweis:

Im  $\mathbb{R}$  ist eine offene Kugelumgebung einer reellen Zahl  $x_0$  genau das offene Intervall  $(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2})$ ,

im  $\mathbb{R}^2$  ist eine offene Kugelumgebung eines Elements (Punktes)  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  genau die offene Kreisscheibe

$$K_{x_0, r} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2 \right\}.$$

**Definition 1.3.** (offene Menge, innerer Punkt)

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, wenn zu jedem Element  $\mathbf{x} \in M$  eine Umgebung  $K_{x, r}$  gefunden werden kann, die in der Menge  $M$  liegt, also  $K_{x, r} \subset M$ .

Ein Punkt  $\mathbf{x} \in M$  heißt innerer Punkt der Menge  $M$ , wenn eine Umgebung  $K_{x, r}$  existiert, die ganz in der Menge  $M$  liegt.

Die Menge aller inneren Punkte der Menge  $M$  bezeichnen wir mit  $\overset{\circ}{M}$ .

**Definition 1.4.** (Häufungspunkt)

Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt Häufungspunkt der Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , wenn in jeder Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0$ , also in  $K_{x_0, r}$ ,  $r > 0$ , beliebig, ein Punkt der Menge  $M$  liegt. Das bedeutet

$$M \cap K_{x_0, r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

**Definition 1.5.** (Randpunkt)

Ein Punkt  $\mathbf{x}_r$  heißt Randpunkt der Menge  $M$ , wenn in jeder Umgebung  $K_{x, r}$  sowohl mindestens ein Punkt der Menge  $M$  liegt als auch ein Punkt des  $\mathbb{R}^n$ , der nicht in der Menge  $M$  liegt.

Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit  $\partial M$ .

**Definition 1.6.** (abgeschlossene Menge)

Eine Menge  $M$  heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

**Definition 1.7.** (beschränkte Menge, kompakte Menge)

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß

$$\|\mathbf{x}\| \leq C, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M$$

gilt. Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Definition 1.8.** (zusammenhängende Menge)

Die Verbindungsstrecke  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  der Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  aus der Menge  $M$  ist durch

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}), s \in [0, 1]\}$$

definiert. Mit

$$[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] = \bigcup_{j=1}^p [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p$  jeweils durch Strecken verbindet. Eine Menge  $M$  heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  durch einen Polygonzug verbunden werden können, so daß alle Punkte des Polygonzuges zur Menge  $M$  gehören.



**Definition 1.9.** (Folge im  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl  $k$  genau ein Element  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im  $\mathbb{R}^n$  und bezeichnen sie durch

$$(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{bzw. abkürzend durch} \quad (\mathbf{a}_k).$$

**Definition 1.10.** (Grenzwert einer Folge im  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $(\mathbf{a}_k)$  eine Folge im  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt Grenzwert von  $(\mathbf{a}_k)$  wenn für jede Zahl  $\epsilon > 0$  ein Index  $k_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so daß

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0\| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

gilt. Wir schreiben dafür

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder} \quad \mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}_0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Beispiel 1:

Die Menge  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 5 \right\}$  ist eine abgeschlossene Menge im  $\mathbb{R}^2$ . Außerdem stellt man fest, daß für alle Elemente von  $M$

$$\|\mathbf{x}\| < 18$$

gilt. Damit ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen, also **kompakt**.

Beispiel 2:

Die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1, a, b, c \text{ positive reelle Zahlen} \right\}$$

ist eine offene Menge im  $\mathbb{R}^3$ . Sie ist außerdem beschränkt. Geben Sie als Übung eine Schranke  $C$  an.

Beispiel 3:

Wir betrachten die Folge  $(\mathbf{a}_k)$  mit  $\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{k} \\ \frac{k^2}{3k^2+5k} \end{pmatrix}$ . Als Grenzwert errechnet man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Berechnung nutzen wir eine nützliche Eigenschaft aus, die wir im folgenden Satz fixieren.

**Satz 1.11.**

*Der Grenzwert einer Folge im  $\mathbb{R}^n$  existiert dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert gilt dann*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{1k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher

In der HM I haben wir uns mit der Differential- und Integralrechnung von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen befaßt. Jetzt wollen wir den Funktionsbegriff verallgemeinern.

**Definition 1.12.** (Abbildung)

Unter einer Abbildung

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem  $\mathbf{x} \in D$  genau ein Element  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  zuordnet, wobei wir die Schreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

verwenden.

$D$  heißt Definitionsbereich der Abbildung  $\mathbf{f}$ .

$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$  heißt Wertebereich der Abbildung  $\mathbf{f}$ .

Beispiele<sup>1</sup>:

1)

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}.$$

2)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

*Bemerkung 1.13.* (Spezialfälle von Abbildungen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , eine Abbildung.

- Ist  $m = 1$ , bezeichnet man die Abbildung  $f$  auch als Skalarfeld oder Funktion.
- Ist  $m > 1$ , bezeichnet man die Abbildung  $\mathbf{f}$  auch als Vektorfeld.
- Ist  $n = 1$ , bezeichnet man die Abbildung  $\mathbf{f}$  auch als Kurve<sup>2</sup>, wobei  $D$  ein abgeschlossenes Intervall aus dem  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  sein soll.

*Bemerkung 1.14.* (Abbildungen im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ )

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  ordnet jedem Punkt der  $x - y$ -Ebene einen Wert  $z$  zu, so daß der Graph

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y)^T \in D\}$$

der Funktion eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ergibt.

Bei Abbildungen mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$ , verwenden wir verabredungsgemäß statt  $x_1, x_2, x_3$  auch  $x, y, z$ .

<sup>1</sup>Wir verabreden, daß vektorwertige Abbildungen ( $m > 1$ ) mit dem Schrifttyp "bold" (fett) bezeichnet werden, und reellwertige Abbildungen ( $m = 1$ ) mit normalem Schrifttyp gekennzeichnet werden.

<sup>2</sup>Die präzise Definition einer Kurve (auch Raumkurve genannt) erfordert noch Differenzierbarkeitseigenschaften, die noch formuliert werden.

### 1.3 Kurven im $\mathbb{R}^n$

In der Bemerkung 1.13 wurde unter c) der Fall einer Abbildung  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $D = I$  abgeschlossenes Intervall, hervorgehoben, und  $\mathbf{f}$  als Kurve bezeichnet. Kurven kennen wir bereits aus der HM I. Wir haben solche Begriffe wie Bogenlänge und Bogenelement schon für Kurven im  $\mathbb{R}^2$  erklärt, so daß viele der folgenden Begriffe einfache Verallgemeinerungen darstellen werden. Wir wollen im folgenden Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^1$  in den  $\mathbb{R}^n$  mit dem griechischen Buchstaben  $\gamma$  bezeichnen.

Eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat als Ergebnis einen Vektor aus dem  $\mathbb{R}^n$  und wir verwenden die Schreibweise

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

*Bemerkung 1.15.*

Wenn wir von der Stetigkeit einer Kurve sprechen, oder von der Differenzierbarkeit, dann bedeutet dies, daß die Koeffizientenfunktionen  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , die entsprechenden Eigenschaften haben müssen.

Differenzierbarkeit auf einem abgeschlossenen Intervall bedeutet die Differenzierbarkeit im Intervallinneren und die links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit an den Intervallgrenzen.

**Definition 1.16.** (Kurve, Kurvenstück)

Eine stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Kurvenstück.

Unter einer Kurve  $\gamma$  verstehen wir eine endliche Anzahl von Kurvenstücken  $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, k$ , die miteinander verbunden sind, also für die

$$\gamma_{j+1}(t_j) = \gamma_j(t_j), \quad j = 1, \dots, k-1,$$

gilt.

Man verwendet auch die Bezeichnung

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k],$$

und spricht bei  $\gamma : [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von einer stückweise glatten Kurve.

D.h., an den Nahtstellen der Kurvenstücke sind "Ecken" bzw. Nichtdifferenzierbarkeitsstellen erlaubt.

**Satz 1.17.** (Ableitungsregeln)

Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbare Abbildungen (komponentenweise zu verstehen), und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann gelten die Regeln

(a) Linearität

$$\frac{d}{dt}(\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t)$$

(b) Produktregel für das Skalarprodukt

$$\frac{d}{dt}[\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)] = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t)$$

(c) Produktregel für das Vektorprodukt ( $n = 3$ )

$$\frac{d}{dt}[\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)] = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t)$$

(d) Produktregel für Multiplikation mit einer skalaren Funktion  $\alpha$

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t)\gamma_1(t)] = \dot{\alpha}(t)\gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t)$$

Als Beispiel einer Kurve im  $\mathbb{R}^3$  soll die Schraubenlinie  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, T]$$

genannt werden.

**Definition 1.18.** (reguläre Kurve)

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Unter  $\dot{\gamma}(t)$  versteht man den Vektor der Ableitungen der Komponentenfunktionen von  $\gamma$ , also

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma$  heißt reguläre Kurve, wenn

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [t_a, t_e]$$

gilt.

**Definition 1.19.** (Bogenlänge)

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

bezeichnen wir als **Bogenlänge** des Kurvenstücks über  $[t_a, t]$ .

*Bemerkung 1.20.*

Es ergibt sich

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad . \quad (2)$$

mit

$$ds := \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

bezeichnet man das (skalare) Bogenelement.

**Definition 1.21.** (Tangentenvektor)

Sei  $\gamma$  eine reguläre Kurve. Mit

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

bezeichnet man den Tangentenvektor der Kurve  $\gamma$  zum "Zeitpunkt"  $t$ .

Die Gleichung der Kurventangente in  $\gamma(t_0)$  lautet

$$\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

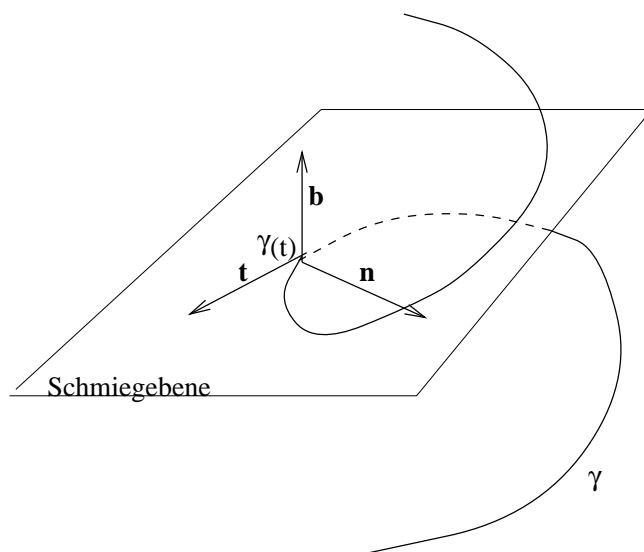


Abbildung 1: begleitendes Dreibein und Schmiegebene

**Definition 1.22.** (Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor)

Ist die Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  zweimal (komponentenweise) stetig differenzierbar, regulär und gilt  $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq \mathbf{0}$ , so nennt man die zu  $\mathbf{t}$  orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|} \quad \text{Hauptnormalenvektor} \quad (3)$$

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{Binormalenvektor} \quad (4)$$

und das Rechtssystem<sup>3</sup>  $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$  das **begleitende Dreibein** der Kurve an der Parameterstelle  $t$ .

Die von  $\mathbf{t}(t)$  und  $\mathbf{n}(t)$  aufgespannte Ebene durch  $\gamma(t)$

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

nennt man **Schmiegebene** der Kurve an der Stelle  $t$  (s. auch Abb. 1).

Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)],$$

also die Änderung des Tangentenvektors entlang eines Wegstückes beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve im Parameterintervall  $[t, t_1]$ . Mit der l'Hospital-Regel erhält man die

**Definition 1.23.** (Krümmungsvektor, Krümmung)

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{t}}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s}$$

<sup>3</sup>Ein System dreier linear unabhängiger Vektoren  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  heißt Rechtssystem, wenn für das Spatprodukt  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$  gilt.

heißt Krümmungsvektor. Die Länge des Krümmungsvektors ergibt sich zu

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} \|\dot{\mathbf{t}}(t)\| = \frac{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \quad (5)$$

und bezeichnet die Krümmung der Kurve an der Stelle  $t$ .

*Bemerkung 1.24.*

Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\gamma}(t)$  und Beschleunigungsvektor  $\ddot{\gamma}(t)$  lassen sich im begleitenden Dreibein  $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$  unter Nutzung der Beziehung (2) auch in der Form

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{s}(t)\mathbf{t}(t) , \quad (6)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(t) + \dot{s}(t)^2\kappa(t)\mathbf{n}(t) \quad (7)$$

darstellen. Mit  $\mathbf{t}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t)$  ergeben (6,7)

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \dot{s}(t)^3\kappa(t)\mathbf{b}(t)$$

$\ddot{\gamma}$









**Definition 1.34.** (partielle Ableitung)

Sei die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $D$  eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} \end{aligned}$$

dann ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  partiell differenzierbar und durch den Grenzwert ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  definiert.

$f$  ist partiell differenzierbar auf  $A \subset D$ ,  $A$  offen, wenn  $f$  in allen Punkten  $\mathbf{x} \in A$  partiell differenzierbar ist.

$f$  ist partiell differenzierbar, wenn  $f$  auf  $D$  partiell differenzierbar ist.

Für die partielle Ableitung nach  $x_j$  wird auch die Bezeichnung  $f_{x_j}$  verwendet.

**Definition 1.35.** (partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $D$  eine offene Menge ist, gegeben.  $f$  ist heißt partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

**Definition 1.36.** (stetige partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $D$  eine offene Menge ist, gegeben.  $f$  ist stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.

*Bemerkung 1.37.* (Differentiationstechnik)

Es ist selbstverständlich möglich, partielle Ableitungen gemäß Definition über die Berechnung des entsprechenden Grenzwertes zu berechnen.

Meistens geht es aber auch einfacher. Zur praktischen Berechnung der partiellen Ableitung einer Funktion  $f$  nach  $x_j$  werden die Veränderlichen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n, i \neq j$ , also alle Veränderlichen außer  $x_j$ , als Parameter behandelt und unter Anwendung der bekannten Differenzierbarkeitsregeln die Ableitung nach  $x_j$  gebildet.

Beispiele:

1) Gegeben ist die Funktion  $f(x, y, z) = x \sin x \cos(yz)$ . Für die partiellen Ableitungen nach  $x, y, z$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} &= \sin x \cos(yz) + x \cos x \cos(yz), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} &= -x \sin x \sin(yz)z, \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} &= -x \sin x \sin(yz)y. \end{aligned}$$

2)  $f(x, y, z) = x^2 \ln x + yz + yx$ ,  $x > 0$ .

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} = 2x \ln x + x + y, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} = z + x, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} = y.$$

Wenn alle partiellen Ableitungen einer Funktion  $f$  existieren, kann man den Gradienten der Funktion bilden. Er ist wie folgt definiert:

**Definition 1.38.** (Gradient einer Funktion)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen, partiell differenzierbar. Dann nennt man

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

den Gradienten der Funktion  $f$ .

Die Abbildung  $\operatorname{grad} f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine vektorwertige Abbildung, d.h., jedem  $\mathbf{x} \in D$  wird mit  $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$  ein Vektor aus dem  $\mathbb{R}^n$  zugeordnet.

Wir merken an, daß die partielle Ableitung einer Funktion  $f$  wiederum eine Funktion ist, und zwar

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R},$$

also kann man  $g(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$  evtl. wieder partiell differenzieren. Wenn  $g$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar ist, dann existieren "höhere" partielle Ableitungen von  $f$ .

**Definition 1.39.** (höhere partielle Ableitungen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen, partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, nennt man

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_j$  und  $x_i$ . Existieren alle 2. Ableitungen, also für  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , nennt man  $f$  2-mal partiell differenzierbar.

Höhere Ableitungen ( $k$ -te Ableitungen) werden entsprechend rekursiv definiert.

Zur Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei der Bildung höherer partieller Ableitungen betrachten wir den folgenden Satz.

**Satz 1.40.** (Satz von Schwarz)

Ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$   $p$ -mal stetig differenzierbar, so kann man in allen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}, \quad \text{mit } 1 < k \leq p,$$

die Reihenfolge der  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  beliebig ändern, ohne daß sich die partiellen Ableitungen dabei ändern.

Die Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_k$  sind dabei beliebige Elemente der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Bemerkung 1.41.*

Ist  $f$  eine Funktion mit zwei Veränderlichen, dann gilt im Falle der 2-fachen stetigen Differenzierbarkeit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

**Definition 1.42.** (partielle Ableitung einer vektorwertigen Abbildung)

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offene Menge,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ .

$\mathbf{f}$  ist partiell differenzierbar in  $\mathbf{x}_0 \in D$ , partiell differenzierbar auf  $A \subset D$  bzw. partiell differenzierbar,

wenn  $f_j$  partiell differenzierbar in  $\mathbf{x}_0 \in D$ , partiell differenzierbar auf  $A \subset D$  bzw. partiell differenzierbar ist für alle  $j = 1, 2, \dots, m$ .

## 1.6 Ableitungsmatrix und Hesse-Matrix

Durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

sei eine Abbildung beschrieben, die in  $\mathbf{x}_0$  partiell differenzierbar ist. Damit existieren alle Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

und man kann die Ableitungsmatrix wie folgt definieren.

**Definition 1.43.** (Jacobi-Matrix)

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , in  $\mathbf{x}_0$  partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (11)$$

**Ableitungs- oder Jacobi-Matrix** von  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Beispiel:

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_2 x_3) \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix},$$

also eine Abbildung vom  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^2$ . Die Ableitungsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(x_2 x_3) & -x_1 x_3 \sin(x_2 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_2 x_3) \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , die in  $\mathbf{x} \in D$  2-mal partiell differenzierbar sein soll. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Damit kann man die Hesse-Matrix wie folgt definieren.

**Definition 1.44.** (Hesse-Matrix)

Die Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

heißt **Hesse-Matrix** der Funktion  $f$ .

Aufgrund des Satzes 1.40 ergibt sich für die Hesse-Matrix die Folgerung

**Korollar 1.45.**

*Die Hesse-Matrix einer 2-mal stetig differenzierbaren Abbildung ist symmetrisch.*

Beispiel:

Betrachten wir die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cos x_3.$$

Für die Hesse-Matrix errechnet man

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & \cos x_3 & -x_2 \sin x_3 \\ \cos x_3 & 0 & -x_1 \sin x_3 \\ -x_2 \sin x_3 & -x_1 \sin x_3 & -x_1 x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Differenzierbarkeit von Abbildungen

**Definition 1.46.**

Eine Abbildung  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt in einem inneren Punkt  $\mathbf{x}_0$  von  $D$  differenzierbar, wenn sie in  $\mathbf{x}_0$  partiell differenzierbar ist und in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

geschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{k} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{k}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \quad (14)$$

gilt.

$\mathbf{f}$  heißt differenzierbar in  $A \subset D$ , wenn  $\mathbf{f}$  in jedem Punkt von  $A$  differenzierbar ist. Im Falle  $A = D$  heißt  $\mathbf{f}$  eine differenzierbare Abbildung.

*Bemerkung 1.47.* (reelle Funktion)

Ist  $f$  eine reellwertige Funktion mit einer veränderlichen Variablen, kann man die Beziehung (13) umschreiben zu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \frac{k(x)}{x - x_0}.$$

Die Forderung, daß  $\frac{k(x)}{x - x_0}$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen Null strebt, ist im vorliegenden Fall gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

also der Differenzierbarkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Da  $\frac{k(x)}{x-x_0}$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen Null strebt, reicht es nicht aus, wenn  $k(x) = O(|x-x_0|)$  gilt, sondern es muß

$$k(x) = O(|x-x_0|^\nu) \quad \text{mit } \nu > 1$$

gelten.  $k(x)$  muß also überlinear für  $x \rightarrow x_0$  gegen Null streben.

Mit dem folgenden Satz hat man ein Kriterium, was in den meisten praktischen Fällen zur Überprüfung der Differenzierbarkeit von Abbildungen genutzt werden kann.

**Satz 1.48.**

$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ist in dem inneren Punkt  $\mathbf{x}_0$  aus  $D$  differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von  $\mathbf{f}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  existieren und in  $\mathbf{x}_0$  stetig sind.

## 1.8 Differenzierbarkeitsregeln und die Richtungsableitung

**Satz 1.49.** (Regeln für differenzierbare Abbildungen)

a) *Linearität*

Sind  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , differenzierbar in  $\mathbf{x}_0$ , so ist auch  $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$  ( $\lambda$  und  $\mu$  reell) in  $\mathbf{x}_0$  differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0).$$

b) *Kettenregel*

Es sei  $\mathbf{h} : C \rightarrow D$ , (mit  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^p$ ) differenzierbar in  $\mathbf{x}_0 \in C$  und  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar im Punkt  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ .

Dann ist auch  $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\mathbf{x}_0$  differenzierbar, und es gilt

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0).$$

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2$ , und die Abbildung  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^3 \end{pmatrix}$ . Die Ableitung von

$$y = f \circ h(t) = f(h_1(t), h_2(t)) = \cos^2 t \sin t^3$$

kann man nun nach der Kettenregel wie folgt berechnen.

Für  $f'$  berechnen wir

$$f'(x_1, x_2) = [2x_1 \sin x_2, x_1^2 \cos x_2]$$

und für  $\mathbf{h}'$

$$\mathbf{h}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel ergibt sich

$$y' = (f \circ h(t))' = f'(h_1(t), h_2(t))\mathbf{h}'(t)$$

$$= [2 \cos t \sin t^3, \cos^2 t \cos t^3] \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = -2 \sin t \cos t \sin t^3 + 3t^2 \cos^2 t \cos t^3 .$$

Wenn wir nun eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten, die im Punkt  $\mathbf{x}_0$  differenzierbar sein soll, und eine Funktion

$$\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

dann errechnet man  $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{a}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die Anwendung der Kettenregel ergibt für  $f \circ \mathbf{h}$

$$(f \circ \mathbf{h})'(0) = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{a} .$$

$\mathbf{h}(t)$  beschreibt eine "Gerade" in  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbf{x}_0$  in Richtung  $\mathbf{a}$ , was man sich am besten im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  anschaulich klar macht. Aus diesem Grunde nennt man  $f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{a} = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}$  auch **Richtungsableitung**, wobei man  $|\mathbf{a}| = 1$  fordert.

Eine allgemeinere Definition der Richtungsableitung, die die Differenzierbarkeit von  $f$  nicht fordert, wird nun formuliert.

**Definition 1.50.** (Richtungsableitung)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  und ein Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  in Richtung  $\mathbf{a}$ .

**Korollar 1.51.**

*Sind die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  stetig<sup>4</sup>, dann gilt für die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\mathbf{a}$*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} .$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die partielle Ableitung einer Funktion  $f$  nach  $x_j$  genau die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\mathbf{e}_j$  ist, denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}_0) .$$

Beispiel:

Zu bestimmen ist die Richtungsableitung der Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = x^2 \cos(xy)e^z$  im Punkt  $(1, 0, 1)$  in Richtung  $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ . Es ergibt sich

$$\text{grad } f = (2x \cos(xy)e^z - x^2 y \sin(xy), -x^3 \sin(xy)e^z, x^2 \cos(xy)e^z)^T ,$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(1, 0, 1) = (2e, 0, e)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}3e .$$

---

<sup>4</sup>Damit folgt die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

## 1.9 Lineare Approximation

Bei komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert die Frage, ob man die entsprechende Funktion zumindest in der lokalen Umgebung eines Punktes  $\mathbf{x}_0$  des Definitionsbereiches durch eine recht einfache Approximation annähern kann.

Aus der Beziehung (13) wird ersichtlich, daß die Abbildung  $\mathbf{f}$  in der Nähe des Punktes  $\mathbf{x}_0$  durch die Abbildung  $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (15)$$

ersetzen kann, ohne wegen der "Kleinheit" von  $\|\mathbf{k}(\mathbf{x})\|$  einen allzu großen Fehler zu machen.

Die durch (15) definierte Abbildung  $\mathbf{g}$  nennt man **Tangentenabbildung** oder **lineare Approximation** von  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Betrachten wir zur Veranschaulichung eine differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ , dann ergibt sich in  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + k(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + k(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

und die Tangentenabbildung

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man überlegt sich nun, daß der Graph von  $g$  eine Ebene, die wir Tangentenebene nennen, mit den folgenden Eigenschaften ist:

- a) die Ebene berührt im Punkt  $P = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  den Graphen der Funktion  $f$ , also ist

$$(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)),$$

und sie schmiegt sich wegen der Kleinheit von  $k(x, y)$  an den Graphen von  $f$ ,

- b) die Tangenten an den Funktionen  $f^*(x) := f(x, y_0)$  an der Stelle  $x_0$  und  $f^{**}(y) := f(x_0, y)$  an der Stelle  $y_0$  liegen in der Ebene,

- c) in der unmittelbaren Umgebung von  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  stellt die Ebene wegen der Kleinheit von  $k(x, y)$  eine gute Näherung der Funktion  $f$  dar.

### Korollar 1.52.

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ist genau dann in  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  differenzierbar, wenn es eine Tangentenebene an den Graphen von  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  gibt.

Beispiel:

Betrachten wir die Funktion  $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$ . Gesucht ist eine lineare Approximation durch die Tangentenebene in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ . Mit

$$f'(\mathbf{x}) = [\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x]$$

erhält man

$$g(x, y) = 0 + [0, \frac{\pi}{2} + 1] \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} = (\frac{\pi}{2} + 1)y.$$

Die Ebenengleichung in der aus der HM I bekannten parameterfreien Form ( $z = g(x, y)$ ) lautet also

$$(\frac{\pi}{2} + 1)y - z = 0.$$



### 1.10 Totales Differential

Ebenso wie im Fall der Funktionen einer reellen Veränderlichen ist für Funktionen mit mehreren Variablen eine Näherungs-Formel für die Differenz

$$\Delta z := f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

für eine differenzierbare Funktion interessant. Ausgehend von der für differenzierbare Funktionen gültigen Darstellung

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x})$$

ergibt sich für  $\Delta z$

$$\Delta z = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}) .$$

Da  $\|k(\mathbf{x})\|$  für kleine  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  sehr kleine Werte hat, gibt  $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  in guter Näherung die Abweichung  $\Delta z$  des Wertes  $f(\mathbf{x})$  von  $f(\mathbf{x}_0)$  an.

Wir wählen, wie in der Physik und Ingenieurwissenschaft üblich, die Bezeichnungen

$$d\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad dz := f'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x} . \quad (17)$$

Mit der Komponentendarstellung

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

kann man (17) ausführlicher schreiben.

**Definition 1.53.** (totales oder vollständiges Differential)

Die durch

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j \quad (18)$$

beschriebene lineare Funktion mit den reellwertigen Variablen  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  heißt das vollständige oder totale Differential von  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Die Funktion wird auch durch  $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Funktionsgleichung

$$df(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j \quad (19)$$

symbolisiert.

Mit der Verabredung

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

wird das vollständige Differential auch durch die Gleichung

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_j} dx_j \quad (20)$$

in einer Schreibweise angegeben, die in Physik und Technik sehr gebräuchlich ist.

Das vollständige Differential hat Bedeutung in der Abschätzung von Meßfehlern. Betrachtet man z.B. eine Funktion  $f(x, y)$  und möchte man etwas zum Fehler bei der Berechnung des Funktionswertes an der Stelle  $(x_0, y_0)$  wissen, wenn  $x_0$  und  $y_0$  mit den Fehlern  $dx = x - x_0$  bzw.  $dy = y - y_0$  behaftet sind, dann kann man das totale Differential nutzen. Dazu schreiben wir das vollständige Differential von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  auf und erhalten

$$dz = df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy .$$

Damit kann man die Auswirkung der Fehler  $dx$  und  $dy$  auf den Fehler im Funktionswert abschätzen. Man erhält mit

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |dz| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| |dx| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| |dy|$$

die gewünschte Fehlerabschätzung. Hier sei darauf hingewiesen, daß man bei Fehlerabschätzungen genau wie im Fall des totalen Differentials einer Funktion einer reellen Veränderlichen zwischen relativen ( $\frac{|dz|}{|z|}$ ) und absoluten Fehlern ( $|dz|$ ) unterscheidet.

Beispiel:

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für das vollständige Differential ist die näherungsweise Berechnung von  $2,02^{3,01}$ .

Wir führen dazu die Funktion

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y > 0$$

ein und ermitteln  $f(2,02, 3,01)$  näherungsweise durch  $f(2, 3) + df$ , wobei

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)dy$$

mit  $dx = 0,02$  und  $dy = 0,01$  ist. Die partiellen Ableitungen von  $f$  lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x ,$$

und man erhält

$$2,02^{3,01} = f(2,02, 3,01) \approx 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0,02 + 2^3 \ln 2 \cdot 0,01 \approx 8,295 .$$

Auf meinem Taschenrechner habe ich für  $2,02^{3,01}$  das Ergebnis  $8,3$  erhalten, wobei ich nicht genau weiß, wie mein Taschenrechner zu dem Ergebnis gekommen ist.

### 1.11 Taylorformel und Mittelwertsatz

Ziel dieses Abschnitts ist die näherungsweise Darstellung einer  $(p + 1)$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , als ein spezielles Polynom  $p$ -ten Grades. Ein solches Polynom läßt sich i.d.R. leichter berechnen als die Funktion und nähert zweitens die Funktion genauer als die lineare Approximation.

1.11.1 Taylorformel im  $\mathbb{R}^n$ 

Wir benötigen zur Aufstellung der Taylorformel einige Hilfsmittel. Mit

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

führen wir den sogenannten Nabla-Operator als symbolischen Vektor ein<sup>5</sup>. Die formale skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit einem Vektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{h} := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

ergibt mit

$$\mathbf{h} \cdot \nabla := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

einen Operator, den man auf die Funktion  $f$  anwenden kann. Man erhält

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Unter der  $k$ -ten Potenz von  $\mathbf{h} \cdot \nabla$  wollen wir den Operator

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

verstehen. In der Summe wird über alle  $k$ -Tupel  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  mit  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  summiert, so daß die Summe  $n^k$  Glieder hat.

Für  $k = 2$  erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 &= \sum_{i,j=1}^2 h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= h_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + h_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}, \end{aligned}$$

und angewandt auf die Funktion  $f$  erhalten wir

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}) = h_1 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + h_2 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}.$$

Die Anwendung von  $(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k$  auf  $f$  ergibt

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

<sup>5</sup>Der Name Nabla-Operator rührt von einem hebräischen Saiteninstrument her, das in etwa die Form des Nabla-Zeichens hat.

Hat man mit  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{h}$  beliebige Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^n$  gegeben, so bezeichnen wir mit

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] = \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{h} \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

die Verbindungsstrecke der Punkte  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ . Im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entspricht das den üblichen Vorstellungen der kürzesten Verbindungsgeraden zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ . Mit den eben definierten Begriffen kann nun der Satz von Taylor im  $\mathbb{R}^n$  formuliert werden.

**Satz 1.54.** (Taylorformel im  $\mathbb{R}^n$ )

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  sei  $(p+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$  sei eine im Inneren von  $D$  liegende Strecke.

Dann gilt die Taylorformel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) \\ &+ \frac{1}{1!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{p!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{a}) + R(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \end{aligned} \quad (21)$$

mit dem Restglied

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{p+1} f(\mathbf{a} + s\mathbf{h}) ds. \quad (22)$$

Es ergibt sich die Abschätzung

$$|R(\mathbf{a}, \mathbf{h})| \leq \frac{\|\mathbf{h}\|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{p+1}=1}^n |f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p+1}}}(\mathbf{a} + s\mathbf{h})|^2}. \quad (23)$$

**Definition 1.55.** (Taylorpolynom  $p$ -ten Grades)

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  sei  $(p+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$  sei eine im Inneren von  $D$  liegende Strecke.

Dann heißt

$$T_p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) := f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{p!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{a}) \quad (24)$$

Taylorpolynom  $p$ -ten Grades an der Stelle  $\mathbf{a}$ .

Wenn wir  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$  und  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$  setzen, erhalten wir für das Taylorpolynom  $p$ -ten Grades

$$T_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{x}_0) + \dots + \frac{1}{p!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^p f(\mathbf{x}_0), \quad (25)$$

wobei  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  ist.

Für  $p = 0$  folgt aus der Taylorformel der folgende Satz.

**Satz 1.56.** (Mittelwertsatz)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  einmal stetig partiell differenzierbar, und ist  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$  eine im Inneren von  $D$  liegende Strecke.

Dann gilt

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \int_0^1 (\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{a} + s\mathbf{h}) ds, \quad (26)$$

sowie

$$|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| \leq \|\mathbf{h}\| \sup_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_{x_i}(\mathbf{a} + s\mathbf{h})|^2}. \quad (27)$$

### 1.11.2 Taylorpolynom 2. Grades

Der Formalismus beim Taylorpolynom  $p$ -ten Grades ist, wie die obigen Vorbereitungen und die mehrfache Summierung zeigen, recht aufwendig. Glücklicherweise benötigt man in der Regel nur Taylorpolynome bis zum 2. Grad. Zum Taylorpolynom 1. Grades bleibt nur anzumerken, daß es gleich der Tangentenabbildung  $g(\mathbf{x})$  ist, die wir im Zusammenhang mit der linearen Approximation behandelt haben (zur Übung sollte man sich dies allerdings mit der Definition (24) klar machen).

Für das Taylorpolynom  $T_2(\mathbf{x})$  gibt es ebenfalls eine recht einprägsame Darstellung.

**Satz 1.57.** (Taylorpolynom 2. Grades)

Das Taylorpolynom 2. Grades einer Funktion  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  kann man in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (28)$$

darstellen, wobei  $H_f$  die Hesse-Matrix der Funktion  $f$  ist.

Führt man die skalare Multiplikation  $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  und das Matrixprodukt  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  der Darstellung (28) aus, erhält man die Beziehung (25) für  $p = 2$ .

Beispiel:

Betrachten wir wiederum die Funktion  $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$ . Gesucht ist eine Approximation mit einem Taylorpolynom 2. Grades. Als Entwicklungspunkt nehmen wir  $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ . Weiter oben haben wir

$$f'(\mathbf{x}) = [\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x]$$

gefunden. Für die Hesse-Matrix erhalten wir

$$H_f = \begin{pmatrix} -y \sin x & \cos y + \cos x \\ \cos y + \cos x & -x \sin y \end{pmatrix}.$$

Damit können wir das Taylorpolynom 2. Grades aufschreiben und erhalten

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \text{grad } f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}, y\right) H_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)y + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}, y\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)y + \frac{1}{2}[(x - \frac{\pi}{2})y + y(x - \frac{\pi}{2})] \\ &= y + xy \end{aligned}$$

### 1.12 Satz über implizite Funktionen

Wir haben bisher an verschiedenen Stellen implizite funktionale Zusammenhänge der Form

$$f(x, y) = 0 \quad \text{oder allgemein} \quad f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

benutzt. Z.B. hatten wir als Lösung einer DGL

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

bzw.

$$f(y, x) = y - C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$$

erhalten. Es stellt sich dann die Frage, unter welchen Voraussetzungen man  $f(x, y) = 0$  nach  $y$  eindeutig "auflösen" kann. Das muß keineswegs der Fall sein, denn möglicherweise gibt es überhaupt keine Lösung der Gleichung  $f(x, y) = 0$ , oder zu einem  $x$  existieren mehrere  $y$ -Werte, so daß  $f(x, y) = 0$  ist. Überhaupt nicht auflösbar ist z.B. die Gleichung

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

und die Gleichung

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

hat für den  $x$ -Wert 0 die beiden  $y$ -Werte  $y = 1$  und  $y = -1$ , so daß man aufgrund der Mehrdeutigkeit nicht von einer Funktion  $y = y(x)$  sprechen kann.

Antwort auf die gestellten Fragen gibt der Satz über implizite Funktionen.

**Satz 1.58.** (Satz über implizite Funktionen, zweidimensionaler Fall)

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D$  offen, eine stetig differenzierbare Funktion. Für einen Punkt  $(x_0, y_0)^T \in D$  sei

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (29)$$

Damit folgt

- a) Es gibt ein Intervall  $U$  um  $x_0$  und ein Intervall  $V$  um  $y_0$  mit der Eigenschaft:  
Zu jedem  $x \in U$  existiert genau ein  $y \in V$  mit

$$f(x, y) = 0.$$

Jedem  $x \in U$  ist auf diese Weise eindeutig ein  $y \in V$  zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung  $g : U \rightarrow V$ , mit der Funktionsgleichung  $y = g(x)$ , erfüllt die Gleichung

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

- b)  $g$  ist stetig differenzierbar, und es gilt für jedes  $x \in U$ :

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}. \quad (30)$$

Die entscheidende Voraussetzung des Satzes ist  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Das wird auch deutlich, wenn wir uns die grobe Beweisidee ansehen.

Wenn wir die verkettete Funktion

$$f(x, y) \quad \text{mit} \quad y = g(x)$$

nach  $x$  differenzieren, erhalten wir mit der Kettenregel

$$f'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (31)$$

Unter der Voraussetzung  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$  können wir nun  $y'$  aus der Gleichung (31) bestimmen und erhalten

$$y' = g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Die Voraussetzung  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  ist auch entscheidend für den Nachweis von Behauptung a).

Beispiel 1:

Betrachten wir die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 1 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Für einen beliebigen  $x$ -Wert erhält man immer zwei  $y$ -Werte, und zwar  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  und  $y = -\sqrt{x^2 + 1}$ . Wendet man den Satz über implizite Funktionen an, stellt man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

fest, und damit die eindeutige Auflösbarkeit in Punkten  $(x, y)$  mit  $y \neq 0$ . In Punkten des Typs  $(x, y) = (x, 0)$  mit  $f(x, y) = 0$  kann man nicht eindeutig nach  $y$  auflösen.

Beispiel 2:

$$f(y, x) = y - C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0,$$

also unsere "implizite" Lösung einer DGL. Wir rechnen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2 \frac{x^2}{2y^3} C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

aus und haben mit

$$1 + 2 \frac{x^2}{2y^3} C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} \neq 0$$

eine Bedingung für die Auflösbarkeit nach  $y$ .

**Satz 1.59.** (Satz über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)

Durch  $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  sei eine stetig differenzierbare Funktion von einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  in  $\mathbb{R}$  beschrieben. Für einen Punkt  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$  gelte

$$f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0.$$

Weiterhin sei

$$f_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0.$$

Dann folgt:

- a) Es gibt eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  um  $\mathbf{x}_0$  und ein Intervall  $V$  um  $y_0$  mit der Eigenschaft:  
Zu jedem  $\mathbf{x} \in U$  existiert genau ein  $y \in V$  mit

$$f(\mathbf{x}, y) = 0.$$

Jedem  $\mathbf{x} \in U$  ist auf diese Weise eindeutig ein  $y \in V$  zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung  $g : U \rightarrow V$  mit der Funktionsgleichung  $y = g(\mathbf{x})$  erfüllt die Gleichung

$$f(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U,$$

- b)  $g$  ist stetig differenzierbar, und es gilt für jedes  $\mathbf{x} \in U$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}. \quad (32)$$

### 1.13 Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen

Maxima und Minima von Funktionen mehrerer reeller Variabler lassen sich analog zum Fall der Funktion einer reellen Variablen mit Mitteln der Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$  gewinnen.

#### Definition 1.60.

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  gegeben. Ist  $\mathbf{x}_0 \in D$  ein Punkt, zu dem es eine Umgebung  $U$  mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

gibt, so sagt man:  $f$  besitzt in  $\mathbf{x}_0$  ein lokales Maximum.

Der Punkt  $\mathbf{x}_0$  selbst heißt eine lokale Maximalstelle von  $f$ .

Steht " $<$ " statt " $\leq$ ", wird  $\mathbf{x}_0$  als echte lokale Maximalstelle von  $f$  bezeichnet.

Analog zur Definition des Maximums und der Maximalstelle werden Minimum und Minimalstelle (" $\geq$ " bzw. " $>$ " statt " $\leq$ " bzw. " $<$ ") definiert.

Maximal- und Minimalstellen nennen wir allgemein Extremalstellen oder -punkte.

Wir formulieren nun eine **notwendige** Bedingung für eine Extremalstelle.

#### Satz 1.61. (notwendige Bedingung)

Ist  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

d.h., sämtliche partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden<sup>6</sup>.

*Beweis.*

Es sei  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$  Extremalstelle von  $f$ . Wir definieren die Funktion

$$g(x_k) := f(x_{10}, \dots, x_{k-10}, x_k, x_{k+10}, \dots, x_{n0}) \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

als Funktion einer Veränderlichen. Die Funktion  $g$  hat in  $x_{k0}$  natürlich ein Extremum, also folgt

$$0 = g'(x_{k0}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0),$$

womit der Satz bewiesen ist. □

*Bemerkung 1.62.*

Der Satz 1.61 besagt, daß die Lösungen  $\mathbf{x}_0$  des Gleichungssystems

$$f_{x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Kandidaten für Extremalstellen sind. Ob  $\mathbf{x}_0$  tatsächlich Extremalstelle ist, kann man mit dem folgenden hinreichenden Kriterium überprüfen.

#### Satz 1.63. (hinreichende Bedingung)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt:

Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  mit  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  ist eine

- echte Maximalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ ,
- echte Minimalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ ,

---

<sup>6</sup>Mit  $\overset{\circ}{D}$  sollen im folgenden die inneren Punkte von  $D$  bezeichnet werden.



für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ .

*Beweis.*

Wir nehmen  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$  für alle  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  an. Nach der Taylor-Formel gilt

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) ds,$$

und wegen  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) ds. \quad (33)$$

Aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitung gibt es eine Kugelumgebung  $U \subset D$  von  $\mathbf{x}_0$  mit

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x}_0 + s\mathbf{z} \in U, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, 0 < s < 1.$$

Wählt man  $\mathbf{z}$  dabei fest, dann nimmt  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z})$  für ein  $s \in [0, 1]$  sein Minimum  $c$  an (weil  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z})$  eine stetige Funktion in  $s$  ist), also gilt

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{z}) \geq c > 0 \quad \text{für alle } s \in [0, 1].$$

Damit erhält man aus (33)

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)c ds = \frac{c}{4} > 0,$$

also  $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) > f(\mathbf{x}_0)$  für jedes  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \in U$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ .  $\mathbf{x}_0$  ist damit eine echte Minimalstelle.

Durch Übergang von  $f$  zu  $-f$  erhält man die entsprechende Aussage für echte Maximalstellen.  $\square$

*Bemerkung 1.64.*

Aus dem Satz von Taylor wissen wir, daß der Ausdruck  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0)$  mit Hilfe der Hesse-Matrix in der Form

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{z} \quad (34)$$

aufgeschrieben werden kann. Damit kann man die hinreichende Bedingung auch anders formulieren.

**Satz 1.65.** (*hinreichende Bedingung*)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt:

Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$  mit  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  ist eine

- echte Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hessematrix  $H_f(\mathbf{x}_0)$  alle negativ sind,
- echte Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hessematrix  $H_f(\mathbf{x}_0)$  alle positiv sind,

*Beweis.*

Für die Eigenwerte  $\lambda$  von  $H_f(\mathbf{x}_0)$  gilt

$$H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

wobei  $\mathbf{x}$  Eigenvektoren sind. Die skalare Multiplikation von links mit  $\mathbf{x}^T$  ergibt

$$\mathbf{x}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2.$$

Sind die Eigenwerte alle kleiner als Null, so folgt aus der Negativität der linken Seite, daß eine Maximalstelle vorliegt. Bei der Positivität der Eigenwerte schlußfolgert man analog, daß eine Minimalstelle vorliegt.  $\square$

Für eine reellwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  kann man die hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle auch folgendermaßen formulieren.

**Satz 1.66.**

Ist die reellwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  zweimal stetig differenzierbar auf  $D \subset \mathbb{R}^2$ , so folgt:

Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \dot{D}$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (35)$$

und

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

ist eine

- echte Maximalstelle, falls  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  gilt,
- echte Minimalstelle, falls  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  gilt.

*Beweis.*

Der Beweis des Satzes 1.66 ergibt sich aus der Auswertung der Forderung, daß die Eigenwerte der Hesse-Matrix von  $f$  alle positiv oder negativ sein müssen. Zur Bestimmung der EW der Hesse-Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

zu bestimmen, und man erhält

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(f_{xx} + f_{yy})^2}{4} - f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2} \\ &= \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(f_{xx} - f_{yy})^2}{4} + f_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Man überlegt sich nun, daß

$$\sqrt{\frac{(f_{xx} - f_{yy})^2}{4} + f_{xy}^2} > \left| \frac{f_{xx} - f_{yy}}{2} \right| \quad (37)$$

gilt. Wenn  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  ist, muß aufgrund von (36) auch  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$  gelten, und aus (37) folgt

$$\lambda_{1,2} < 0.$$

Ist andererseits  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , muß aufgrund von (36) auch  $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$  gelten, und damit ergibt sich mit (37)

$$\lambda_{1,2} > 0.$$

□

*Bemerkung 1.67.*

Hat  $H_f(\mathbf{x}_0)$  positive und negative Eigenwerte und gilt  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , dann spricht man bei  $\mathbf{x}_0$  von einem Sattelpunkt.

Beispiel:

Es sind die Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

zu berechnen. Die notwendige Bedingung  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0 \\ 2y + x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung  $x = \frac{7}{3}$ ,  $y = -\frac{8}{3}$ . Zur Auswertung der hinreichenden Bedingung berechnen wir

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1,$$

und damit folgt aus  $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$ , daß der Punkt  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$  eine Minimalstelle ist.

### 1.14 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

Oft ist nach Extremwerten einer Funktion  $f$  gefragt, wobei noch Nebenbedingungen der Art

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{38}$$

erfüllt sein müssen. Allgemein kann man diese Problemstellung wie folgt formulieren.

#### Extremalproblem mit $m$ Nebenbedingungen

Gegeben sind zwei stetig differenzierbare Abbildungen

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > m$ .

Gesucht sind die Maximal- und Minimalstellen der Einschränkung  $f|_M$  von  $f$  auf

$$M := \{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset D. \tag{39}$$

Eine Maximalstelle  $\mathbf{x}_0$  von  $f|_M$  ist dabei ein Punkt aus  $M$ , zu dem es eine Umgebung  $U \subset D$  gibt mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap M.$$

Entsprechendes vereinbart man für Minimalstellen.

Eine Methode bzw. Kriterien zur Ermittlung von Extremalstellen einer Funktion  $f$  unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen liefert der folgende Satz.

#### Satz 1.68. (Lagrange-Multiplikatoren)

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und die Abbildung  $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  seien stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > m$ , wobei die Matrix  $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in D$  den Rang  $m$  hat. Dann folgt:

Ist  $\mathbf{x}_0 \in D$  eine Extremalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , so existiert dazu eine Zeilenmatrix (Zeilenvektor)  $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L} \mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \tag{40}$$

Die Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  heißen dabei **Lagrangesche Multiplikatoren**.

*Bemerkung 1.69.*

Bei dem Kriterium handelt es sich um ein notwendiges Kriterium, d.h., eine Extremalstelle  $\mathbf{x}_0$  von  $f$  unter der Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  ist immer eine Lösung der Gleichungen

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L} \mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (41)$$

Mit den Komponentendarstellungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (42)$$

erhalten die Gleichungen (41) die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, n, \quad (43)$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots, m. \quad (44)$$

Es liegen damit  $n + m$  reelle Gleichungen für die  $n + m$  reellen Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  vor. Lösungen  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  der Gleichungen (43) und (44) heißen **stationäre Punkte** von  $f$  unter der Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

**Korollar 1.70.** (*zweidimensionaler Fall der Lagrange-Multiplikatoren*)

Durch  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  werden zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  beschrieben. Dabei sei  $\text{grad } h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{x} \in D$ . Dann folgt: Ist  $\mathbf{x}_0 \in D$  eine Extremalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $h(\mathbf{x}) = 0$ , so gilt

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \lambda \text{grad } h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (45)$$

mit einer reellen Zahl  $\lambda$  (Lagrange-Multiplikator).

*Bemerkung 1.71.* (Lagrange-Funktion)

Mit der Einführung der Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(\mathbf{x}) \quad (46)$$

als Funktion mit  $n + m$  Veränderlichen ergibt sich die notwendige Bedingung zur Ermittlung stationärer Punkte zu

$$\text{grad } L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Beispiel:

Gesucht sind die Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x, y) = x^2 - y - 2 = 0.$$

Mit  $\text{grad } f(x, y) = (2x, 6y)^T$  und  $\text{grad } h(x, y) = (2x, -1)^T$  erhält man mit

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) + \lambda \text{grad } h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad h(\mathbf{x}) = 0$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x &= -\lambda 2x \\ 6y &= \lambda \\ y &= x^2 - 2. \end{aligned}$$

Fordert man  $x \neq 0$ , so folgt aus der ersten Gleichung  $\lambda = -1$ . Aus der zweiten Gleichung ergibt sich dann  $y = -\frac{1}{6}$  und für  $x$  rechnet man  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$  aus.

Setzt man  $x = 0$ , so folgt aus der letzten Gleichung  $y = -2$  und aus der zweiten Gleichung  $\lambda = 12$ .

Damit hat man durch Auswertung der notwendigen Bedingungen die Kandidaten

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right), \quad P_3 = (0, -2)$$

als Extremalstellen der Funktion  $f$  bei Berücksichtigung der Nebenbedingung  $x^2 - y - 2 = 0$  ermittelt.

Man findet nun durch "Einsetzen" heraus, daß  $P_3$  eine Maximalstelle ist und  $P_1, P_2$  Minimalstellen sind.

*Bemerkung 1.72.*

In der Regel ist die Frage, ob stationäre Punkte Extremalstellen oder nichts dergleichen sind, im allgemeinen schwer zu beantworten. Hier hilft oft ingenieurmäßige Intuition oder numerische Rechnung. Eine Hilfe bei der Entscheidung liefert der Satz, daß jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Maximum und Minimum annimmt.

Bei kompakter Nebenbedingungsmenge

$$M = \{\mathbf{x} \in D \mid h(\mathbf{x}) = 0\}$$

hat man daher unter den Lösungen der Lagrange-Methode und den Randpunkten aus  $M \cap \partial D$  diejenigen mit maximalen Funktionswert  $f(\mathbf{x})$  herauszusuchen. Diese Punkte sind alle gesuchten Maximalstellen. Für Minimalstellen gilt Entsprechendes.

### 1.15 Ausgleichsrechnung

Es ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Einflußgrößen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und einer Größe  $y$  in der Form

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{47}$$

gesucht. Man weiß über die Abhängigkeit der Größe  $y$  von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , hat aber z.B. durch Meßreihen o.ä. nur die Matrix

$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ y_2 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ y_m & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{48}$$

gegeben, wobei eine Zeile etwa das Ergebnis einer von insgesamt  $m$  Messungen ist, also hat die Größe  $y$  bei der  $j$ -ten Messung den Wert  $y_j$  und die Einflußgrößen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Werte

$x_{j1}, \dots, x_{jn}$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , kennt man nicht. Macht man für  $f$  einen Ansatz, z.B.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \quad (49)$$

kann man die Frage stellen, für welche  $r_0, r_1, \dots, r_n$  das Funktional

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_n) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn}))^2 \end{aligned} \quad (50)$$

minimal ist, um somit die "beste" Annäherung des funktionalen Zusammenhangs  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf der Grundlage der Meßreihe (48) zu erhalten. Diese Methode geht auf Gauss zurück und wird "Methode der kleinsten Quadrate" genannt. Bei der Aufgabe

$$F(r_0, r_1, \dots, r_n) = \text{Min!} \quad (51)$$

handelt es sich um ein Extremalproblem ohne Nebenbedingungen. Die notwendige Bedingung für Extremalpunkte lautet  $\text{grad } F = \mathbf{0}$  und aufgrund des linearen Ansatzes (49) erhält man mit der notwendigen Bedingung ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A \mathbf{r} = \mathbf{b} \quad (52)$$

zur Bestimmung des Vektors  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ . Die Gleichung (52) nennt man die **Gauss-Normalgleichung** des linearen Ausgleichsproblems (51).

Für die Elemente der Koeffizientenmatrix  $A$  erhält man nach kurzer Rechnung

$$a_{ij} = m \sum_{k=1}^m x_{ki} x_{kj} - \sum_{k=1}^m x_{ki} \sum_{k=1}^m x_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad ,$$

und für die Komponenten der "rechten" Seite  $\mathbf{b}$  ergibt sich

$$b_i = m \sum_{k=1}^m x_{ki} y_k - \sum_{k=1}^m x_{ki} \sum_{k=1}^m y_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dabei wurde  $r_0$  aus der Gleichung  $\frac{\partial F}{\partial r_0} = 0$  zu

$$r_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{i=1}^n \left[ r_i \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ki} \right]$$

bestimmt und aus den Gleichungen  $\frac{\partial F}{\partial r_j} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , eliminiert. Die eben beschriebene Methodik kann man im folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz 1.73.** (lineares Ausgleichsproblem)

- (a) Das lineare Ausgleichsproblem (51) ist immer lösbar.
- (b) Die Lösungen von (51) und (52) stimmen immer überein.
- (c) Für zwei Lösungen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_0$  gilt stets  $A \mathbf{r} = A \mathbf{r}_0$ . Ist der Rang von  $A$  gleich  $n$ , so ist die Ausgleichslösung eindeutig.

(d) Ist die Zahl der Messungen  $m$  nicht größer als die Zahl der Einflußgrößen  $n$ , so ist die Matrix  $A$  immer singulär.

*Bemerkung 1.74.*

Wenn man statt dem Ansatz (49) mit einem Ansatz der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 + r_1\phi_1(x_1) + \dots + r_n\phi_n(x_n) \quad (53)$$

arbeitet, wobei  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  gegebene differenzierbare Funktionen sind, ist die oben beschriebene Methodik dem Prinzip nach ebenso anwendbar. Der Ansatz (53) führt zum Funktional

$$\begin{aligned} G(r_0, r_1, \dots, r_n) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1\phi_1(x_{k1}) + \dots + r_n\phi_n(x_{kn})))^2 \end{aligned} \quad (54)$$

und die Auswertung der notwendigen Bedingung

$$\text{grad } G = \mathbf{0}$$

führt zu einer Modifizierung der Matrix  $A$ .

*Bemerkung 1.75.* (logarithmisch lineares Ausgleichsproblem)

Macht man für die funktionale Beziehung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  den Ansatz

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 \cdot x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n} \quad (55)$$

spricht man von einem logarithmisch linearen Ansatz. Durch Logarithmieren erhält man aus (55) die lineare Beziehung

$$\ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln r_0 + r_1 \ln x_1 + r_2 \ln x_2 + \dots + r_n \ln x_n$$

und kann die oben beschriebene Methode zur Berechnung der "besten"  $r_j$  verwenden. Denn man hat mit den Festlegungen  $y' := \ln y$ ,  $y'_k := \ln y_k$ ,  $r'_0 := \ln r_0$  und  $x'_j := \ln x_j$ ,  $x'_{kj} := \ln x_{kj}$  für  $k = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  statt (48) die Ausgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} y'_1 & x'_{11} & \dots & x'_{1n} \\ y'_2 & x'_{21} & \dots & x'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_m & x'_{m1} & \dots & x'_{mn} \end{pmatrix} \quad (56)$$

zur Bestimmung der "besten"  $r'_0, r_1, \dots, r_n$  zur Näherung des funktionalen Zusammenhangs

$$y' = r'_0 + r_1 x'_1 + r_2 x'_2 + \dots + r_n x'_n$$

zu verarbeiten.

## 1.16 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, Newton-Verfahren

In der HM I-Vorlesung wurde das Newton-Verfahren für die Nullstellenbestimmung einer reellwertigen Funktion einer Veränderlichen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  behandelt.

Hier soll nun kurz das Newton-Verfahren im  $\mathbb{R}^n$  besprochen werden. Es ist ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

zu lösen. Mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  und  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  kann man (57) kürzer in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{58}$$

aufschreiben. Dabei sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  der Definitionsbereich von  $\mathbf{f}$ , einer Abbildung von  $D$  in den  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{f}$  wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Gesucht sind Punkte  $\mathbf{x} \in D$ , die die Gleichung (58) erfüllen. Solche  $\mathbf{x}$  nennen wir Lösung der Gleichung (58).

Liegt  $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$  in der Nähe einer Lösung  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , so bildet man die Tangentenabbildung von  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D,$$

und löst anstelle von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  die Gleichung  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , d.h., man sucht eine Lösung der Gleichung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Es handelt sich dabei um ein **lineares** Gleichungssystem, für das uns Lösungsmethoden bekannt sind. Hat man  $\mathbf{x}_1$  bestimmt, führt man ausgehend von  $\mathbf{x}_1$  den gleichen Rechenschritt aus und sucht ein  $\mathbf{x}_2$  als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}.$$

Allgemein kann man unter der Voraussetzung, daß  $\mathbf{x}_k \in \dot{D}$  ist,  $\mathbf{x}_{k+1}$  aus der Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$$

bestimmen und erhält nach Multiplikation der Gleichung mit  $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1}$  bei einem gegebenen  $\mathbf{x}_0$  das Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &\quad \text{gegeben,} \\ \mathbf{x}_{k+1} &:= \mathbf{x}_k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{59}$$

Damit ist die vollständige Analogie zum Newton-Verfahren bei einer reellen Unbekannten gegeben.

Wir fassen den Algorithmus des Newton-Verfahrens zusammen:

Es sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar gegeben. Zur Lösung der Gleichung  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  führt man die folgenden Schritte durch.

(I) Man wählt einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ .

(II) Man berechnet  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$  indem man nacheinander für  $k = 0, 1, 2, \dots$  das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{z}_{k+1} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tag{60}$$

nach  $\mathbf{z}_{k+1}$  auflöst und  $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_{k+1}$  bildet. Dabei wird  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$  als regulär und  $\mathbf{x}_k \in \dot{D}$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  vorausgesetzt.



(III) Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die  $\mathbf{x}_k$  sich innerhalb eines Rechenschrittes nicht mehr verändern oder eine vorgegebene maximale Iterationszahl erreicht ist.

**Satz 1.76.** (Konvergenzaussage zum Newton-Verfahren)

$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  sei zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle  $\bar{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{D}$ . Weiterhin sei  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in D$  regulär. Dann folgt:

Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $\bar{\mathbf{x}}$ , so daß die Newton-Folge  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$  von einem beliebigen  $\mathbf{x}_0 \in U$  ausgehend, gegen die Nullstelle  $\bar{\mathbf{x}}$  konvergiert.

Die Konvergenz ist quadratisch, d.h., es gilt für alle  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \leq C \|\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \text{mit einem } C > 0.$$

Eine einfache Fehlerabschätzung<sup>7</sup> lautet

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| \sup_{\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}} \|[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}\|.$$

---

<sup>7</sup>Wenn  $A = (a_{ij})$  eine  $(n \times n)$ -Matrix ist, verabreden wir für den "Betrag" bzw. die Norm der Matrix  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$ .

## 2 Grundlegende Elemente der Vektoranalysis

### 2.1 Motivation

In vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften und der Physik treten Differentialgleichungen der Art

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} \mathbf{v}) \quad (62)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (63)$$

$$-\Delta p = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (64)$$

auf. Der disziplinäre Hintergrund der Gleichungen ist hier von untergeordneter Rolle (die Gleichungen (62,63) beschreiben z.B. die Strömung eines inkompressiblen Mediums und heißen Navier-Stokes-Gleichungen). Um die Gleichungen zu verstehen, muß man die Bedeutung der **Operatoren**

$$\operatorname{rot} \quad \operatorname{grad} \quad \operatorname{div} \quad \Delta \quad \nabla$$

kennen. Diese Operatoren sollen im folgenden erklärt werden, so daß am Ende die Gleichung (62) exemplarisch nur unter Verwendung von partiellen Ableitungen aufgeschrieben werden kann und soll.

### 2.2 Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis

**Definition 2.1.** (Funktionenraum, Operator)

Unter einer Funktionenklasse oder einem Funktionenraum  $C$  verstehen wir eine Menge von Funktionen, die durch gemeinsame Eigenschaften charakterisiert ist.

Unter einem Operator  $\Omega$  verstehen wir eine Abbildung

$$\Omega : C \rightarrow D ,$$

die einer Funktion aus dem Funktionenraum  $C$  eine Funktion aus dem Funktionenraum  $D$  zuordnet.

*Bemerkung 2.2.*

Beispiel eines Funktionenraums ist z.B. die Menge aller Funktionen

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $D \subset \mathbb{R}^n$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar sind. Diesen Funktionenraum bezeichnet man mit  $C^k(D, \mathbb{R})$  und man definiert

$$C^k(D, \mathbb{R}) := \{f | f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ k-mal stetig partiell differenzierbar} \} .$$

Im folgenden wollen wir den Begriff des Gebietes  $D \subset \mathbb{R}^n$  verwenden.

**Definition 2.3.** (Gebiet)

Wir verstehen unter einem Gebiet  $D$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  eine offene Menge mit der Eigenschaft, daß zu je 2 Punkten  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  ein Polygonenzug  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$  existiert, dessen Teilstücke  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , in der Menge  $D$  liegen.

Nun sollen die Operatoren im einzelnen definiert werden.

**Definition 2.4.** (Gradient eines Skalarfeldes)

Sei  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld aus  $C^1(D, \mathbb{R})$ .  
Der Operator *grad* ordnet durch die Vorschrift

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld  $\phi$  das Gradientenfeld  $\operatorname{grad} \phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu. Für den Operator *grad* ergibt sich

$$\operatorname{grad} : C^1(D, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(D, \mathbb{R}^n),$$

also ordnet der Operator *grad* jeder stetig partiell differenzierbaren Funktion  $\phi \in C^1(D, \mathbb{R})$  das stetige Vektorfeld  $\operatorname{grad} \phi \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$  zu.

**Definition 2.5.** (Laplace-Operator  $\Delta$ )

Sei  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein 2-mal stetig partiell differenzierbares Skalarfeld aus  $C^2(D, \mathbb{R})$ .  
Der Operator  $\Delta$  ordnet durch die Vorschrift

$$\Delta \phi := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

dem Skalarfeld  $\phi$  das Skalarfeld  $\Delta \phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  zu. Für den Operator  $\Delta$  ergibt sich

$$\Delta : C^2(D, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(D, \mathbb{R}),$$

also ordnet der Operator  $\Delta$  jeder 2-mal stetig partiell differenzierbaren Funktion  $\phi \in C^2(D, \mathbb{R})$  das stetige Skalarfeld  $\Delta \phi \in C^0(D, \mathbb{R})$  zu.

**Definition 2.6.** (Divergenz eines Vektorfeldes)

Sei  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld aus  $C^1(D, \mathbb{R}^n)$ .  
Der Operator *div* ordnet durch die Vorschrift

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

dem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  das Skalarfeld  $\operatorname{div} \mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}$  zu. Für den Operator *div* ergibt sich

$$\operatorname{div} : C^1(D, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(D, \mathbb{R}),$$

also ordnet der Operator *div* jedem stetig partiell differenzierbaren Vektorfeld  $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  das stetige Skalarfeld  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in C^0(D, \mathbb{R})$  zu.

**Definition 2.7.** (Rotation eines Vektorfeldes)

Sei  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld aus  $C^1(D, \mathbb{R}^3)$ .  
Der Operator *rot* ordnet durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

dem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  das Vektorfeld  $\operatorname{rot} \mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  zu. Für den Operator *rot* ergibt sich

$$\operatorname{rot} : C^1(D, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^0(D, \mathbb{R}^3),$$

also ordnet der Operator *rot* jedem stetig partiell differenzierbaren Vektorfeld  $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$  das stetige Vektorfeld  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in C^0(D, \mathbb{R}^3)$  zu.

*Bemerkung 2.8.* (Nabla-Operator  $\nabla$ )

Im Zusammenhang mit dem Taylorschen Satz wurde der Nabla-Operator schon behandelt. Es gilt für ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld  $\phi$

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi .$$

Andererseits wird auch der Operator  $\nabla \cdot$  verwendet, um einem stetig partiell differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{v}$  aus  $C^1(D, \mathbb{R}^3)$  durch die Vorschrift

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

ein stetiges Skalarfeld zuzuordnen. Wir stellen leicht fest, daß die Beziehung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$$

gilt.

**Definition 2.9.** (Anwendung von  $\text{grad}$ ,  $\Delta$  auf Vektorfelder)

Die Operatoren  $\text{grad}$  und  $\Delta$  haben wir in den Definitionen auf Skalarfelder  $\phi \in C^1(D, \mathbb{R})$  bzw.  $\phi \in C^2(D, \mathbb{R})$  angewandt.

Wir verabreden die Anwendung von  $\text{grad}$  und  $\Delta$  auf Vektorfelder wie folgt. Sei  $\mathbf{v}$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld aus  $C^1(D, \mathbb{R}^n)$  und  $\mathbf{w}$  ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld aus  $C^2(D, \mathbb{R}^n)$ . Dann definieren wir

$$\text{grad } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \text{grad } v_1 \\ \text{grad } v_2 \\ \vdots \\ \text{grad } v_n \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix} ,$$

also die komponentenweise Anwendung der oben definierten Operatoren.

Die Verabredung gilt auch z.B. für den Operator  $\mathbf{w} \cdot \nabla$ , den wir im Zusammenhang mit dem Satz von Taylor verwendet haben, wir setzen

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_1 \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_n \end{pmatrix} .$$

Beispiel 1:

Betrachten wir das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{k}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}, \quad k \neq 0, k \in \mathbb{R},$$

also mit  $\mathbf{x} \in D = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}$  ein Vektorfeld  $\mathbf{K} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Für die Divergenz und die Rotation errechnet man unter Beachtung der Beziehung  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{K}(\mathbf{x}) &= \operatorname{div} \frac{k}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x} = \operatorname{div} \left( \frac{k}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{k x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{k x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{k x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ &= k \left[ \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \right] \\ &= k \left[ \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3} - (3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^5} \right] = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) &= \operatorname{rot} \frac{k}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{k x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{k x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{k x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{k x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{k x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{k x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^5} \begin{pmatrix} 3x_2x_3 - 3x_3x_2 \\ 3x_1x_3 - 3x_3x_1 \\ 3x_2x_1 - 3x_1x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Wenn wir nun das Skalarfeld  $\phi(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\|\mathbf{x}\|}$  betrachten und den Gradienten berechnen, ergibt sich

$$\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} (-k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}) = k \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x} = \mathbf{K}(\mathbf{x}).$$

Die einzelnen Rechnungen sollten zur Übung noch einmal genau nachvollzogen werden.

### 2.3 Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis

Wenn  $\phi$  ein Skalarfeld aus  $C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $D \subset \mathbb{R}^3$ , ist, so kann man vom Vektorfeld  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$  die Jacobi-Matrix  $J_{\mathbf{v}}$  bilden, man erhält

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\operatorname{grad} \phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Dabei stellt man fest, daß die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$  gleich der Hesse-Matrix von  $\phi$  ist. Wenn wir den Begriff der Spur einer Matrix  $A = (a_{ij})$  mit  $\operatorname{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$  verwenden, kann man den Laplace-Operator angewendet auf ein Skalarfeld  $\phi$  auch in der Form

$$\Delta \phi = \operatorname{Spur}(J_{\operatorname{grad} \phi}(\mathbf{x}))$$

schreiben.

**Satz 2.10.** (Rechenregeln)

Sei  $\phi \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $D$  Gebiet aus dem  $\mathbb{R}^3$ , und  $\mathbf{v} \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ , so gelten die Regeln

(1)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \mathbf{0} \quad \text{Satz von Schwarz}$$

(2)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0$$

(3)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \Delta \phi$$

(4)

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{v} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}$$

(5)

$$\operatorname{rot}(\phi \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \phi \times \mathbf{v} + \phi(\operatorname{rot} \mathbf{v})$$

(6)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) - \Delta \mathbf{v}$$

Die Regeln, in denen der Rotationsoperator nicht vorkommt, sind auf  $n$ -dimensionale Vektorfelder und Gebiete  $D$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinerbar.

*Beweis.*

Zum Beweis sei außer dem Hinweis auf eine umfängliche Rechnerei nur darauf hingewiesen, daß die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen benötigt wird.  $\square$

Erinnern wir uns nun nochmal an die beiden Beispiele aus dem vorigen Abschnitt. Mit dem Skalarfeld

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{k}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

können wir das zentrale Kraftfeld  $\mathbf{K}$  in der Form

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

darstellen. Nach der Regel (4) erhält man damit

$$\operatorname{div}(\psi \mathbf{x}) = \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{x} + \psi \operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{x} + 3\psi ,$$

womit die Rechnung de facto auf die Berechnung der Gradienten von  $\psi$  reduziert wird. Dafür rechnet man aus

$$\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) = -\frac{3k}{\|\mathbf{x}\|^5} \mathbf{x} . \quad (65)$$

Andererseits ist

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x})\mathbf{E}\mathbf{x}$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ . Nach der Kettenregel erhält man

$$\mathbf{K}'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{E} + \mathbf{x}\psi'(\mathbf{x}).$$

Man kann die Jacobi-Matrix in der Form

$$J_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{E} + \mathbf{x} \cdot (\text{grad } \psi(\mathbf{x}))^T$$

schreiben und erhält unter Berücksichtigung von (65)

$$J_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^5} (\|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{E} - 3\mathbf{x}\mathbf{x}^T).$$

Wenn man die in der Klammer stehende Matrix genau aufschreibt, erhält man die Diagonalelemente

$$-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2,$$

so daß sich für die Spur der Jacobi-Matrix der Wert Null ergibt! Damit kann man für die Funktion  $\phi$  aus dem Beispiel 2 des vorigen Abschnitts schlußfolgern, daß

$$\text{div } \phi(\mathbf{x}) = \text{Spur}(J_{\text{grad } \phi}(\mathbf{x})) = \text{Spur}(J_{\mathbf{K}}(\mathbf{x})) = 0$$

ist.

## 2.4 Einige hilfreiche formale Berechnungsregeln

Die Definition der Rotation eines Vektorfeldes ist für manchen Studenten (aber auch Dozenten) nicht so einfach zu merken. Deshalb wollen wir einfache Vorschriften zur Rotationsberechnung angeben.

Die formale Berechnung der "Determinante"

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ergibt nach der Sarrus'schen Regel

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \\ & = \text{rot } \mathbf{v}, \end{aligned}$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{e}_j$  die jeweiligen  $j$ -ten kanonischen Basisvektoren bedeuten, und das "Produkt" von  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  und  $v_3$  die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_2} v_3$  bedeutet.

Wenn man das Vektorprodukt beherrscht, kann man die Rotation von  $\mathbf{v}$  auch durch die formale Bildung des Vektorproduktes  $\nabla \times \mathbf{v}$  erhalten, so daß

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

gilt, wobei das "Produkt" von  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  und  $v_3$  wie oben die Bedeutung der Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_2} v_3$  hat.

## 2.5 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Wir hatten zu Beginn des Abschnitts einige partielle DGLn in Operatorform aufgeschrieben. Im folgenden sollen die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} \mathbf{v})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

einmal vollständig ausgeschrieben dargestellt werden.

Dabei ist  $\mathbf{v} \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ ,  $D$  Gebiet im  $\mathbb{R}^3$ , ein Vektorfeld mit  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  und  $p \in C^1(D, \mathbb{R})$  ein Skalarfeld. Wenn wir nun die obigen Definitionen der Operatoren konsequent anwenden, erhalten wir für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_3}) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_3}) \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}) \end{aligned} \quad (68)$$

Für die Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ergibt sich

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \quad (69)$$

Insbesondere bei den Gleichungen (66, 67, 68) wird deutlich, welche Übersichtlichkeit mit der Verwendung der Operatoren der Vektoranalysis möglich wird.

## 2.6 Eine Grundfrage der Vektoranalysis

Im obigen Beispiel 2 haben wir mit dem Skalarfeld  $\phi$  ein Feld gefunden, dessen Gradientenfeld gleich einem Vektorfeld  $\mathbf{K}$  ist.

Generell entsteht bei der Vorgabe eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  die Frage nach der Existenz eines Skalarfeldes, dessen Gradient gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Diese Frage und eine Methode zur evtl. Berechnung des Skalarfeldes werden im nächsten Abschnitt behandelt.

**Definition 2.11.** (Potentialfelder, Gradientenfelder)

Sei  $\mathbf{v}$  ein Vektorfeld. Ein Skalarfeld  $\phi$ , das die Gleichung

$$\operatorname{grad} \phi = \mathbf{v}$$

erfüllt, nennt man ein Potential von  $\mathbf{v}$ .

Wenn es zu einem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  ein Potential  $\phi$  gibt, nennt man  $\mathbf{v}$  in diesem Fall Potentialfeld oder Gradientenfeld (auch der Begriff konservatives Feld wird verwendet).



### 3 Skalare Kurvenintegrale und Gradientenfelder

Ein praktischer Hintergrund der Kurvenintegrale besteht in der Verfolgung und Berechnung von Bahnkurven von Objekten oder "masselosen" Punkten. Zuerst soll der Begriff der Kurve definiert werden.

**Definition 3.1.** (Kurve)

Unter einem Kurvenstück  $\gamma$  im  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma; [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenstück  $\gamma$  heißt regulär, wenn  $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$  für alle  $t \in [t_a, t_e]$  gilt.

Unter einer Kurve  $\gamma$  im  $\mathbb{R}^n$  wollen wir eine endliche Folge von regulären Kurvenstücken  $\gamma_i$  verstehen, mit

$$\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

d.h., der Endpunkt des Kurvenstücks  $\gamma_i$  ist gleich dem Anfangspunkt des Kurvenstücks  $\gamma_{i+1}$ . Wir verwenden die Bezeichnung

$$\gamma : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n],$$

und sprechen bei  $\gamma$  auch von einer stückweise glatten Kurve.

**Definition 3.2.** (Spur einer Kurve)

Unter der Spur einer Kurve  $\gamma : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^n$  verstehen wir die Menge

$$C(\gamma) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{es existiert ein } t \in [t_0, t_n] \text{ mit } \gamma(t) = \mathbf{x}\}.$$

Zur Erinnerung soll noch einmal das Bogenelement  $ds$  einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt$$

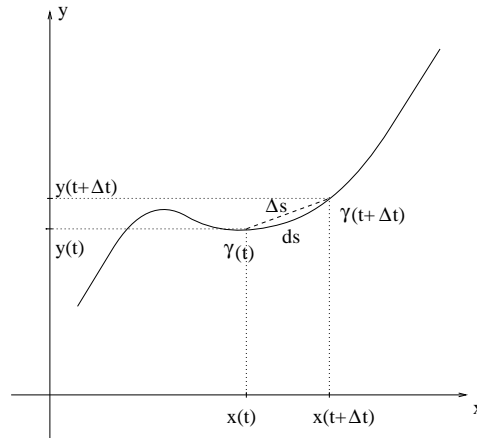
und die Bogenlänge einer Kurve  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ ,  $t \in [t_a, t_e]$

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt$$

erwähnt werden. In der Abbildung 4 ist die anschauliche Grundlage für die Definition des Bogenelements  $ds$  durch die Beschreibung der Größe  $\Delta s$  skizziert.

$L$  verstehen wir dann als Grenzwert der Summe

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta s_j &= \sum_{j=1}^k \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^k \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sum_{j=1}^k \Delta t \sqrt{\left(\frac{x_j(t_{j-1} + \Delta t) - x_j(t_{j-1})}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_j(t_{j-1} + \Delta t) - y_j(t_{j-1})}{\Delta t}\right)^2} \end{aligned}$$

Abbildung 4: Bogenelement  $ds$  und  $\Delta s$ 

und definieren schließlich

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \Delta t \sqrt{\left(\frac{x_j(t_{j-1} + \Delta t) - x_j(t_{j-1})}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_j(t_{j-1} + \Delta t) - y_j(t_{j-1})}{\Delta t}\right)^2} \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Dabei ist  $\Delta t = \frac{t_e - t_a}{k}$  und  $t_j = t_a + j(t_e - t_a)/k$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ , und mit  $\dot{x}_k$  bezeichnet man die Ableitung von  $x_k(t)$  nach  $t$ , also

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}, k = 1, 2.$$

Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von  $\gamma$  bzw.  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  existiert der Limes (70) und ist unabhängig von der Zerlegungsfolge  $t_j$  des Intervalls  $[t_a, t_e]$ .

### 3.1 Kurvenintegral einer Funktion

Als Verallgemeinerung des Bogenelementes einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  formulieren wir die folgende

**Definition 3.3.** (Bogenelement einer Kurve im  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$ . Dann bezeichnen wir mit

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2} dt =: \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

das Bogenelement der Kurve.

**Definition 3.4.** (skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion  $f : C(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf der Spur von einer Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

das Kurvenintegral der Funktion  $f$ .

*Bemerkung 3.5.*

Handelt es sich bei der Kurve um eine aus  $k$  Kurvenstücken  $\gamma_j$  zusammengesetzte Kurve, so ergibt sich das Kurvenintegral in der Form

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f ds .$$

Das Kurvenintegral der Funktion  $f \equiv 1$  ist gleich der Länge der Kurve.

Zur Veranschaulichung des Kurvenintegrals kann man sich etwa vorstellen, daß man entlang einer Kurve durch eine Funktion  $f$  eine Masseverteilung gegeben hat (Masse eines Drahts). Mit dem Kurvenintegral kann man dann die Gesamtmasse berechnen, wobei der in irgendeiner Weise aufgehängte Draht durch die Kurve  $\gamma$  beschrieben wird.

Beispiel 1:

Betrachten wir den Einheitskreis

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

und die Belegungsfunktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Für  $f(\gamma(t))$  errechnet man

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t - \sin^2 t,$$

und für  $\dot{\gamma}(t)$  erhält man

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = 1 .$$

Für das Kurvenintegral der Funktion  $f$  errechnet man schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} [\cos^2 t - \sin^2 t] dt = \int_0^{2\pi} [1 - 2 \sin^2 t] dt \\ &= 2\pi - 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 2\pi - 2 \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 2\pi = 0 . \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Eine Verkehrsmaschine fliegt auf einem nördlichen Breitenkreis (geographische Breite  $\frac{\pi}{4}$ ) von Europa nach Nordamerika. Die Entfernung von Start- und Zielort ist gleich einem Viertel des Breitenkreisumfangs.

Während des Fluges sondert das Flugzeug Schadstoffe nach der Formel

$$f(x, y, z) = c \left[ 1 + \cos \left( 4 \arctan \frac{y}{x} \right) \right]$$

ab. Die jeweilige Flughöhe ist im Vergleich zum Erdradius vernachlässigbar.

Zu berechnen ist die während des Fluges abgegebene Schadstoffmenge.

Wenn wir die Erdoberfläche im  $\mathbb{R}^3$  parametrisieren, erhält man unter Nutzung der Kugelkoordinaten

$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \cos \lambda \\ R \cos \phi \sin \lambda \\ R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}] .$$

Für  $f(\gamma(\lambda))$  errechnet man

$$f(\gamma(\lambda)) = c[1 + \cos(4 \arctan \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda})] = c[1 + \cos(4\lambda)] .$$

Die Geschwindigkeit ist mit  $\dot{\gamma}(\lambda) = \frac{R}{\sqrt{2}}(-\sin \lambda, \cos \lambda, 0)^T$

$$\|\dot{\gamma}(\lambda)\| = \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda} = \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

Damit errechnet man für die gesamte während des Fluges abgegebene Schadstoffmenge mit dem Kurvenintegral

$$M = \int_{\gamma} f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c[1 + \cos(4\lambda)] \frac{R}{\sqrt{2}} d\lambda = \frac{cR}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} .$$

*Bemerkung 3.6.* (Algorithmus zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion)

Bei der Berechnung sind die folgenden Schritte zu vollziehen:

- (1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$
- (2) Berechnung der Funktionswerte  $f(\gamma(t))$  der Belegungsfunktion
- (3) Berechnung der Geschwindigkeit  $\|\dot{\gamma}(t)\|$
- (4) Berechnung des Kurvenintegrals  $\int_{\gamma} f ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ .

**Satz 3.7.** (Rechenregeln mit Kurvenintegralen)

Sei  $\gamma$  eine Kurve und  $f, g : C(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann gelten die Regeln

- (a)  $\int_{\gamma} (f + g) ds = \int_{\gamma} f ds + \int_{\gamma} g ds$  (Additivität des Integrals)
- (b)  $\int_{\gamma} \alpha f ds = \alpha \int_{\gamma} f ds$  (Homogenität des Integrals)
- (c)  $\int_{\gamma} f ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$  (Mittelwertsatz)

Dabei ist  $L$  die Länge der Kurve und  $\gamma(\tau)$  ein geeigneter Kurvenpunkt.

### 3.2 Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve

Sei  $\mathbf{k}$  ein auf der Spur einer Kurve  $\gamma$  definiertes Vektorfeld  $\mathbf{k} : C(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Zur Veranschaulichung stelle man sich  $\mathbf{v}$  als Kraftfeld vor. Möchte man eine punktförmige Masse oder Ladung entlang der Kurve  $\gamma$  durch das Kraftfeld bewegen, hat man Arbeit zu verrichten. Aus dem Physikunterricht wissen wir, daß sich die Arbeit als Produkt der Kraft und des Weges ergibt. Die Arbeit  $\Delta A$ , die auf einem sehr kurzen Wegstück  $\Delta s$  bei der Bewegung der Ladung durch das Kraftfeld  $\mathbf{k}$  verrichtet wird, kann man als Produkt der Tangentialkomponente von  $\mathbf{k}$ , also der in Kurvenrichtung wirksamen Komponente des Kraftfeldes, mit dem Wegstück  $\Delta s$

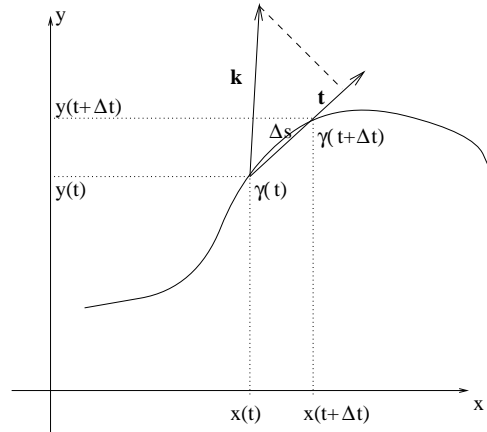
$$\Delta A = \mathbf{k}_t \Delta s$$

verstehen. Die Tangentialkomponente  $\mathbf{k}_t$  der Kraft in Richtung der Kurve ergibt sich durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{t}_{\gamma} \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} .$$

In der Abbildung 5 ist diese Situation skizziert.

In der Abbildung wurde statt dem Kurventangentialvektor der Kurvensekantenvektor skizziert. Führt man den Grenzprozeß  $\Delta t \rightarrow 0$  durch, erhält man neben dem Kurvensekantenvektor den Kurventangentialvektor mit der

Abbildung 5: Kraftvektor  $\mathbf{k}$  und Tangentialkomponente  $\mathbf{k}_t$ , Kurvensekantenvektor  $\mathbf{t}_{s\gamma}$ 

**Definition 3.8.** (Kurvensekantenvektor und Kurventangentialvektor im  $\mathbb{R}^2$ )  
Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve, dann wird durch

$$\mathbf{t}_{s\gamma} = \left( \begin{array}{c} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{array} \right) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t}_\gamma = \left( \begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{array} \right) = \dot{\gamma}(t)$$

der Kurvensekantenvektor des Wegstücks  $\Delta s$  bzw. der Kurventangentialvektor an der Stelle  $\gamma(t)$  definiert.

Mit der Definition 3.8 kann man nun die auf dem Wegstück  $\Delta s$  geleistete Arbeit in der Form

$$\Delta A = (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathbf{t}_{s\gamma}(t)}{\|\mathbf{t}_{s\gamma}(t)\|}) \Delta s = (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \mathbf{t}_{s\gamma}(t)) \Delta t$$

aufschreiben. Betrachtet man die gesamte Arbeit, die beim Bewegen der Ladung entlang der Kurve geleistet wird, erhält man näherungsweise

$$A = \sum_{j=1}^k \Delta A_j = \sum_{j=1}^k (\mathbf{k}(\gamma(t_j)) \cdot \mathbf{t}_{s\gamma}(t_j)) \Delta t.$$

Im Ergebnis des Grenzprozesses  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man als Grenzwert der Riemannschen Summen auf der rechten Seite das Integral

$$\int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) dt,$$

was die folgende Definition rechtfertigt.

**Definition 3.9.** (Arbeitsintegral)

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $\mathbf{k}$  ein auf der Spur von  $\gamma$  definiertes stetiges Vektorfeld  $\mathbf{k} : C(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann wird das Integral des Vektorfeldes entlang der Kurve  $\gamma$  - auch Arbeitsintegral genannt - mit  $\int_\gamma \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}$  bezeichnet und durch

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} := \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) dt \quad (71)$$

definiert.

Besteht die Kurve  $\gamma$  aus den Kurvenstücken  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , so definiert man

$$\int_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}.$$

Wenn  $\gamma$  eine geschlossene Kurve ist, d.h.  $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$  gilt, dann verwendet man statt der Bezeichnung  $\int_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}$  auch die Symbolik

$$\oint_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}.$$

**Satz 3.10.** (Rechenregeln)

Sei  $\gamma$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : C(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Vektorfelder und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gelten die Regeln

$$(a) \int_{\gamma} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma} \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{x}$$

$$(b) \int_{\gamma} \alpha \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

(c) Ist  $\gamma^*$  die Kurve, die aus  $\gamma$  durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h.,  $\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$ ,  $t \in [t_a, t_e]$ , so folgt

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

*Bemerkung 3.11.* (Algorithmus zur Berechnung des Arbeitsintegrals)

Bei der Berechnung sind die folgenden Schritte zu vollziehen:

- (1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$
- (2) Berechnung der Werte  $\mathbf{v}(\gamma(t))$  in den Kurvenpunkten
- (3) Berechnung des Tangentialvektors  $\dot{\gamma}(t)$
- (4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Beispiel:

Ein Mathematikprofessor, der sich im Gegensatz zu Provinzpolitikern keine Putzfrau leisten kann, muß seine Fenster putzen. Welche Arbeit leistet er, wenn er mit einem 10 kg schweren Wassereimer in 5 Sekunden auf die Leiter steigt, die 2 m hoch ist, und 1 m von der Hauswand entfernt steht (Leiter ist  $\sqrt{5} m$  lang und bildet mit der Hauswand ein rechtwinkliges Dreieck mit den 2 und 1 m langen Katheten)?

Diese Aufgabe bedeutet die Berechnung eines Integrals eines Vektorfeldes entlang einer Kurve. Für die Kurve  $\gamma$  ergibt sich damit

$$\gamma(t) = \left( \begin{array}{c} (\frac{t}{5s} - 1)m \\ \frac{2t}{5s}m \end{array} \right), \quad t \in [0, 5s].$$

Das Kraftfeld, durch das sich der Ladungsträger (also der Professor) beim Aufstieg bewegt, ergibt sich nach Newton als Produkt der Masse  $m = 10 \text{ kg}$  und der Erdbeschleunigung  $\mathbf{g} = (0, 9.81 \frac{m}{s^2})^T$ ,

$$\mathbf{k} = m\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 98.1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \end{pmatrix}.$$

Für den Tangentialenvektor  $\dot{\gamma}(t)$  ergibt sich

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5s} m \\ \frac{2}{5s} m \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} A = \int_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{5s} \mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{5s} 98.1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \frac{2}{5} \frac{m}{s} dt \\ &= 39.24 \frac{\text{kg m m}}{\text{s}^2} t \Big|_0^{5s} = 196.2 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} m = 196.2 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

### 3.3 Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Wir hatten im vorigen Kapitel schon den Begriff der Stammfunktion oder des Potentials eines Gradientenfeldes eingeführt.  $f$  heißt Stammfunktion eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$ , wenn

$$\text{grad } f = \mathbf{v}$$

gilt. Im folgenden wird sich zeigen, daß die Kenntnis einer Stammfunktion die Berechnung von Arbeitsintegralen wesentlich erleichtert.

**Satz 3.12.** (erster Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Gradientenfeld mit der Stammfunktion  $f$ . Dann gilt für jede Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)) \quad (72)$$

*Beweis.*

Es gilt unter Nutzung der Kettenregel

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \text{grad } f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt \\ &= f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)) \quad . \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz liefert äquivalente Aussagen zu Kurvenintegralen und Gradientenfeldern, die möglicherweise unnötige Arbeit ersparen.

**Satz 3.13.**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Für alle Kurven  $\gamma$  hängt das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$  nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des Kurvenintegrals.
- (ii) Für alle geschlossenen Kurven  $\gamma$ , d.h.,  $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ , gilt  $\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0$ .
- (iii)  $\mathbf{v}$  ist ein Gradientenfeld.

*Beweis.*

Mit der Eigenschaft

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} .$$

für die Kurve  $\gamma^*$ , deren Endpunkt mit dem Anfangspunkt von  $\gamma$  übereinstimmt und deren Anfangspunkt mit dem Endpunkt von  $\gamma$  übereinstimmt, erhält man sofort für die Kurve  $\gamma^{\#} = [\gamma, \gamma^*]$

$$\oint_{\gamma^{\#}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

Damit ist (i)  $\rightarrow$  (ii) bewiesen.

Betrachtet man nun  $\gamma^*$  als die Kurve, die aus  $\gamma$  durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h.,  $\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$ ,  $t \in [t_a, t_e]$ , so folgt aus (ii) die Wegunabhängigkeit.

Der Nachweis (iii)  $\rightarrow$  (ii) ist offensichtlich.

Der Nachweis (ii)  $\rightarrow$  (iii) ist etwas komplizierter. Man betrachtet dazu ein  $\mathbf{x}_0 \in D$  und kann in  $D$  ein  $\mathbf{x}$  finden, so daß ein Polygonenzug  $\gamma_x = [[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \dots [\mathbf{x}_k, \mathbf{x}]]$  existiert, der vollständig im Gebiet  $D$  liegt. Da  $D$  offen ist, gibt es für jedes  $\mathbf{x} \in D$  ein  $r > 0$  mit  $\mathbf{x} + \mathbf{z} \in D$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\mathbf{z}| < r$ . Wenn wir mit  $\mathbf{e}_j$  den  $j$ -ten Einheitsvektor bezeichnen, so ist für  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h < r$  stets  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j \in D$ . Aufgrund von (iii) ist die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \int_{\gamma_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{für } \mathbf{x} \in D \tag{73}$$

unabhängig vom gewählten Polygonenzug  $\gamma_x$ . Wenn wir die  $j$ -te Komponentenfunktion von  $\mathbf{v}$  mit  $v_j$  bezeichnen, gilt  $v_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_j$ . Wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals gilt

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) = \int_{\gamma_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_j]} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} ,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} &= \frac{1}{h} \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_j]} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{h} \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 v_j(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) dt = v_j(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

aufgrund des Mittelwertsatzes mit einer geeigneten Zwischenstelle  $\tau \in [0, 1]$ . Wegen der Stetigkeit der Komponentenfunktionen  $v_j$  ergibt sich nun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} = v_j(\mathbf{x})$$



und damit

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) .$$

□

Im Beweis des Satzes (3.13) wurde mit der Definition 73 eine Möglichkeit aufgezeigt, ausgehend von einem Potentialfeld  $\mathbf{v}$  eine Stammfunktion  $f$  zu konstruieren. Bevor man allerdings mit dem Integrieren beginnen kann, muß man wissen, ob es sich überhaupt lohnt, d.h., man muß wissen, ob  $\mathbf{v}$  ein Gradientenfeld ist. Im folgenden sollen hinreichende Kriterien für Gradientenfelder besprochen werden.

Dazu wird der Begriff der Doppelpunktfreiheit einer Kurve und die Eigenschaft eines Gebietes benötigt, einfach zusammenhängend zu sein.

**Definition 3.14.**

Eine Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt doppeltpunktfrei, wenn

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2, \quad t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

und  $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$  für  $t \in (t_a, t_e)$  gilt.

Der Begriff "einfach zusammenhängendes" Gebiet soll anschaulich erklärt werden, da der Leser von solchen Begriffen wie Nullhomotopie o.ä. verschont werden soll.

**Definition 3.15.**

Ein Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene, doppeltpunktfreie Kurve in  $D$  stetig auf einen Punkt  $\mathbf{x} \in D$  zusammengezogen werden kann.

*Bemerkung 3.16.*

Im  $\mathbb{R}^2$  bedeutet "einfach zusammenhängend", daß das Gebiet keine Löcher haben darf. Eine Kreisscheibe ist also nicht einfach zusammenhängend.

Im  $\mathbb{R}^3$  kann ein Gebiet ein Loch haben, z.B. ist eine Kugelschale einfach zusammenhängend. Andererseits ist ein Torus nicht einfach zusammenhängend.

Es ist offensichtlich, daß jedes **konvexe** Gebiet **einfach zusammenhängend** ist.

Es ist nun möglich, ein hinreichendes Kriterium für Potentialfelder zu formulieren.

**Satz 3.17.** (*zweiter Hauptsatz für Potentialfelder*)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann ist  $\mathbf{v}$  genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix  $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in D$  symmetrisch ist, also

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

gilt.

Für den Fall  $n = 3$  ist die Symmetrie der Jacobi-Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad .$$

*Beweis.*

Es soll nur gezeigt werden, daß für ein Potentialfeld  $\mathbf{v}$  die Jacobi-Matrix symmetrisch ist, denn der Beweis der anderen Richtung des Satzes wird analog zum Beweis des Satzes 3.13 geführt.

Da  $\mathbf{v}$  stetig differenzierbar ist, und ein  $f$  mit  $\text{grad } f = \mathbf{v}$  existiert, folgt die zweifache stetige Differenzierbarkeit von  $f$ . Damit gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

also

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T \quad .$$

□

Mit dem Satz 3.17 liegt nun ein leicht zu überprüfendes Kriterium für Potentialfelder vor.

Beispiel 1:

Betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \cos(xy) + 2xy \\ xz^2 \cos(xy) + x^2 + z \\ 2z \sin(xy) + y + 2z \end{pmatrix},$$

das auf ganz  $\mathbb{R}^3$  und damit auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist. Nach dem Kriterium 3.17 ist  $\mathbf{v}$  ein Potentialfeld, wenn  $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gilt. Für die Rotation errechnet man

$$\begin{pmatrix} 2zx \cos(xy) + 1 - [x2z \cos(xy) + 1] \\ y2z \cos(xy) - 2zy \cos(xy) \\ z^2 \cos(xy) - xyz^2 \sin(xy) + 2x - [z^2 \cos(xy) - yz^2 x \sin(xy) + 2x] \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

und damit ist  $\mathbf{v}$  ein Potentialfeld.

Beispiel 2:

Wenn wir das Wirbelfeld  $\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  auf  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  betrachten, haben wir mit  $D$  ein Gebiet, das **nicht einfach zusammenhängend** ist. Wenn wir als Kurve  $\gamma$  den Einheitskreis betrachten ( $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ), dann ergibt sich

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi \neq 0,$$

womit  $\mathbf{v}$  nach Satz 3.13 kein Potentialfeld ist.

Die Berechnung der Jacobi-Matrix ergibt mit

$$J_{\mathbf{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \frac{yx}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} & -2 \frac{yx}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

eine **symmetrische Matrix**. Allerdings kann das Kriterium 3.17 nicht angewandt werden, da  $D$  nicht einfach zusammenhängend ist.

Wir haben weiter oben schon die Vorteilhaftigkeit der Kenntnis einer Stammfunktion erkannt, wenn man z.B. an die Integration des Potentialfeldes entlang einer Kurve denkt.

### 3.4 Berechnungsmethoden für Stammfunktionen

Mit dem folgenden Algorithmus soll nun für das Potentialfeld aus Beispiel 1 eine Stammfunktion bestimmt werden.

Man nennt die Methode auch **Ansatzmethode**. Wir gehen davon aus, daß

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz^2 \cos(xy) + 2xy \\ xz^2 \cos(xy) + x^2 + z \\ 2z \sin(xy) + y + 2z \end{pmatrix} = \mathbf{v}(x, y, z) \quad (74)$$

gelten muß.

(1) Aus der Gleichung

$$f_x = yz^2 \cos(xy) + 2xy$$

folgt nach der Integration nach  $x$

$$f(x, y, z) = yz^2 \frac{\sin(xy)}{y} + x^2 y + C(y, z), \quad (75)$$

wobei  $C(y, z)$  eine von  $x$  unabhängige Funktion sein soll.

(2) Das Ergebnis von (1) wird nun nach  $y$  partiell differenziert, man erhält dann

$$f_y = z^2 x \cos(xy) + x^2 + C_y(y, z),$$

so daß sich zur Bestimmung von  $C(y, z)$  mit (74) die Gleichung

$$z^2 x \cos(xy) + x^2 + C_y(y, z) = xz^2 \cos(xy) + x^2 + z \quad \text{bzw.} \quad C_y(y, z) = z$$

ergibt. Die Integration nach  $y$  ergibt

$$C(y, z) = zy + D(z),$$

wobei  $D(z)$  nicht mehr von  $x$  und  $y$ , sondern nur noch von  $z$  abhängt. Aus (75) erhält man damit

$$f(x, y, z) = z^2 \sin(xy) + x^2 y + zy + D(z) \quad (76)$$

(3) Das Ergebnis (76) wird nun partiell nach  $z$  differenziert, und man erhält

$$f_z = 2z \sin(xy) + y + D_z(z),$$

so daß sich zur Bestimmung von  $D(z)$  mit (74) die Gleichung

$$2z \sin(xy) + y + D_z(z) = 2z \sin(xy) + y + 2z \quad \text{bzw.} \quad D_z(z) = 2z$$

ergibt. Die Integration nach  $z$  ergibt schließlich  $D(z) = z^2 + \text{const.}$ , so daß wir mit

$$f(x, y, z) = z^2 \sin(xy) + x^2 y + zy + z^2 + \text{const.}$$

eine Stammfunktion gefunden haben.

Die Punkte (1) bis (3) lassen sich in der beschriebenen Weise zur Berechnung einer Stammfunktion eines vorgegebenen Potentialfeldes anwenden.

Im Beweis des Satzes 3.13 wurde mit

$$f(\mathbf{x}) := \int_{\gamma_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{für } \mathbf{x} \in D$$

eine Stammfunktion für ein vorgegebenes stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{v}$  definiert. Dabei war  $\gamma_x$  ein beliebiger in  $D$  liegender Polygonenzug, der irgendeinen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$  mit dem Punkt  $\mathbf{x} \in D$  verbindet.

Will man die Stammfunktion  $f$  explizit bestimmen, muß man sich einen günstigen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$  und einen günstigen Polygonenzug von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}$  in  $D$  suchen, für den sich das Kurvenintegral leicht berechnen läßt. Falls die Strecke

$$\gamma_x(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad t \in [0, 1]$$

in  $D$  verläuft, hat man das Integral

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dt$$

zu berechnen. Die beschriebene Methode zur Berechnung einer Stammfunktion nennt man **Methode mit dem Kurvenintegral**.

## 4 Integration ebener Bereiche und Oberflächen

### 4.1 Flächeninhalt ebener Bereiche

Ausgehend von der Anschauung, daß man einem Rechteck mit den Kantenlängen  $a$  und  $b$  den Flächeninhalt  $F = a \cdot b$  zuordnet, soll im folgenden der Flächeninhalt von ebenen Objekten bzw. Mengen des  $\mathbb{R}^2$  definiert werden, der mit der anschaulichen Vorstellung des Flächeninhalts übereinstimmt, den wir für spezielle Objekte bereits kennen.

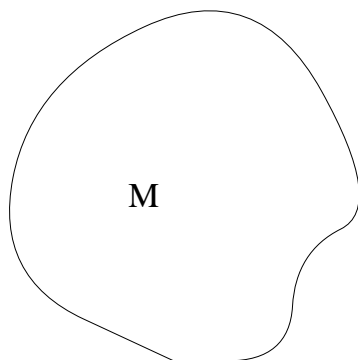


Abbildung 6: Punktmenge  $M \subset \mathbb{R}^2$

Betrachten wir dazu eine Punktmenge des  $\mathbb{R}^2$ , wie sie in Abbildung 6 zu sehen ist. Zur Bestimmung des Flächeninhalts von  $M$  überziehen wir den  $\mathbb{R}^2$  mit einem Gitter der Maschenweite  $h = \frac{1}{2k}$ , d.h., mit wachsenden  $k$  wird das Gitter immer feinmaschiger. In den Abbildungen 7 und 8 ist dies skizziert.

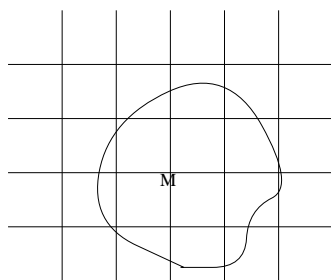


Abbildung 7: Gitter der Maschenweite  $h$

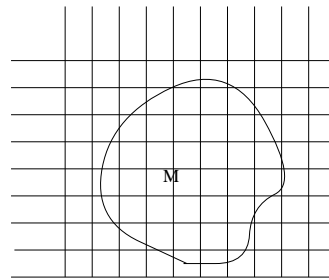


Abbildung 8: Gitter der Maschenweite  $h/2$

Den Flächeninhalt der einzelnen Gittermaschen kennen wir mit  $f_1 = h^2$  bzw.  $f_2 = \frac{h^2}{4}$ . Die einfache Idee der Bestimmung des Flächeninhalts von  $M$  besteht nun in der Näherung durch Gittermaschen, die vollständig in  $M$  liegen bzw. mindestens einen Punkt aus  $M$  enthalten.

**Definition 4.1.**

Mit  $s_k(M)$  bezeichnen wir die Summe aller Flächeninhalte der Gittermaschen, die vollständig in  $M$  enthalten sind.

Mit  $S_k(M)$  bezeichnen wir die Summe aller Flächeninhalte der Gittermaschen, die einen Punkt aus  $M$  enthalten.

*Bemerkung 4.2.*

Bei dem in der Abb. 7 angegebenen Gitter ergeben sich nach meiner Zählung 3 innere Gittermaschen und 17 Maschen, die mindestens einen Punkt von  $M$  enthalten, so daß sich

$$s_1(M) = 3h^2 \quad \text{bzw.} \quad S_1(M) = 17h^2$$

ergibt.

Bei dem in der Abb. 8 angegebenen Gitter ergeben sich nach meiner Zählung 22 innere Gittermaschen und 50 Maschen, die mindestens einen Punkt von  $M$  enthalten, so daß sich

$$s_2(M) = 22 \frac{h^2}{4} = 5.5h^2 \quad \text{bzw.} \quad S_2(M) = 50 \frac{h^2}{4} = 12.5h^2$$

ergibt.

**Korollar 4.3.**

Aufgrund der Definition 4.1 von  $s_k$  und  $S_k$  folgt unmittelbar

$$s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \leq S_{k+1}(M) \leq S_k(M) \quad , \quad (77)$$

was auch in der Bemerkung 4.2 festgestellt wurde.

Damit ist die Folge  $(s_k(M))$  monoton wachsend und nach oben beschränkt und die Folge  $(S_k(M))$  monoton fallend und nach unten beschränkt.

**Korollar 4.4.**

Es existieren die Grenzwerte

$$F_i(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M) \quad \text{und} \quad F_o(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M) .$$

**Definition 4.5.**

$F_i(M)$  wird innerer Inhalt und  $F_o(M)$  äußerer Inhalt von  $M$  genannt. Man sagt, die Menge  $M$  sei Jordan-meßbar oder hat einen Flächeninhalt, wenn

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt, und in diesem Fall wird der Jordan-Inhalt oder Flächeninhalt der Menge  $M$  durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

erklärt.

Für die leere Menge  $\emptyset$  definieren wir  $F(\emptyset) = 0$ . Eine Jordan-meßbare Menge  $N$  mit  $F(N) = 0$  wird eine Jordan-Nullmenge genannt.

*Bemerkung 4.6.*

Der Fall

$$F_i(M) < F_o(M)$$

ist - nicht nur für Ingenieure - schwer vorstellbar, aber möglich. Für die Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$M = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 0, \text{ für rationales } x, \text{ und } y = 1, \text{ für irrationales } x\}$$

findet man tatsächlich

$$0 = F_i(M) < F_o(M) = 1 ,$$

obwohl die Menge  $M$  beschränkt ist.

Im folgenden Satz werden recht offensichtliche Eigenschaften von meßbaren Mengen (wir lassen der Einfachheit halber den Vorsatz "Jordan" weg) zusammengefaßt.

**Satz 4.7.** (*Eigenschaften von meßbaren Mengen und dem Jordan-Inhalt*)

- (a) *Jede Teilmenge einer Jordan-Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge (wir lassen den Vorsatz "Jordan" künftig weg).*
- (b) *Die beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  ist genau dann meßbar, wenn der Rand  $\partial M$  von  $M$  meßbar ist und  $F(\partial M) = 0$  gilt.*
- (c) *Jedes reguläre Kurvenstück des  $\mathbb{R}^2$  ist eine Nullmenge.*
- (d) *Durchschnitt und Vereinigung zweier meßbarer Mengen sind wieder meßbar.*
- (e) *Wenn  $M$  und  $N$  meßbar sind, dann ist auch  $M \setminus N$  meßbar.*
- (f) *Wenn  $M$  und  $N$  meßbar sind und  $M \subset N$  gilt, dann folgt  $F(M) \leq F(N)$  (Monotonie des Inhalts).*
- (g) *Wenn  $M$  und  $N$  meßbar sind und  $M \cap N = \emptyset$  gilt, dann folgt  $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$  (Additivität des Inhalts).*

*Bemerkung 4.8.*

Bis auf die Aussage (b), die aufwendig zu beweisen ist, sind die anderen Aussagen offensichtlich und folgen im wesentlichen aus der Ungleichung (77).

**Definition 4.9.**

Eine beschränkte Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^2$  heißt regulärer Bereich, wenn

- (a)  $B$  abgeschlossen ist,
- (b) das Innere von  $B$ , also  $B \setminus \partial B$  ein Gebiet ist und
- (c) der Rand  $\partial B$  von  $B$  aus endlich vielen regulären Kurven besteht.

## 4.2 Riemannsches Doppelintegral

Im folgenden verwenden wir, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, den Begriff Bereich  $B$  für einen ebenen, regulären Bereich, aus dem evtl. auch eine Nullmenge entfernt wurde.

**Definition 4.10.**

Unter dem **Durchmesser** von  $C$  wollen wir

$$\text{diam}(C) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}$$

verstehen.

*Bemerkung 4.11.*

Man überlegt sofort, daß die Menge

$$M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, a, b > 0\}$$

ebenso wie die Menge

$$N = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b, a, b > 0\}$$

den Durchmesser

$$\text{diam}(M) = \text{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

hat. Im Falle von abgeschlossenen Mengen ist das Supremum in der Definition 4.10 gleich dem Maximum.

**Definition 4.12.** (Zerlegung)

Unter einer Zerlegung  $Z$  von  $B$  verstehen wir eine Familie<sup>8</sup>

$$\{B_j | j = 1, \dots, k\}$$

von Teilbereichen mit den Eigenschaften

- (a)  $\cup_{j=1}^k B_j = B$ ,
- (b) für  $i \neq j$  ist  $B_i \cap B_j$  eine Nullmenge.

Die Feinheit  $\delta(Z)$  einer Zerlegung  $Z$  ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\text{diam}(B_j) | j = 1, \dots, k\}$$

definiert. Eine Folge  $(Z_k)$  von Zerlegungen heißt zulässig, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(Z_k) = 0$$

gilt.

*Bemerkung 4.13.*

Die in der Abbildung 6 skizzierte Punktmenge  $M$  könnte man durch die Zerlegung

$$Z = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{17}\},$$

die in der Abbildung 9 skizziert ist, "zerlegen" (man muß hier auch die sehr, sehr kleinen Teilbereiche mitzählen). Die Feinheit wäre in diesem Fall  $\delta(Z) = h\sqrt{2}$ .

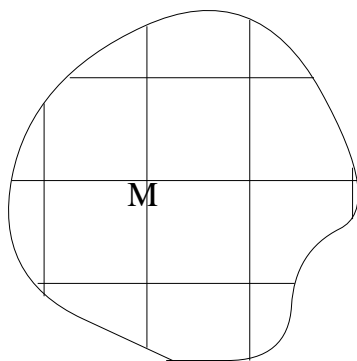


Abbildung 9: Zerlegung von  $M \subset \mathbb{R}^2$

---

<sup>8</sup>Unter einer Familie versteht man hier eine Menge von Mengen



**Definition 4.14.** (Riemannsche Zwischensumme)

Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion, für die eine Nullmenge  $N \subset B$  existiert, so daß  $f$  auf  $B \setminus N$  stetig ist. Wenn  $Z = \{B_j | j = 1, \dots, k\}$  eine Zerlegung von  $B$  ist und  $\mathbf{x}_j \in B_j$  beliebige Punkte sind (werden Zwischenpunkte genannt), dann heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) F(B_j)$$

**Riemann'sche Zwischensumme** der Funktion  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$  und den vorgegebenen Zwischenpunkten.

**Satz 4.15.**

Unter den Voraussetzungen an  $f$  aus der Definition 4.14 konvergiert für jede Folge zulässiger Zerlegungen  $(Z_k)$  des Bereiches  $B$  die Folge der Riemannschen Zwischensummen  $(S(f, Z_k))$ . Der Grenzwert  $I$  ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge zulässiger Zerlegungen  $(Z_k)$  und von der Wahl der Zwischenpunkte.

*Bemerkung 4.16.*

Der Satz 4.15 hat die gleiche Bedeutung wie die entsprechende Aussage für die Riemannschen Summen bzw. das Riemann-Integral von Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Der Satz 4.15 rechtfertigt die Definition

**Definition 4.17.** (Riemannsches Doppelintegral)

Unter den Voraussetzungen an  $f$  aus 4.14 und 4.15 nennt man  $I$  das **Riemannsche Integral** der Funktion  $f$  über den Bereich  $B$ , und man verwendet die Schreibweise

$$\int \int_B f dF = \int \int_B f(x, y) dF = \int \int_B f(x, y) dx dy .$$

*Bemerkung 4.18.*

(a) Für jeden Bereich  $B \subset \mathbb{R}^2$  gilt offensichtlich

$$\int \int_B 1 dF = F(B) .$$

(b) Wenn  $f \geq 0$  ist, so beschreibt

$$K = \{(x, y, z)^T | (x, y)^T \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ . Das Doppelintegral  $\int \int_B f dF$  definiert dann das Volumen  $V(K)$ .

**Satz 4.19.** (Eigenschaften des Riemannschen Doppelintegrals)

Seien  $B$  ein Bereich und  $f, g$  zwei auf  $B$  definierte beschränkte Funktionen, die in allen Punkten von  $B$  mit Ausnahme einer Nullmenge stetig sind sowie  $\alpha$  eine reelle Zahl. Dann gelten die Aussagen

(a)

$$\int \int_B (f + g) dF = \int \int_B f dF + \int \int_B g dF \quad (\text{Additivität des Integrals})$$

$$\int \int_B \alpha f dF = \alpha \int \int_B f dF \quad (\text{Homogenität des Integrals})$$

(b)

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } \int \int_B f \, dF \leq \int \int_B g \, dF \quad (\text{Monotonie des Integrals})$$

(c) Wenn  $B_1$  und  $B_2$  zwei Bereiche mit  $B_1 \cup B_2 = B$  und  $F(B_1 \cap B_2) = 0$  sind, so gilt

$$\int \int_{B_1} f \, dF + \int \int_{B_2} f \, dF = \int \int_B f \, dF \quad (\text{Bereichsadditivität des Integrals})$$

(d) Wenn  $B$  ein regulärer Bereich ist und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so gibt es einen Punkt  $\mathbf{x}^* \in B$  mit

$$\int \int_B f \, dF = f(\mathbf{x}^*)F(B) \quad (\text{Mittelwertsatz}).$$

### 4.3 Normalbereiche und die konkrete Doppelintegralberechnung

Zur praktischen Berechnung des Inhalts von Bereichen bzw. von Riemannschen Doppelintegralen muß man die Bereiche mathematisch fassen. Die einfachste Form eines Bereiches ist ein Rechteck der Art

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y)^T \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Allgemeinere Bereiche beschreibt man mit der Definition

**Definition 4.20.** (Normalbereiche)

Ein Bereich  $B_1 \subset \mathbb{R}^2$  heißt Normalbereich vom Typ I, wenn es ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  und zwei stetig differenzierbare Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$g(x) \leq h(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \text{ und } B_1 = \{(x, y)^T \mid x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Ein Bereich  $B_2 \subset \mathbb{R}^2$  heißt Normalbereich vom Typ II, wenn es ein abgeschlossenes Intervall  $[c, d]$  und zwei stetig differenzierbare Funktionen  $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$g(x) \leq h(x) \text{ für alle } x \in [c, d] \text{ und } B_2 = \{(x, y)^T \mid y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

*Bemerkung 4.21.*

Es ist offensichtlich, daß Rechteckbereiche Normalbereiche vom Typ I und vom Typ II sind. Einen Viertelkreis  $V$  (1. Quadrant, Radius  $R$ ) kann man durch

$$V = \{(x, y)^T \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

als Normalbereich vom Typ I und durch

$$V = \{(x, y)^T \mid 0 \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}$$

als Normalbereich vom Typ II darstellen.

Ein Halbkreis  $H$  (1. Quadrant und 2. Quadrant, Radius  $R$ ) kann man durch

$$H = \{(x, y)^T \mid -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

als Normalbereich vom Typ I und durch

$$H = \{(x, y)^T \mid 0 \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}$$

als Normalbereich vom Typ II darstellen.

**Satz 4.22.** (Doppelintegral über Rechteckbereiche)

Wenn  $B = [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, so gilt

$$\int \int_B f \, dF = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy .$$

*Beweis.*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq i, j \leq n$ , dann erhält man mit

$$R_{i,j}^n = \left\{ (x, y)^T \mid a + \frac{i-1}{n}(b-a) \leq x \leq a + \frac{i}{n}(b-a), c + \frac{j-1}{n}(d-c) \leq y \leq c + \frac{j}{n}(d-c) \right\}$$

mit

$$Z_n = \{R_{i,j}^n \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

eine Folge zulässiger Zerlegungen ( $Z_n$ ) des Rechtecks  $B$ . Mit  $\mathbf{x}_{i,j}^* = (x_i^*, y_j^*)^T \in R_{i,j}^n$  ist

$$S(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \frac{(b-a)^2}{n^2} = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} .$$

Wenn ein beliebiges  $\epsilon > 0$  vorgegeben ist, so kann man nach der Definition des Riemannintegrals für Funktionen einer Veränderlichen ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\left| \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \frac{b-a}{n} - \int_c^d f(x_i^*, y) \, dy \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

finden. Aufgrund der Integrierbarkeit der Funktion  $x \rightarrow \int_c^d f(x, y) \, dy$  folgt für  $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_c^d f(x_i^*, y) \, dy \frac{b-a}{n} - \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} .$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} |S(f, Z_n) - \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx| & \qquad (78) \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \frac{b-a}{n} - \int_c^d f(x_i^*, y) \, dy \right| \frac{b-a}{n} \\ & + \left| \sum_{i=1}^n \int_c^d f(x_i^*, y) \, dy \frac{b-a}{n} - \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

□

Das Ergebnis des Satzes 4.22 kann man wie folgt auf Normalbereiche vom Typ I und II verallgemeinern, wobei der Beweis ähnlich wie beim Satz 4.22 verläuft.

**Satz 4.23.** (Doppelintegral über Normalbereiche)

(a) Wenn  $B$  ein Normalbereich vom Typ I der Form

$$B = \{(x, y)^T \mid x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\int \int_B f \, dF = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx .$$

(b) Wenn  $B$  ein Normalbereich vom Typ II der Form

$$B = \{(x, y)^T \mid y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\int \int_B f \, dF = \int_c^d \left[ \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right] dy .$$

**Korollar 4.24.**

Sei  $B$  ein Bereich, der sich als eine endliche Vereinigung  $B = \cup_{j=1}^k B_j$  von Normalbereichen  $B_j$  darstellen läßt, die vom Typ I oder II sind, so daß für  $i \neq j$  die Menge  $B_i \cap B_j$  eine Kurve oder Nullmenge ist. Dann gilt für eine stetige Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int \int_B f \, dF = \sum_{j=1}^k \int \int_{B_j} f \, dF .$$

*Bemerkung 4.25.*

Mit den Sätzen 4.22 und 4.23 sowie der Folgerung 4.24 ist es nun möglich mit den Kenntnissen der Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen auf dem Wege der "iterierten Integration" Doppelintegrale zu berechnen.

Dabei kann man davon ausgehen, daß sämtliche praktisch interessanten Integrationsbereiche als Vereinigung von ebenen Normalbereichen darstellbar sind.

#### 4.4 Satz von Green

Mit dem Satz von Green soll ein Zusammenhang zwischen einem Doppelintegral über einen Bereich und einem Kurvenintegral der Randkurve des Bereichs hergestellt werden. Dazu wird der Begriff der Orientierung einer geschlossenen Kurve benötigt.

**Definition 4.26.** (positive Orientierung)

Sei  $B$  ein Bereich mit dem Rand  $\partial B$ , der aus endlich vielen geschlossenen Kurven  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  bestehe. Die Kurven seien parametrisiert, so daß für jede von ihnen eine Durchlaufrichtung definiert ist.

Der Rand von  $B$  heißt **positiv orientiert**, wenn beim Durchlaufen jeder einzelnen Randkurve  $\gamma_j$  der Bereich  $B$  zur Linken liegt.

*Bemerkung 4.27.*

Der Rand des Einheitskreises ist mit der parametrisierten Randkurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

**positiv orientiert.**

Das Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d]$  hat die Randkurve  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ , wobei die Parametrisierungen

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [c, d],$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} b + a - t \\ d \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ c + d - t \end{pmatrix}, \quad t \in [c, d],$$

eine positive Orientierung von  $\gamma = \partial R$  ergeben.

Um den Satz von Green herzuleiten, betrachten wir ein auf dem Rechteck  $R$  definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{v} : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit den Komponentenfunktionen  $v_1, v_2$ . Wir stellen fest, daß  $\dot{\gamma}_1 = (1, 0)^T$ ,  $\dot{\gamma}_2 = (0, 1)^T$ ,  $\dot{\gamma}_3 = (-1, 0)^T$  und  $\dot{\gamma}_4 = (0, -1)^T$  gilt. Damit erhält man für das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_a^b v_1(x, c) dx + \int_c^d v_2(b, y) dy - \int_a^b v_1(x, d) dx - \int_c^d v_2(a, y) dy \\ &= \int_a^b [v_1(x, c) - v_1(x, d)] dx + \int_c^d [v_2(b, y) - v_2(a, y)] dy \\ &= - \int_a^b \left[ \int_c^d \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} dy \right] dx + \int_c^d \left[ \int_a^b \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int \int_R \left[ \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} \right] dF, \end{aligned}$$

womit

$$\int_{\partial R} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_R \left[ \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} \right] dF$$

gezeigt wurde. Wenn man ein Gebiet durch achsenparallele Rechtecke approximiert, beweist man auf eine ähnliche Weise wie eben den

**Satz 4.28.** (Satz von Green)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $B \subset D$  ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen positiv orientierten Kurven bestehe, und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_B \left[ \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} \right] dF. \quad (79)$$

Beispiele:

1) Sei  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $\gamma$  die Randkurve eines Bereiches  $B \subset D \subset \mathbb{R}^2$ . Der Normalenvektor  $\mathbf{n}(t)$  in einem Randpunkt  $\gamma(t)$ ,  $t \in [t_a, t_e]$  mit dem Tangentialvektor  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T$  ist durch

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} -\dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u,$$

und damit ergibt sich aus dem Satz von Green

$$\begin{aligned} \int \int_B \Delta u dF &= \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_{t_a}^{t_e} \text{grad} u(\gamma(t)) \cdot \mathbf{n}(t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t) dt = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds. \end{aligned}$$

2) Ziel ist die Berechnung des Flächeninhalts des Bereiches  $B$ , der von der **Hyperzykloide** berandet wird. Die Hyperzykloide ist durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos(2t) \\ 2 \sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

positiv orientiert. Man führt nun mit

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld ein, für das

$$\frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = 1$$

gilt. Für  $\dot{\gamma}(t)$  ergibt sich

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2(\sin t + \sin(2t)) \\ 2(\cos t - \cos(2t)) \end{pmatrix},$$

damit ergibt sich aus dem Green'schen Satz

$$\begin{aligned} F(B) &= \int \int_B dF = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-x_2(t)\dot{x}_1(t) + x_1(t)\dot{x}_2(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-(2 \sin t - \sin(2t))(-2(\sin t + \sin(2t))) \\ &\quad + (2 \cos t + \cos(2t))(2(\cos t - \cos(2t)))] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-8 \cos^3 t + 6 \cos t + 2] dt = 2\pi \end{aligned}$$

Aus dem letzten Beispiel kann man die folgende Aussage direkt schlußfolgern.

**Korollar 4.29.** (Flächeninhaltsformel)

Sei  $B$  ein Bereich, der von der doppeltpunktfreien geschlossenen Kurve  $\gamma = \partial B : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eingeschlossen wird. Dann ergibt sich für den Flächeninhalt des Bereiches  $B$  die Formel

$$F(B) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_e} [-x_2(t)\dot{x}_1(t) + x_1(t)\dot{x}_2(t)] dt.$$

#### 4.5 Transformationsformel für Doppelintegrale

Wenn wir uns an die HM I bzw. die Integration von Funktionen einer reellen Veränderlichen erinnern, dann hat die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \quad \text{mit } x = \phi(t), \phi \text{ injektiv,}$$

oft zur erfolgreichen Bestimmung einer Stammfunktion beigetragen. Diese Regel soll nun für den Fall von Doppelintegralen verallgemeinert werden.

**Definition 4.30.** (Koordinatentransformation)

Seien  $D$  und  $D'$  zwei Gebiete aus dem  $\mathbb{R}^2$ . Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion<sup>9</sup>

$$\mathbf{x} : D \rightarrow D', \quad \mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatentransformation, wenn die Abbildung  $\mathbf{x}$  injektiv ist und wenn für alle  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u, v)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt.

Man kann sich etwa vorstellen, daß durch  $\mathbf{x}$  Geraden des  $\mathbb{R}^2$  der Form  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  auf reguläre Kurven mit den Tangentialvektoren

$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

abgebildet werden, wobei diese wegen  $\det \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} \neq 0$  linear unabhängig sein müssen und nicht gleich dem Nullvektor sein dürfen. Die Kurven werden **Koordinatenlinien** genannt. Aufgrund der von  $\mathbf{x}$  geforderten Eigenschaften folgt für einen regulären Bereich  $B \subset D$ , daß auch  $B' = \mathbf{x}(B) \subset D'$  ein regulärer Bereich ist. Somit kann man z.B. aus einer Gitterzerlegung

$$Z = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$$

des regulären Bereichs  $B$  mit  $\mathbf{x}(B_j) = B'_j$  eine Zerlegung

$$Z' = \{B'_1, B'_2, \dots, B'_k\}$$

von  $B'$  erhalten.  $Z'$  wird die Bildzerlegung von  $Z$  unter  $\mathbf{x}$  genannt. In der Abb. 10 ist der Übergang von  $B$  nach  $B'$  durch  $\mathbf{x}$  skizziert.

Aufgrund der Kompaktheit von  $B$  sowie der Beschränktheit der Ableitungen von  $x(u, v)$  und  $y(u, v)$  kann man folgern, daß im Falle der Zulässigkeit der Zerlegungsfolge  $(Z_n)$  auch die Folge der Bildzerlegungen  $(Z'_n)$  zulässig für  $B'$  ist.

Betrachten wir nun ein Gitterrechteck der Form

$$B_j = \left\{ \begin{pmatrix} u_j + t \\ v_j + s \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq h, 0 \leq s \leq k \right\},$$

wobei  $h$  und  $k$  die Kantenlängen des Rechtecks sind, so kann der Bildbereich

$$B'_j = \{ \mathbf{x}(u_j + t, v_j + s) \mid 0 \leq t \leq h, 0 \leq s \leq k \}$$

in erster Näherung durch das Parallelogramm

$$P_j = \{ \mathbf{x}(u_j, v_j) + t\mathbf{x}_u(u_j, v_j) + s\mathbf{x}_v(u_j, v_j) \mid 0 \leq t \leq h, 0 \leq s \leq k \}$$

<sup>9</sup>Bei der Integration betrachten wir bekanntermaßen Bereiche im Unterschied zu Gebieten. Der Begriff des Gebietes wird hier nur erforderlichlich, weil wir Differenzierbarkeitseigenschaften sinnvollerweise auf offenen Mengen fordern, also auf Gebieten.

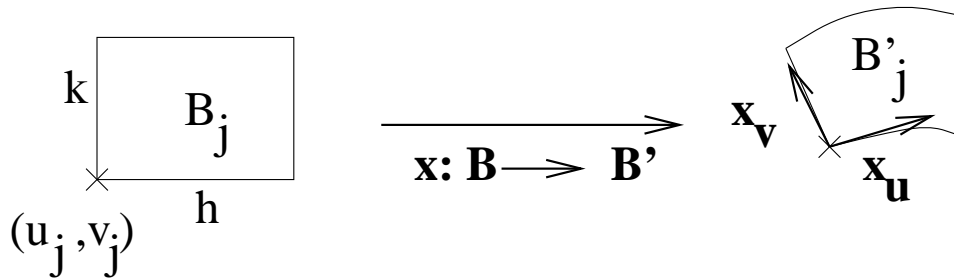


Abbildung 10: Koordinatentransformationen

dargestellt werden. Für den Flächeninhalt von  $P_j$  errechnet man mit dem Sinus-Satz<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}
 F(P_j) &= \|h\mathbf{x}_u(u_j, v_j)\| \cdot \|k\mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot |\sin(\angle(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v))| \\
 &= hk \|\mathbf{x}_u(u_j, v_j)\| \cdot \|\mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot |\sin(\angle(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v))| \\
 &= \sqrt{\|\mathbf{x}_u\|^2 \cdot \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2} hk \\
 &= \sqrt{x_u^2 x_v^2 + y_u^2 x_v^2 + x_u^2 y_v^2 y_u^2 y_v^2 - x_u^2 x_v^2 - 2x_u x_v y_u y_v - y_u^2 y_v^2} hk \\
 &= \sqrt{x_u^2 y_v^2 - 2x_u x_v y_u y_v + y_u^2 x_v^2} hk = \sqrt{(x_u y_v - y_u x_v)^2} hk \\
 &= |\det(J_{\mathbf{x}}(u, v))| F(B_j) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot F(B_j) .
 \end{aligned}$$

D.h.,  $F(B'_j)$  ist in erster Näherung gleich  $|\det(J_{\mathbf{x}}(u, v))| F(B_j)$ . Wenn nun  $f : B' \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, so definiert sie durch die Substitution

$$g(u, v) = f(\mathbf{x}(u, v))$$

eine stetige Funktion  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Für die Zwischenpunkte  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)^T$  erhält man die Zwischenpunkte  $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(\mathbf{u}_j)$ . Damit ergibt die Zerlegung  $Z' = \{B'_1, B'_2, \dots, B'_k\}$  die Riemannsche Summe

$$S(f, Z') = \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) F(B'_j) ,$$

die in erster Näherung gleich der Riemannschen Summe  $\sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_j)) F(P_j)$  ist, also erhalten wir

$$S(f, Z') = \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) F(B'_j) \approx \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_j)) F(P_j) = \sum_{j=1}^k g(\mathbf{u}_j) |\det(J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}))| F(B_j) .$$

Betrachtet man für eine zulässige Zerlegungsfolge  $(Z_n)$  von  $B$  die am weitesten rechts stehende Riemannsche Summe, so konvergiert die Folge

$$S(g \cdot |\det(J_{\mathbf{x}})|, Z_n) \quad \text{gegen} \quad \iint_B g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv .$$

Da die Riemannschen Summen  $S(g \cdot |\det(J_{\mathbf{x}})|, Z_n)$  und  $S(f, Z'_n)$  in erster Näherung gleich sind, ergibt sich der

<sup>10</sup>Unter Nutzung der Identität  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  und der Anwendung des Kosinus-Satzes wird  $\sin \alpha$  eliminiert.



**Satz 4.31.** (*Substitutionsregel für Doppelintegrale*)

$$\int \int_{\mathbf{x}(B)} f \, dF = \int \int_{B'} f(x, y) \, dx dy = \int \int_B f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dudv. \quad (80)$$

*Bemerkung 4.32.*

Die Regel (80) ist auch dann erfüllt, wenn für endlich viele Punkte aus  $B$  die Bedingung  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  nicht erfüllt ist.

Das ist besonders bei Koordinatentransformationen von kartesischen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten von Bedeutung.

## 4.6 Integration über Flächen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir ein Instrumentarium zur Bestimmung des Flächeninhalts ebener Bereiche bzw. zur Berechnung von Riemannschen Doppelintegralen erarbeitet. Nun soll das Problem der Berechnung des Flächeninhalts von Flächen im Raum ( $\mathbb{R}^3$ ) behandelt werden. Als Beispiel sei hier die Berechnung der Kugeloberfläche genannt. Als Mittel zur Berechnung des Inhalts von Oberflächen werden wir schließlich das Oberflächenintegral erklären. Im Falle ebener Bereiche haben wir mit den Normalbereichen eine mathematische Beschreibung, die die Integration ermöglicht. Für Flächen im  $\mathbb{R}^3$  sollen nun mathematische Beschreibungsmöglichkeiten diskutiert werden. Wir betrachten die Darstellung einer Fläche hauptsächlich

(a) als Graph einer Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mid (x, y)^T \in B \right\},$$

(b) parametrisiert, als Ergebnis der Abbildung  $\mathbf{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $B \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \mid (u, v)^T \in B \right\} \quad \text{und}$$

(c) implizit, als Lösungsmenge einer Gleichung

$$F(x, y, z) = 0.$$

Man sieht, daß die Darstellung als Graph einer Funktion eine spezielle Parametrisierung, also ein Spezialfall von (b) ist. Im folgenden wollen wir uns auf den Fall einer durch  $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierten Fläche  $S$  konzentrieren.

**Definition 4.33.** (Parametrisierung eines Flächenstücks)

Es seien  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $B \subset D$  ein regulärer Bereich. Sei  $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Einschränkung von  $\mathbf{x}$  auf  $B$  wird Parametrisierung eines regulären Flächenstücks genannt, wenn

(1)  $\mathbf{x}$  injektiv ist, und

(2) für alle  $(u, v)^T \in B$

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq \mathbf{0} \quad \text{ist.}$$

Die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v)^T \in B\} =: \mathbf{x}(B)$$

ist dann das von der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}$  dargestellte Flächenstück und wird reguläres Flächenstück genannt.

*Bemerkung 4.34.*

Die Bedingung (2) besagt, daß die Tangentialvektoren<sup>11</sup> an die Parameterlinien

$$\{\mathbf{x}(u, v_0) | (u, v_0)^T \in B\} \quad \{\mathbf{x}(u_0, v) | (u_0, v)^T \in B\}$$

im Punkte  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  linear unabhängig sind. Diese Tangentialvektoren spannen im  $\mathbb{R}^3$  eine den Punkt  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  enthaltende Ebene

$$E = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v_0) + \alpha \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \beta \mathbf{x}_v(u_0, v_0) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

auf, die die **Tangentialebene** an die Fläche  $S$  im Punkt  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  darstellt.

*Bemerkung 4.35.*

Wenn wir in  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein reguläres Kurvenstück  $\mathbf{u} : [a, b] \rightarrow B$ ,  $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))^T$  betrachten, das durch  $\mathbf{u}(t_0) = (u_0, v_0)$ ,  $t \in (a, b)$  verläuft, so ist durch

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t)) \quad t \in [a, b]$$

ein Kurvenstück definiert, das ganz in der Fläche  $S$  liegt und durch den Punkt  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  geht. Mit der Kettenregel errechnet man für den Tangentialvektor

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \dot{v}(t_0).$$

Für die Bogenlänge  $s(t)$  der Kurve  $\gamma$  erhält man

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_a^t \sqrt{\mathbf{x}_u(\gamma(t))^2 \dot{u}^2(t) + 2\mathbf{x}_u(\gamma(t))\mathbf{x}_v(\gamma(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \mathbf{x}_v(\gamma(t))^2 \dot{v}^2(t)} dt \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun mit

$$E(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v)^2 \quad F(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) \quad \mathbf{x}_v(u, v)^2$$

die **metrischen Fundamentalgrößen** des Flächenstücks.

Sie bestimmen die Länge von Kurven auf der Fläche, den Schnittwinkel von Kurven auf der Fläche und den Inhalt von Teilflächenstücken. Für die Bogenlänge gilt speziell

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E(\gamma(t))\dot{u}^2(t) + 2F(\gamma(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G(\gamma(t))\dot{v}^2(t)} dt.$$

Wenn wir uns an die Betrachtungen bei der Transformationsformel für Doppelintegrale erinnern ergibt sich für den Flächeninhalt des von den Vektoren  $\mathbf{x}_u$  und  $\mathbf{x}_v$  aufgespannten Parallelogramms

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

<sup>11</sup>Unter  $\mathbf{x}_u(u, v)$  bzw.  $\mathbf{x}_v(u, v)$  sollen die Vektoren  $(x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))^T$  bzw.  $(x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))^T$ , also die komponentenweise Ableitung des Vektors  $\mathbf{x}(u, v)$  nach  $u$  bzw.  $v$  verstanden werden.

Beispiel:

Läßt man den Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  um die  $y$ -Achse rotieren, entsteht für  $x \in [0, 1]$  eine Fläche. Eine mögliche Parametrisierung findet man mit

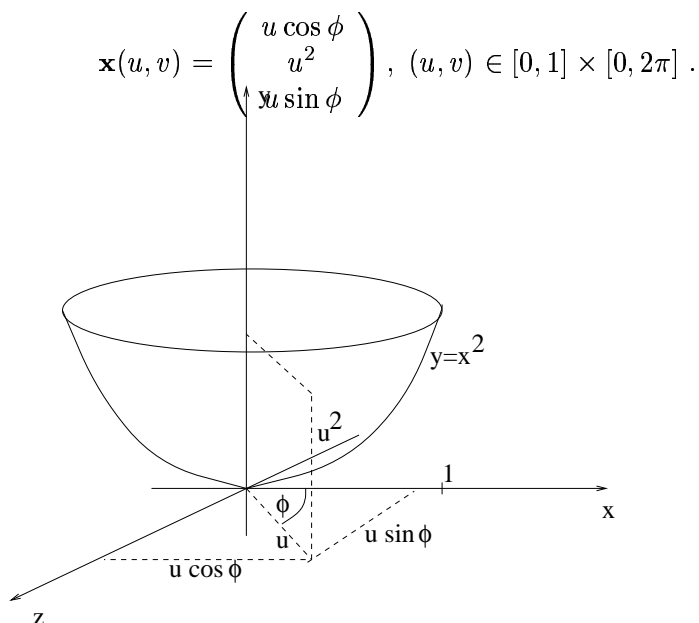


Abbildung 11: Parametrisierung eines Rotationskörpers

**Definition 4.36.**

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$  heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es endlich viele reguläre Flächenstücke  $S_1, \dots, S_p$  gibt, die höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam besitzen und für die

$$S = \cup_{j=1}^p S_j$$

gilt.

**4.6.1 Oberfläche eines regulären Flächenstücks**

Im folgenden soll der Flächeninhalt regulärer Flächenstücke definiert werden. Dazu betrachten wir den regulären Bereich  $B$  und die auf  $B$  definierte Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Wie im Fall der Definition des Flächeninhalts ebener Bereiche überlagern wir  $B$  mit einem Rechteckgitter, dessen Maschen die Länge  $h$  bzw.  $k$  haben. Das Rechteck  $B_j$  erklären wir durch

$$B_j = \{(u, v)^T \mid u \in [u_j, u_j + h], v \in [v_j, v_j + h]\},$$

wobei  $B_j \subset B$  sein soll. Für  $(u, v)^T \in B_j$  gilt die Näherungsaussage

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u_j, v_j) + \mathbf{x}_u(u_j, v_j)(u - u_j) + \mathbf{x}_v(u_j, v_j)(v - v_j) + o(h^2, k^2),$$

und damit kann man das Flächenstück  $S_j = \mathbf{x}(B_j)$  (siehe auch Abb. 12) in erster Näherung durch das Parallelogramm

$$P_j = \{\mathbf{x}(u_j, v_j) + \mathbf{x}_u(u_j, v_j)s + \mathbf{x}_v(u_j, v_j)t \mid s \in [0, h], t \in [0, k]\}$$

beschreiben. Für den Flächeninhalt des Parallelogramms berechnet man

$$\begin{aligned} F(P_j) &= \|\mathbf{x}_u(u_j, v_j) \times \mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot h \cdot k \\ &= \|\mathbf{x}_u(u_j, v_j) \times \mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot F(B_j) \\ &= \sqrt{EG - F^2} \cdot F(B_j), \end{aligned}$$

und für kleine  $h, k$  kann man  $F(P_j)$  als eine erste Näherung des Flächeninhalts von  $S_j$  ansehen.

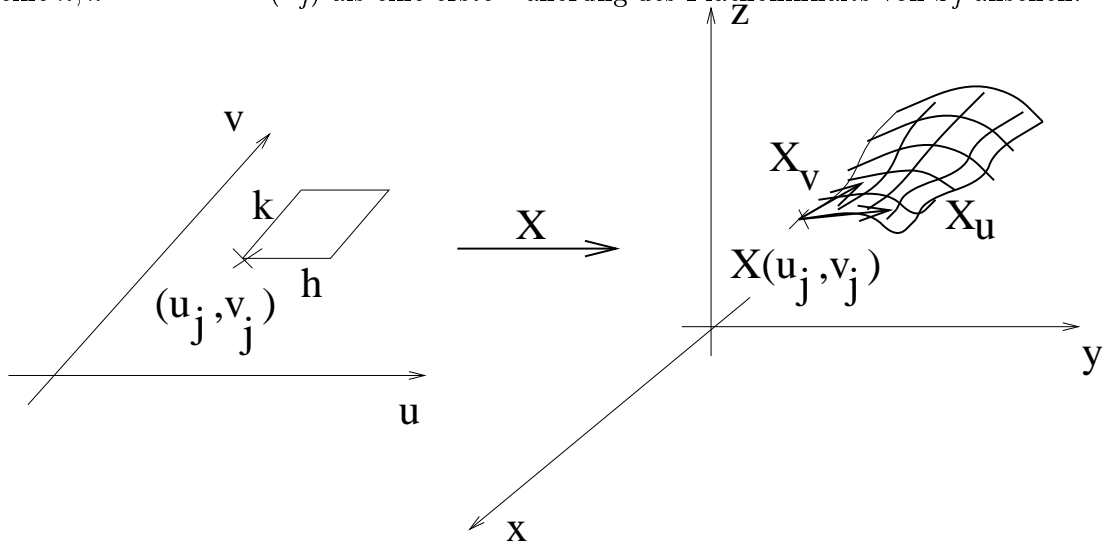


Abbildung 12: Übergang von  $B_j$  mittels  $\mathbf{x}$  zu  $S_j$

Ähnlich wie bei den ebenen Flächeninhalten überdecken wir  $B$  nun mit einem Rechteckgitter und bezeichnen mit

$$O_i(S, h, k) = \sum_{j=1}^{n_i} O(P_j) = \sum_{j=1}^{n_i} \|\mathbf{x}_u(u_j, v_j) \times \mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot F(B_j) \quad (81)$$

die Untersumme des Flächeninhalts von  $S$ , wobei für  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  gilt:

$$B_j \text{ ist Teil des überdeckenden Rechteckgitters und } B_j \subset B.$$

Mit

$$O_o(S, h, k) = \sum_{j=1}^{n_o} O(P_j) = \sum_{j=1}^{n_o} \|\mathbf{x}_u(u_j, v_j) \times \mathbf{x}_v(u_j, v_j)\| \cdot F(B_j) \quad (82)$$

bezeichnen wir die Obersumme des Flächeninhalts von  $S$ , wobei für  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n_o$  gilt:

$$B_j \text{ hat mindestens einen Punkt mit } B \text{ gemeinsam, d.h., es gilt } B_j \cap B \neq \emptyset.$$

Man kann nun zeigen, daß für  $h_1 < h_2$  und  $k_1 < k_2$

$$O_i(S, h_1, k_1) \leq O_i(S, h_2, k_2) \leq O_o(S, h_2, k_2) \leq O_o(S, h_1, k_1)$$

gilt, also  $O_o(S, h, k)$  bzgl.  $h, k$  monoton fallend und nach unten beschränkt ist und  $O_i(S, h, k)$  bzgl.  $h, k$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Bei entsprechenden Forderungen an  $\mathbf{x}$ , d.h., im Falle eines regulären Flächenstücks  $S$  stimmen die Grenzwerte

$$\lim_{\max\{h,k\} \rightarrow 0} O_i(S, h, k) \quad \text{und} \quad \lim_{\max\{h,k\} \rightarrow 0} O_o(S, h, k)$$

überein, und wir nennen den Grenzwert

$$O(S) = \lim_{\max\{h,k\} \rightarrow 0} O_i(S, h, k) = \lim_{\max\{h,k\} \rightarrow 0} O_o(S, h, k)$$

den Flächeninhalt des regulären Flächenstücks  $S^{12}$ . Die Summen (81) und (82) sind Riemannsche Summen für das Integral

$$\int \int_B \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| dF$$

und damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

**Definition 4.37.** (Oberflächenintegral eines Flächenstücks)

Der Flächeninhalt  $O(S)$  eines regulären Flächenstücks  $S$ , das durch die Parametrisierung  $\mathbf{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $S = \mathbf{x}(B)$  gegeben ist, wird durch

$$O(S) = \int \int_B \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| dF = \int \int_B \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dF \quad (83)$$

definiert.

*Bemerkung 4.38.*

Ist die Fläche  $S$  als Funktionsgraph der Funktion  $f$  gegeben, so gilt für die über einem regulären Bereich definierte Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

Für  $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$  berechnet man

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2},$$

und damit erhält man für den Flächeninhalt von  $S$

$$O(S) = \int \int_B \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dF = \int \int_B \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} dF.$$

Beispiel:

Es soll die Oberfläche des in der Abb. 11 dargestellten Rotationskörpers berechnet werden. Wir erhalten

$$\mathbf{x}_u(u, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 2u \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_\phi(u, \phi) = \begin{pmatrix} -u \sin \phi \\ 0 \\ u \cos \phi \end{pmatrix}.$$

<sup>12</sup>Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß man für alle zulässigen Zerlegungen von  $B$  in Zerlegungselemente  $B_j$  im Falle von  $\max\{\text{diag}(B_j)\} \rightarrow 0$  als Grenzwert der Riemannschen Summen (81) und (82)  $O(S)$  erhält.

Für  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\phi$  bzw.  $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\phi\|$  ergibt sich

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\phi = \begin{pmatrix} 2u^2 \cos \phi \\ -u \\ 2u^2 \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\phi\| = \sqrt{4u^4 + u^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} O(R) &= \int \int_B \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\phi\| dF \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4u^4 + u^2} d\phi du = 2\pi \int_0^1 u \sqrt{4u^2 + 1} du, \end{aligned}$$

mit der Substitution  $z = \sqrt{4u^2 + 1}$  erhält man schließlich

$$O(R) = 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{z^2}{4} dz = \frac{\pi}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

#### 4.6.2 Oberflächenintegral einer Funktion

Wir betrachten ein reguläres Flächenstück  $S$ , das durch die Parametrisierung  $\mathbf{x} : B \rightarrow S$ ,  $S = \mathbf{x}(B)$  gegeben ist. Wenn man sich nun die Aufgabe stellt, die Gesamtladung ausgehend von einer auf dieser Fläche gegebenen Ladungsdichte  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  zu berechnen, kommt man auf der Grundlage einer Zerlegung von  $B$  durch Überdeckung mit einem Rechteckgitter im wesentlichen mit den Maschen  $B_j$  mit den Kantenlängen  $h, k$  zu einer Zerlegung der Fläche  $S$  in die Teilflächen  $S_j = \mathbf{x}(B_j)$  mit

$$S \approx \cup_{j=1}^p S_j$$

(siehe dazu die entsprechenden Betrachtungen bei der Berechnung des Flächeninhalts von  $S$  im vorigen Abschnitt). Eine Näherung der Gesamtladung durch die Summe

$$\sum_{j=1}^p f(\mathbf{x}_j) O(S_j) = \sum_{j=1}^p \int_{B_j} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dF \quad (84)$$

liegt auf der Hand, wobei  $\mathbf{x}_j$  jeweils ein Punkt auf dem Flächenstück  $S_j$  sein soll. Fordert man von der Funktion  $f$  die Stetigkeit, so kann man die Konvergenz der Riemannschen Summen (84) bei  $\max\{h, k\} \rightarrow 0$  gegen das Riemannsche Integral

$$\int \int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| dF \quad (85)$$

auch für andere zulässige Zerlegungen von  $B$  als die benutzte Zerlegung zeigen. Das Riemannsche Integral (85) kann man folgerichtig als Gesamtladung auf der Fläche  $S$  interpretieren. Die eben durchgeführte Betrachtung rechtfertigt die

**Definition 4.39.** (Oberflächenintegral einer Funktion)

Seien  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $B \subset D$  ein regulärer Bereich und  $S \subset \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{x} : B \rightarrow S$ ,  $\mathbf{x}(B) = S$ . Wenn  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, so heißt

$$\int \int_S f dO = \int \int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| dF \quad (86)$$

Oberflächenintegral der Funktion  $f$  über das reguläre Flächenstück  $S$ .

**Korollar 4.40.**

Wenn  $S = \cup_{j=1}^k S_j$  eine stückweise reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist, wobei die Schnittmengen  $S_i \cap S_j$  für  $i \neq j$  aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, so definiert man für eine stetige Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  das Oberflächenintegral  $\int \int_S f dO$  durch

$$\int \int_S f dO = \sum_{j=1}^k \int \int_{S_j} f dO . \quad (87)$$

*Bemerkung 4.41.*

Betrachtet man z.B. eine Halbkugeloberfläche  $H$  (Radius  $R$ ), so findet man leicht **zwei** Parametrisierungen  $\mathbf{x} : B \rightarrow H$ , nämlich

(1)

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \quad B = \{(u, v)^T \mid u^2 + v^2 \leq R^2\} \quad \text{und}$$

(2)

$$\mathbf{x}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad B = \{(\phi, \theta)^T \mid \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\} .$$

Wenn man nun die Oberfläche von  $H$  berechnet stellt man fest, daß das Ergebnis bei Nutzung der Parametrisierung (1) gleich dem Ergebnis bei Nutzung der Parametrisierung (2) ist. Man kann generell zeigen, daß die **Oberfläche** und das **Oberflächenintegral** einer Funktion **unabhängig** von der gewählten Parametrisierung sind.

Ähnlich wie beim Doppelintegral oder beim Kurvenintegral hat das Oberflächenintegral typische Eigenschaften.

**Satz 4.42.** (*Eigenschaften des Oberflächenintegrals*)

Wenn  $f$  und  $g$  zwei auf der regulären Fläche  $S$  definierte stetige, reellwertige Funktionen sind und  $\alpha$  eine reelle Zahl ist, dann gelten

(i) (*Additivität des Integrals*)

$$\int \int_S (f + g) dO = \int \int_S f dO + \int \int_S g dO ,$$

(ii) (*Homogenität des Integrals*)

$$\int \int_S \alpha f dO = \alpha \int \int_S f dO ,$$

(iii) (*Monotonie des Integrals*)aus  $f \leq g$  folgt

$$\int \int_S f dO \leq \int \int_S g dO ,$$

(iv) (Bereichsadditivität)

wenn  $S_1$  und  $S_2$  zwei Flächen sind, so daß  $S_1 \cap S_2$  nur aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht, dann gilt

$$\int \int_{S_1} f \, dO + \int \int_{S_2} f \, dO = \int \int_{S_1 \cup S_2} f \, dO ,$$

(v) (Mittelwertsatz)

wenn  $S$  eine stückweise reguläre Fläche und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann gibt es einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in S$  mit

$$\int \int_S f \, dO = f(\mathbf{x}_0) O(S) .$$

### 4.6.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Wenn man ein Vektorfeld  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  betrachtet, etwa ein Geschwindigkeitsfeld eines Mediums, dann stellt sich bei der Bilanzierung des Massenstroms die Frage, wieviel Masse des Mediums durch eine Fläche wie z.B. die Austrittsöffnung eines Reaktors fließt. Man überlegt sich, daß der **Fluß**  $\dot{m}$  des Mediums pro Zeiteinheit durch eine kleine ebene Fläche  $A$

$$Q = \dot{m} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} F(A) \quad (88)$$

ist, wobei  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der Fläche  $A$  ist. Wenn  $\mathbf{v}$  ein stetiges Vektorfeld ist und das reguläre Flächenstück  $S$  durch  $\mathbf{x} : B \rightarrow S$ ,  $B$  regulärer Bereich, parametrisiert ist, dann sind die Tangentialvektoren  $\mathbf{x}_u(u, v)$  und  $\mathbf{x}_v(u, v)$  linear unabhängig und spannen durch  $\mathbf{x}(u, v)$  die Tangentialebene auf. Den senkrecht auf der Ebene stehenden Normalenvektor  $\mathbf{n}$  berechnet man durch

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} .$$

Wenn  $\mathbf{v}$  ein stetiges Vektorfeld auf  $S$  ist und  $S$  ein reguläres Flächenstück, dann ist

$$f(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

eine stetige Funktion, und das Integral  $\int \int_S f \, dO$  existiert. In Verallgemeinerung der Beziehung (88) gelangen wir zu der

**Definition 4.43.** (Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche)

Seien  $S \subset \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld, dann wird durch

$$\int \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} := \int \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dO \quad (89)$$

das **Oberflächenintegral des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$**  durch  $S$  bzw. der **Fluß von  $\mathbf{v}$  durch  $S$**  definiert.

**Korollar 4.44.**

Aufgrund der Definition des Oberflächenintegrals einer Funktion gilt

$$\begin{aligned} \int \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} &= \int \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| \, dF \\ &= \int \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)) \, dF \\ &= \int \int_B [\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)), \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)] \, dF , \end{aligned} \quad (90)$$

wobei  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$  das Spatprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bezeichnet.



#### 4.6.4 Zirkulation, Wirbelstärke

Da wir im folgenden entlang des Randes von Flächenstücken integrieren wollen, benötigen wir Flächen, die zwei Seiten haben. Reguläre Flächenstücke sind immer zweiseitig, denn auf der Basis einer Parametrisierung kann man durch  $\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|}$  eine Seite der Fläche bestimmen. Eine bekannte Fläche, die keine zwei Seiten hat, ist das sogenannte Möbiussche Band mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) + y \cos(\pi x) \\ y \sin(\pi x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 1].$$

Läuft man von irgendeinem Punkt des Bandes los, z.B. auf der Kurve

$$\gamma(x) = \mathbf{x}(x, 0), \quad x \in [0, 1],$$

so gilt  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , allerdings landet man nach einem Durchlauf auf der Unterseite des Bandes. Glücklicherweise sind die meisten Flächen, mit denen wir in der HM für Ingenieure zu tun haben, regulär und damit zweiseitig.

Betrachten wir nun ein Vektorfeld  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M \subset \mathbb{R}^3$ , offen, dann kann man für jede geschlossene Kurve  $k$  in  $M$  die Frage stellen, ob Massenpunkte im Falle eines Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}$  entlang der Kurve  $k$  zirkulieren. Handelt es sich bei  $\mathbf{v}$  um eine laminare Rohrströmung, ist eine Zirkulation eher unwahrscheinlich. Betrachtet man dagegen den ebenen magnetischen Wirbel  $\mathbf{v}(x, yz) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)^T$ , so findet Zirkulation statt (s. dazu Abb. 13).

**Definition 4.45.** (Zirkulation)

Es sei  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $M \subset \mathbb{R}^3$ , offen, und  $k$  eine geschlossene reguläre positiv orientierte Kurve in  $M$ . Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

nennt man die Zirkulation von  $\mathbf{v}$  längs der Kurve  $k$ .

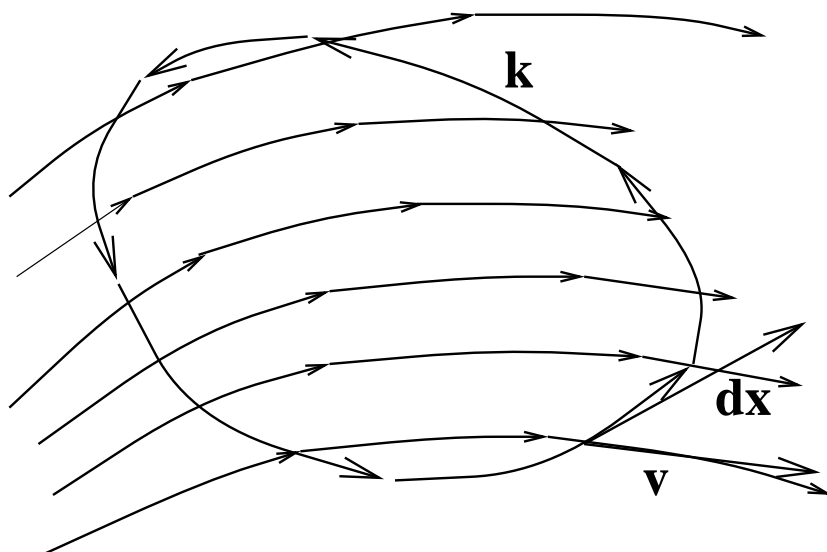


Abbildung 13: Zirkulation

Als nächstes interessiert die Stärke der Verwirbelung einer Strömung. Betrachten wir ein reguläres Flächenstück  $A$  mit der Randkurve  $\partial A$ . Wenn man die Zirkulation eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  entlang  $\partial A$  auf den Flächeninhalt von  $A$  bezieht, erhält man mit

$$\frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

die mittlere Wirbelstärke von  $\mathbf{v}$  bezügl.  $A$ . Um die Wirbelstärke in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in A$  zu erhalten, liegt das "Zusammenziehen" von  $A$  auf einen Punkt nahe. Um dies zu tun, nehmen wir  $A$  als eben an und die Flächennormale  $\mathbf{n}$  als unveränderlich.

**Definition 4.46.** (Wirbelstärke)

Es sei  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $M \subset \mathbb{R}^3$ , offen, und  $\mathbf{x}_0 \in M$ . Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \rightarrow 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (91)$$

heißt die Wirbelstärke von  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{x}_0$ . Dabei werden mit  $A \subset M$  alle ebenen, einfach zusammenhängenden und stückweise glatt berandeten Flächenstücke bezeichnet, die die gleiche Normale  $\mathbf{n}$  haben.  $|A|$  symbolisiert den Durchmesser von  $A$ , also  $|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \}$ .

In der Abbildung 14 ist die Situation der kleiner werdenden Flächen skizziert.

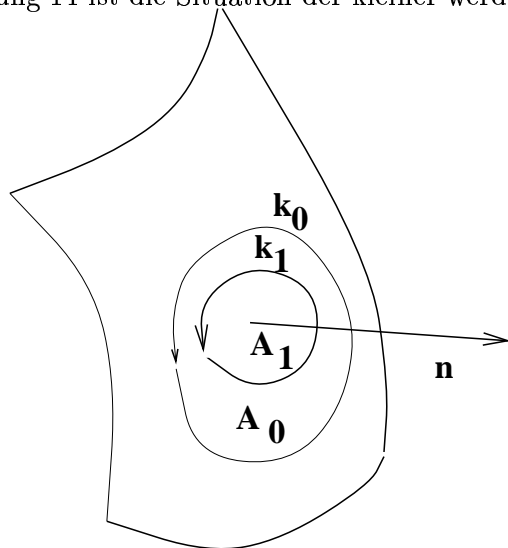


Abbildung 14: Von der Zirkulation zur Wirbelstärke

*Bemerkung 4.47.*

Die Existenz des Grenzwertes ergibt sich aus dem Satz von Green, denn o.B.d.A. können wir annehmen, daß  $A$  parallel zur  $x - y$ -Ebene liegt. Damit kann man den Rand von  $A$  in der Form

$$\partial A : \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b,$$

aufschreiben und erhält

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= \int_a^b [v_1(\gamma(t)) \dot{x}(t) + v_2(\gamma(t)) \dot{y}(t)] dt \\
 &= \oint_{\partial A} [v_1 dx + v_2 dy] \quad \text{Satz von Green} \rightarrow \\
 &= \int \int_A (v_{2,x} - v_{1,y})(\mathbf{x}) dF \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x, y, z_0)^T \\
 &= F(A)(v_{2,x} - v_{1,y})(\mathbf{x}^*)
 \end{aligned}$$

mit einem geeigneten  $\mathbf{x}^* \in A$  nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Die Division durch  $F(A)$  und das Zusammenziehen von  $A$  auf einen Punkt liefert die Wirbelstärke  $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$  und damit gleichzeitig die Existenz des Grenzwertes aus (91)

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = (v_{2,x} - v_{1,y})(\mathbf{x}_0) \quad \text{mit } \mathbf{n} = (0, 0, 1)^T .$$

Betrachtet man den allgemeineren Fall, daß das Flächenstück  $A$  schräg im Raum liegt, so erhält man nach einiger Rechnerei, auf die hier verzichtet wird, den

**Satz 4.48.** (*Berechnung der Wirbelstärke*)

Es sei  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $M \subset \mathbb{R}^3$ , offen, und  $\mathbf{x}_0 \in M$ . Die Wirbelstärke von  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{x}_0$  ist gleich

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{|A| \rightarrow 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) , \quad (92)$$

wobei  $\mathbf{n}$  der konstante Normalenvektor aller Flächenstücke  $A \subset M$  ist.

Man nennt  $\text{rot } \mathbf{v}$  das Wirbelfeld zu  $\mathbf{v}$ .

#### 4.7 Satz von Stokes

Ausgehend von den Begriffen Zirkulation und Wirbelstärke soll die Zirkulation um ein reguläres Flächenstück  $S$  aus den Wirbelstärken auf  $S$  berechnet werden. Dazu zerlegt man  $S$  in endlich viele Maschen  $S_j$  mit  $S = S_1 \cup \dots \cup S_p$ , wobei  $S_i \cap S_j$ ,  $i \neq j$  nur aus endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen soll. Für die Zirkulation um  $S$  erhält man

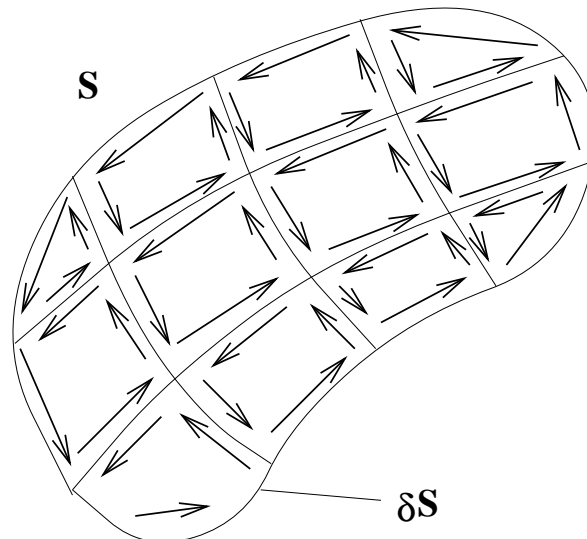
$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^p \oint_{\partial S_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} , \quad (93)$$

denn in der rechten Summe heben sich alle Anteile an Kurvenintegralen auf, die im Inneren liegen, d.h. nicht zu  $\partial S$  gehören. In der Abb. 15 ist die Zerlegung in Maschen  $S_j$  dargestellt. Sind die Maschen klein genug, ist jeder Summand der rechten Seite von (93) näherungsweise gleich

$$\mathbf{n}_j \cdot \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}_j) F(S_j) ,$$

mit einem  $\mathbf{x}_j \in S_j$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}_j$  in  $\mathbf{x}_j$ . Damit kann man

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^p \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}_j F(S_j) \quad (94)$$

Abbildung 15: Zirkulation um  $S$  und Wirbelstärke auf  $S$ 

schreiben. Eine weitere Verfeinerung der Maschenzerlegung führt schließlich auf

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}_j) \cdot d\mathbf{O}.$$

Die eben durchgeführte Betrachtung hat als Ergebnis den

**Satz 4.49.** (*Stokesscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$* )

*Es sei  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $M \subset \mathbb{R}^3$ , offen, und  $S$  ein reguläres Flächenstück in  $M$ . Dann gilt*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}_j) \cdot d\mathbf{O}. \quad (95)$$

*Bemerkung 4.50.*

Verbal bedeutet der Stokessche Integralsatz, daß die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück umschließt, gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück ist.

## 5 Volumenberechnung und Dreifachintegrale

### 5.1 Volumen räumlicher Bereiche

Die folgenden Überlegungen zur Volumenberechnung und zu Dreifachintegralen sind eine direkte Verallgemeinerung der Berechnung von Flächeninhalten ebener Bereiche und der Doppelintegrale. So bilden statt Rechtecken hier Quader die Grundlage für die Volumenberechnung. Prinzipiell gibt es jedoch in den Darlegungen keine wesentlichen Unterschiede zur Flächenberechnung und den Doppelintegralen.

Ausgehend von der Anschauung, daß man einem Quader mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  das Volumen  $V = a \cdot b \cdot c$  zuordnet, soll im folgenden das Volumen von räumlichen Objekten bzw. Mengen des  $\mathbb{R}^3$  definiert werden, der mit der anschaulichen Vorstellung des Volumens, das wir für spezielle Objekte bereits kennen, übereinstimmt.

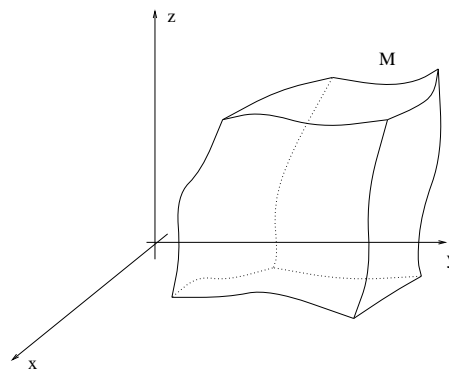


Abbildung 16: Punktmenge  $M \subset \mathbb{R}^3$

Betrachten wir dazu eine Punktmenge des  $\mathbb{R}^3$ , wie sie in Abbildung 16 zu sehen ist. Zur Bestimmung des Volumens von  $M$  überziehen wir den  $\mathbb{R}^3$  mit einem Gitter der Maschenweite  $h = \frac{1}{2^k}$ , d.h., mit wachsenden  $k$  wird das Gitter immer feinmaschiger. In den Abbildungen 17 und 18 ist dies skizziert.

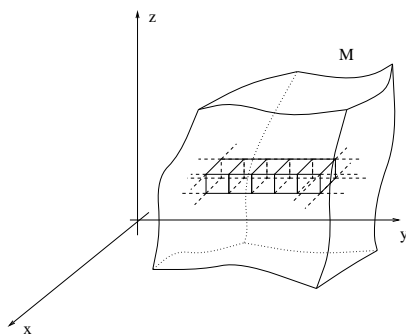


Abbildung 17: Gitter der Maschenweite  $h$

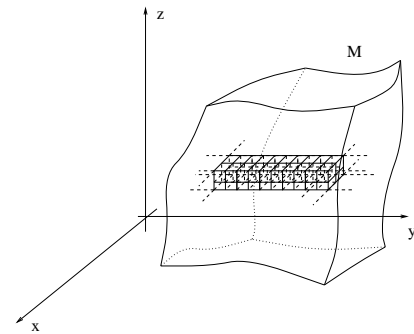


Abbildung 18: Gitter der Maschenweite  $h/2$

Das Volumen der einzelnen Gittermaschen kennen wir mit  $f_1 = h^3$  bzw.  $f_2 = \frac{h^3}{8}$ . Die einfache Idee der Bestimmung des Flächeninhalts von  $M$  besteht nun in der Näherung durch Gittermaschen, die vollständig in  $M$  liegen bzw. mindestens einen Punkt aus  $M$  enthalten.

**Definition 5.1.**

Mit  $s_k(M)$  bezeichnen wir die Summe aller Volumina der Gitterzellen, die vollständig in  $M$  enthalten sind.

Mit  $S_k(M)$  bezeichnen wir die Summe aller Volumina der Gitterzellen, die einen Punkt aus  $M$  enthalten.

**Korollar 5.2.**

Aufgrund der Definition 5.1 von  $s_k$  und  $S_k$  folgt unmittelbar

$$s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \leq S_{k+1}(M) \leq S_k(M) \quad . \quad (96)$$

Damit ist die Folge  $(s_k(M))$  monoton wachsend und nach oben beschränkt und die Folge  $(S_k(M))$  monoton fallend und nach unten beschränkt.

**Korollar 5.3.**

Es existieren die Grenzwerte

$$V_i(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M) \quad \text{und} \quad V_o(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M) \quad .$$

**Definition 5.4.**

$V_i(M)$  wird innerer Inhalt und  $V_o(M)$  äußerer Inhalt von  $M$  genannt. Man sagt die Menge  $M$  sei Jordan-meßbar oder hat ein Volumen, wenn

$$V_i(M) = V_o(M)$$

gilt, und in diesem Fall wird der Jordan-Inhalt oder das Volumen der Menge  $M$  durch

$$V(M) := V_i(M) = V_o(M)$$

erklärt.

Für die leere Menge  $\emptyset$  definieren wir  $V(\emptyset) = 0$ . Eine Jordan-meßbare Menge  $N$  mit  $V(N) = 0$  wird eine Jordan-Nullmenge genannt.

*Bemerkung 5.5.*

Der Fall

$$v_i(M) < V_o(M)$$

ist möglich. Für die Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$M = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0, \text{ für rationales } x, \\ \text{ und } y = 1, \text{ für irrationales } x, z \in [0, 1]\}$$

findet man tatsächlich

$$0 = V_i(M) < V_o(M) = 1 \quad ,$$

obwohl die Menge  $M$  beschränkt ist.

Im folgenden Satz werden recht offensichtliche Eigenschaften von meßbaren Mengen (wir lassen der Einfachheit halber den Vorsatz "Jordan" weg) zusammengefaßt.

**Satz 5.6.** (*Eigenschaften von meßbaren Mengen und dem Jordan-Inhalt*)

(a) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*

- (b) Die beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$  ist genau dann meßbar, wenn der Rand  $\partial M$  von  $M$  meßbar ist und  $V(\partial M) = 0$  gilt.
- (c) Jede endliche Punktmenge, jede aus endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehende Menge und jede aus endlich vielen regulären Flächenstücken bestehende Menge ist eine Nullmenge.
- (d) Durchschnitt, Vereinigung und Differenz zweier meßbarer Mengen sind wieder meßbar.
- (e) Wenn  $M$  und  $N$  meßbar sind und  $M \subset N$  gilt, dann folgt  $V(M) \leq V(N)$  (Monotonie des Inhalts).
- (g) Wenn  $M$  und  $N$  meßbar sind und  $M \cap N$  eine Nullmenge ist, dann folgt  $V(M \cup N) = V(M) + V(N)$  (Additivität des Inhalts).

*Bemerkung 5.7.*

Bis auf die Aussage (b), die aufwendig zu beweisen ist, sind die anderen Aussagen offensichtlich und folgen im wesentlichen aus der Ungleichung (96).

**Definition 5.8.**

Eine beschränkte Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^3$  heißt regulärer Bereich, wenn

- (a)  $B$  abgeschlossen ist,
- (b) das Innere von  $B$ , also  $B \setminus \partial B$  ein Gebiet ist und
- (c) der Rand  $\partial B$  von  $B$  aus endlich vielen regulären Flächenstücken besteht.

## 5.2 Riemannsches Dreifachintegral

Im folgenden verwenden wir wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt den Begriff Bereich  $B$  für einen räumlichen, regulären Bereich, aus dem evtl. auch eine Nullmenge entfernt wurde.

**Definition 5.9.**

Unter dem **Durchmesser** von  $C$  wollen wir

$$\text{diam}(C) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}$$

verstehen.

*Bemerkung 5.10.*

Man überlegt sofort, daß die Menge

$$M = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c, a, b, c > 0\}$$

ebenso wie die Menge

$$N = \{(x, y, z) \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c, a, b, c > 0\}$$

den Durchmesser

$$\text{diam}(M) = \text{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

hat. Im Falle von abgeschlossenen Mengen ist das Supremum in der Definition 5.9 gleich dem Maximum.

**Definition 5.11.** (Zerlegung)

Unter einer Zerlegung  $Z$  von  $B$  verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, \dots, k\}$$

von Teilbereichen mit den Eigenschaften

- (a)  $\cup_{j=1}^k B_j = B$ ,
- (b) für  $i \neq j$  ist  $B_i \cap B_j$  eine Nullmenge.

Die Feinheit  $\delta(Z)$  einer Zerlegung  $Z$  ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\text{diam}(B_j) | j = 1, \dots, k\}$$

definiert. Eine Folge  $(Z_k)$  von Zerlegungen eines meßbaren Bereichs  $B$  heißt zulässig, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(Z_k) = 0$$

gilt.

*Bemerkung 5.12.*

Die in der Abbildung 16 skizzierte Punktmenge  $M$  könnte man durch die Zerlegung

$$Z = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{18}\},$$

die in der Abbildung 19 skizziert ist, "zerlegen". Die Feinheit wäre in diesem Fall  $\delta(Z) = \max\{\text{diam}(B_j) | j = 1, \dots, 18\}$ .

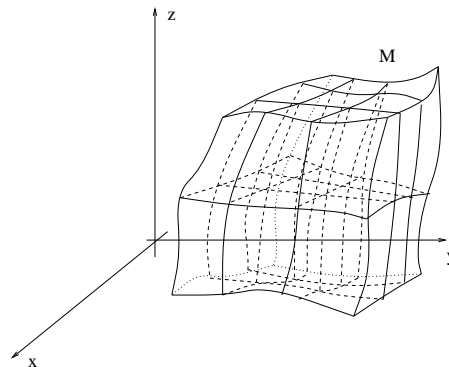


Abbildung 19: Zerlegung von  $M \subset \mathbb{R}^3$

**Definition 5.13.** (Riemannsche Zwischensumme)

Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion, für die eine Nullmenge  $N \subset B$  existiert, so daß  $f$  auf  $B \setminus N$  stetig ist. Wenn  $Z = \{B_j | j = 1, \dots, k\}$  eine Zerlegung von  $B$  ist, und  $\mathbf{x}_j \in B_j$  beliebige Punkte sind (werden Zwischenpunkte genannt), dann heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) V(B_j)$$

**Riemannsche Zwischensumme** der Funktion  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$  und den vorgegebenen Zwischenpunkten.



**Definition 5.14.** (Riemannsches Dreifachintegral)

Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Konvergiert für jede Folge zulässiger Zerlegungen  $(Z_k)$  des regulären Bereiches  $B$  die Folge der Riemannschen Zwischensummen  $(S(f, Z_k))$  unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte gegen den gleichen Grenzwert  $I$ , also

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, Z_k),$$

dann heißt die Funktion  $f$  Riemann-integrierbar und wir bezeichnen mit

$$I = \int \int \int_B f \, dV = \int \int \int_B f(x, y, z) \, dV = \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz$$

das Riemann-Integral der Funktion  $f$  über  $B$ .

**Satz 5.15.** (Stetigkeit  $\rightarrow$  Integrierbarkeit)

Wenn  $B \subset \mathbb{R}^3$  ein regulärer Bereich ist, und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, so ist  $f$  über  $B$  Riemann-integrierbar.

*Bemerkung 5.16.*

Ein Beispiel für die Anwendung des Riemannsches Integrals ist die Berechnung der Masse eines Körpers  $B$ , wobei die Dichte  $\rho$  als Funktion  $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, also Ortsveränderlich sein kann. Für die Masse  $m$  von  $B$  ergibt sich

$$m = \int \int \int_B \rho(x, y, z) \, dV.$$

*Bemerkung 5.17.*

Für jeden Bereich  $B \subset \mathbb{R}^3$  gilt offensichtlich

$$\int \int \int_B 1 \, dV = V(B).$$

**Satz 5.18.** (Eigenschaften des Riemannsches Dreifachintegrals)

Seien  $B$  ein Bereich und  $f, g$  zwei auf  $B$  definierte beschränkte Funktionen, die in allen Punkten von  $B$  mit Ausnahme einer Nullmenge stetig sind, sowie  $\alpha$  eine reelle Zahl. Dann gelten die Aussagen

(a) (Additivität des Integrals)

$$\int \int \int_B (f + g) \, dV = \int \int \int_B f \, dV + \int \int \int_B g \, dV$$

(Homogenität des Integrals)

$$\int \int \int_B \alpha f \, dV = \alpha \int \int \int_B f \, dV$$

(b) (Monotonie des Integrals)

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } \int \int \int_B f \, dV \leq \int \int \int_B g \, dV$$

(c) (Bereichsadditivität des Integrals)

Wenn  $B_1$  und  $B_2$  zwei Bereiche mit  $B_1 \cup B_2 = B$  und  $V(B_1 \cap B_2) = 0$  sind, so gilt

$$\int \int \int_{B_1} f \, dV + \int \int \int_{B_2} f \, dV = \int \int \int_B f \, dV$$

(d) (Mittelwertsatz)

Wenn  $B$  ein regulärer Bereich und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so gibt es einen Punkt  $\mathbf{x}^* \in B$  mit

$$\int \int \int_B f \, dV = f(\mathbf{x}^*) V(B)$$

### 5.3 Normalbereiche und die konkrete Dreifachintegralberechnung

Zur praktischen Berechnung des Inhalts von Bereichen bzw. von Riemannschen Dreifachintegralen muß man die Bereiche mathematisch fassen. Die einfachste Form eines Bereiches ist ein Quader der Art

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z)^T \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Allgemeinere Bereiche beschreibt man mit der Definition

**Definition 5.19.** (Normalbereiche)

Ein Bereich  $B_1 \subset \mathbb{R}^3$  heißt Normalbereich vom Typ I, wenn es einen regulären Bereich  $B'_1 \subset \mathbb{R}^2$  und ein Gebiet  $D' \supset B'_1$  gibt sowie zwei stetig differenzierbare Funktionen  $g_I, h_I : D' \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$B_1 = \{(x, y, z)^T \mid (x, y)^T \in B'_1, g_I(x, y) \leq z \leq h_I(x, y)\}.$$

Ein Bereich  $B_2 \subset \mathbb{R}^3$  heißt Normalbereich vom Typ II, wenn es einen regulären Bereich  $B'_2 \subset \mathbb{R}^2$  und ein Gebiet  $D' \supset B'_2$  gibt sowie zwei stetig differenzierbare Funktionen  $g_{II}, h_{II} : D' \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$B_2 = \{(x, y, z)^T \mid (y, z)^T \in B'_2, g_{II}(y, z) \leq x \leq h_{II}(y, z)\}.$$

Ein Bereich  $B_3 \subset \mathbb{R}^3$  heißt Normalbereich vom Typ III, wenn es einen regulären Bereich  $B'_3 \subset \mathbb{R}^2$  und ein Gebiet  $D' \supset B'_3$  gibt sowie zwei stetig differenzierbare Funktionen  $g_{III}, h_{III} : D' \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$B_3 = \{(x, y, z)^T \mid (x, z)^T \in B'_3, g_{III}(x, z) \leq y \leq h_{III}(x, z)\}.$$

*Bemerkung 5.20.*

Es ist offensichtlich, daß Rechteckbereiche Normalbereiche vom Typ I, Typ II und Typ III sind. Einen Oktant einer Kugel  $V$  (1. Oktant, Radius  $R$ ) kann man durch

$$V = \{(x, y, z)^T \mid (x, y)^T \in K, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

als Normalbereich vom Typ I mit dem regulären Bereich  $K$

$$K = \{(x, y)^T \mid 0 \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}$$

darstellen.

**Satz 5.21.** (Volumina von Normalbereichen)

Wenn  $B_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , ein Normalbereich vom Typ I, II oder III entsprechend der Definition 5.19 ist, so gelten die Beziehungen

$$V(B_1) = \int \int \int_{B_1} dV = \int \int_{B'_1} (h_I - g_I) dF \quad (97)$$

$$V(B_2) = \int \int \int_{B_2} dV = \int \int_{B'_2} (h_{II} - g_{II}) dF \quad (98)$$

$$V(B_3) = \int \int \int_{B_3} dV = \int \int_{B'_3} (h_{III} - g_{III}) dF \quad (99)$$

*Bemerkung 5.22.*

Im Falle des Normalbereiches vom Typ I bedeutet  $B_1$  das Volumen des Körpers, der sich über  $B'_1$  zwischen den Graphen der Funktionen  $g_I$  und  $h_I$  erstreckt.

**Satz 5.23.** (Dreifachintegral über Rechteckbereiche)

Wenn  $B = [a, b] \times [c, d] \times [g, h]$  ein Quader ist, und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, so gilt

$$\begin{aligned} \int \int \int_B f \, dV &= \int_a^b \left[ \int_c^d \left[ \int_g^h f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_g^h \left[ \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y, z) \, dx \right] dy \right] dz \\ &= \int_a^b \left[ \int_g^h \left[ \int_c^d f(x, y, z) \, dy \right] dz \right] dx . \end{aligned} \quad (100)$$

*Bemerkung 5.24.*

Der Beweis des Satzes wird über den Weg der Riemannschen Summen analog zum Beweis des Satzes 4.22 geführt.

Das Ergebnis des Satzes 5.23 kann man wie folgt auf Normalbereiche vom Typ I, II und III verallgemeinern.

**Satz 5.25.** (Dreifachintegral über Normalbereiche)

(a) Wenn  $B_1$  ein Normalbereich vom Typ I der Form

$$B_1 = \{(x, y, z)^T \mid (x, y)^T \in B'_1, \, g_I(x, y) \leq z \leq h_I(x, y)\}$$

ist und  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\int \int \int_{B_1} f \, dV = \int \int_{B'_1} \left[ \int_{g_I(x, y)}^{h_I(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx dy .$$

(b) Wenn  $B_2$  ein Normalbereich vom Typ II der Form

$$B_2 = \{(x, y, z)^T \mid (y, z)^T \in B'_2, \, g_{II}(y, z) \leq x \leq h_{II}(y, z)\}$$

ist und  $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\int \int \int_{B_2} f \, dV = \int \int_{B'_2} \left[ \int_{g_{II}(y, z)}^{h_{II}(y, z)} f(x, y, z) \, dx \right] dy dz .$$

Für Normalbereiche vom Typ III gilt eine entsprechende Beziehung, wobei in jedem dargestellten Fall das Dreifachintegral auf eine "eindimensionale" Integration und ein Doppelintegral zurückgeführt wird.

**Korollar 5.26.**

Sei  $B$  ein Bereich, der sich als eine endliche Vereinigung  $B = \cup_{j=1}^k B_j$  von Normalbereichen  $B_j$  darstellen läßt, die vom Typ I oder II sind, so daß für  $i \neq j$  die Menge  $B_i \cap B_j$  eine Nullmenge ist. Dann gilt für eine stetige Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int \int \int_B f \, dV = \sum_{j=1}^k \int \int \int_{B_j} f \, dV .$$

*Bemerkung 5.27.*

Mit den Sätzen 5.23 und 5.25 sowie der Folgerung 5.26 ist es nun möglich mit den Kenntnissen der Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen und Berechnung von Doppelintegralen auf dem Wege der "iterierten Integration" Dreifachintegrale zu berechnen.

Dabei kann man davon ausgehen, daß sämtliche praktisch interessanten Integrationsbereiche als Vereinigung von ebenen Normalbereichen darstellbar sind.

Beispiel:

Es soll das Trägheitsmoment des Ellipsoids

$$E = \{(x, y, z)^T \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

berechnet werden, also

$$\theta = \int \int \int_E (x^2 + y^2) dV .$$

Mit

$$g(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad h(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

kann man  $E$  als Normalbereich vom Typ I in der Form

$$E = \{(x, y, z)^T \mid (x, y)^T \in E', g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

schreiben, wobei  $E'$  ein ebener Normalbereich vom Typ I der Form

$$E' = \{(x, y)^T \mid -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\}$$

ist. Für die Berechnung von  $\theta$  bedeutet das

$$\begin{aligned} \theta &= \int \int_{E'} \left[ \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} (x^2 + y^2) dz \right] dF \\ &= \int_{-a}^a \left[ \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} [(x^2 + y^2) dz] dy \right] dx \\ &= 2c \int_{-a}^a \left[ \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} [(x^2 + y^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}] dy \right] dx . \end{aligned}$$

Es gilt mit  $M(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^a \left[ \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} [(x^2 + y^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}] dy \right] dx \\ &= x^2 \int_{-bM(x)}^{bM(x)} \sqrt{M(x)^2 - \frac{y^2}{b^2}} dy + \int_{-bM(x)}^{bM(x)} y^2 \sqrt{M(x)^2 - \frac{y^2}{b^2}} dy \\ &= x^2 M(x) \int_{-bM(x)}^{bM(x)} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{bM(x)}\right)^2} dy + M(x) \int_{-bM(x)}^{bM(x)} y^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{bM(x)}\right)^2} dy \\ &= x^2 b M(x)^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt + b^3 M(x)^4 \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1 - t^2} dt . \end{aligned}$$

Wegen

$$\int t^2 \sqrt{1 - t^2} dt = -\frac{1}{4}t(\sqrt{1 - t^2})^3 + \frac{1}{8}t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{8} \arcsin t$$

folgt

$$\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{8}\pi.$$

Wegen

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t$$

folgt

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} [(x^2 + y^2) \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}] dy \\ &= \pi \left( \frac{1}{2}x^2 b M(x)^2 + \frac{1}{8}b^3 M(x)^4 \right) \\ &= \pi b \left( \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{8}b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \right), \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\theta = 2\pi bc \int_{-a}^a \left( \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{8}b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \right) dx = \frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2).$$

Wir werden im nächsten Abschnitt noch einmal auf diese mühselige Berechnung zurückkommen und sehen, daß es auch einfacher geht.

## 5.4 Transformationsformel für Dreifachintegrale

Wenn wir uns an die HM I bzw. die Integration von Funktionen einer reellen Veränderlichen erinnern, dann hat die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \quad \text{mit } x = \phi(t), \phi \text{ injektiv,}$$

oft zur erfolgreichen Bestimmung einer Stammfunktion beigetragen. Diese Regel soll nun für den Fall von Dreifachintegralen verallgemeinert werden.

**Definition 5.28.** (Koordinatentransformation)

Seien  $D$  und  $D'$  zwei Gebiete aus dem  $\mathbb{R}^3$ . Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\mathbf{x} : D \rightarrow D', \quad \mathbf{x}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatentransformation, wenn die Abbildung  $\mathbf{x}$  injektiv ist und wenn für alle  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u, v, w)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u, v, w) & x_v(u, v, w) & x_w(u, v, w) \\ y_u(u, v, w) & y_v(u, v, w) & y_w(u, v, w) \\ z_u(u, v, w) & z_v(u, v, w) & z_w(u, v, w) \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt.

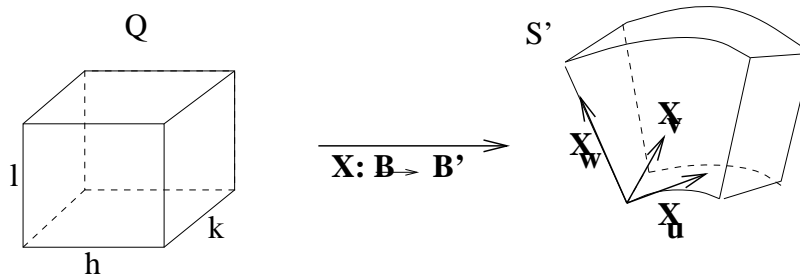


Abbildung 20: Koordinatentransformationen

*Bemerkung 5.29.*

Betrachten wir einen Quader

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} u+r \\ v+s \\ w+t \end{pmatrix} \mid 0 \leq r \leq h, 0 \leq s \leq k, 0 \leq t \leq l \right\} \subset D$$

mit den Kantenlängen  $k, h$  und  $l$  und dem Volumen  $V(Q) = h \cdot k \cdot l$ , dann bildet  $\mathbf{x}$  den Quader  $A$  in erster Näherung auf den Spat

$$S' = \left\{ \mathbf{x}(u, v, w) + r\mathbf{x}_u(u, v, w) + s\mathbf{x}_v(u, v, w) + t\mathbf{x}_w(u, v, w) \mid 0 \leq r \leq h, 0 \leq s \leq k, 0 \leq t \leq l \right\}$$

ab. Das Volumen von  $S'$  ergibt sich aus dem Spatprodukt der linear unabhängigen Vektoren  $h\mathbf{x}_u, k\mathbf{x}_v$  und  $l\mathbf{x}_w$  zu

$$V(S') = |[h\mathbf{x}_u, k\mathbf{x}_v, l\mathbf{x}_w]| = |\det(J_{\mathbf{x}})| \cdot h \cdot k \cdot l.$$

Letztendlich führen die Überlegungen zum

**Satz 5.30.** (*Transformationsformel für Dreifachintegrale*)

Seien  $B$  und  $B'$  zwei reguläre Bereiche,  $D$  und  $D'$  zwei Gebiete mit  $B \subset D$  und  $B' \subset D'$  sowie  $\mathbf{x} : D \rightarrow D'$  eine Koordinatentransformation von  $B$  auf  $B'$ . Ferner sei  $f : B' \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\mathbf{x}(B)} f \, dV &= \int \int \int_{B'} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int \int \int_B f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw. \end{aligned} \quad (101)$$

*Bemerkung 5.31.*

Die Regel (101) ist auch dann erfüllt, wenn für endlich viele Punkte aus  $B$  oder Teilmengen von  $B$ , die Nullmengen sind, die Bedingung  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$  nicht erfüllt ist.

Das ist besonders bei Koordinatentransformationen von kartesischen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten von Bedeutung.

Beispiel:

Erinnern wir uns an die mühselige Berechnung des Trägheitsmoments  $\theta$  eines Ellipsoids aus

dem vorigen Abschnitt. Wir wollen diese Aufgabe mit Hilfe der Transformationsformel und einer Koordinatentransformation etwas weniger aufwendig lösen. Mit der Transformation

$$\mathbf{x} : B \rightarrow E, \quad \mathbf{x}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} ar \cos \psi \cos \phi \\ br \cos \psi \cos \phi \\ cr \sin \psi \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

bildet man den Quader  $B = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  auf das Ellipsoid  $E$  ab. Für  $\det(J_{\mathbf{x}})$  errechnet man

$$\begin{aligned} \det(J_{\mathbf{x}}) &= \begin{vmatrix} x_r & x_\phi & x_\psi \\ y_r & y_\phi & y_\psi \\ z_r & z_\phi & z_\psi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a \cos \psi \cos \phi & -ar \cos \psi \sin \phi & -ar \sin \psi \cos \phi \\ b \cos \psi \cos \phi & br \cos \psi \cos \phi & -br \sin \psi \sin \phi \\ c \sin \psi & cr \cos \psi & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc r^2 \cos \psi. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß die Forderung  $\det(J_{\mathbf{x}}) \neq 0$  und die Injektivität von  $\mathbf{x}$  z.B. für den "Nordpol" und den "Südpol" des Ellipsoids, also für die Punkte  $P_n = (1, \phi, \pi/2)$  und  $P_s = (-1, \phi, -\pi/2)$  nicht erfüllt sind. Da diese Punktmenge jedoch Nullmengen sind, kann man die Transformationsformel (101) anwenden. Nach der Transformationsformel für Dreifachintegrale ergibt sich

$$\begin{aligned} \theta &= \int \int \int_E (x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 a^2 \cos^2 \psi \cos^2 \phi + r^2 b^2 \cos^2 \psi \sin^2 \phi) abc r^2 \cos \psi d\psi d\phi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 abc \cos^3 \psi (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) d\psi d\phi dr. \end{aligned}$$

Unter Nutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \int \cos^3 \psi d\psi &= \frac{1}{3} \cos^2 \psi \sin \psi + \frac{2}{3} \sin \psi \\ \int \cos^2 \phi d\phi &= \frac{1}{2} \cos \phi \sin \phi + \frac{\phi}{2} \\ \int \sin^2 \phi d\phi &= \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \cos \phi \sin \phi \end{aligned}$$

(auf die Integrationskonstante wurde hier verzichtet), die man sehr schnell durch partielle Inte-

gration nachvollzieht, erhält man für  $\theta$

$$\begin{aligned}
 \theta &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi \, d\psi \, d\phi \, dr \\
 &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \left( \frac{1}{3} \cos^2 \psi \sin \psi + \frac{2}{3} \sin \psi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, dr \\
 &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \frac{4}{3} d\phi \, dr \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^1 r^4 \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) d\phi \, dr \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^1 r^4 \left[ a^2 \left( \frac{1}{2} \cos \phi \sin \phi + \frac{\phi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + b^2 \left( \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \cos \phi \right) \Big|_0^{2\pi} \right] dr \\
 &= \frac{4}{3} abc \pi (a^2 + b^2) \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{15} abc \pi (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

Wenngleich die eben durchgeführte Rechnung auch nicht unbedingt kurz war, fand ich sie jedoch wesentlich angenehmer als die im vorigen Kapitel durchgeführte Rechnung in kartesischen Koordinaten.

### 5.5 Satz von Gauss

Mit dem Satz von Gauss wollen wir nun ein wichtiges Bilanzprinzip der Kontinuumsmechanik besprechen. Zur Illustration wollen wir die Strömung einer Flüssigkeit durch ein Volumenelement betrachten, wobei wir die Massenerhaltung postulieren wollen. Als Volumenelement betrachten wir den Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

Der Quader  $Q$  hat die Seiten

$$S_1 = \{(a_1, y, z)^T \mid a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\} \text{ mit dem Normalenvektor } -\mathbf{e}_1,$$

$$S_2 = \{(b_1, y, z)^T \mid a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\} \text{ mit dem Normalenvektor } \mathbf{e}_1,$$

$$S_3 = \{(x, a_2, z)^T \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_3 \leq z \leq b_3\} \text{ mit dem Normalenvektor } -\mathbf{e}_2,$$

$$S_4 = \{(x, b_2, z)^T \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_3 \leq z \leq b_3\} \text{ mit dem Normalenvektor } \mathbf{e}_2,$$

$$S_5 = \{(x, y, a_3)^T \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\} \text{ mit dem Normalenvektor } -\mathbf{e}_3,$$

$$S_6 = \{(x, y, b_3)^T \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\} \text{ mit dem Normalenvektor } \mathbf{e}_3,$$

wobei  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , die kanonischen Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^3$  sind.

Sei nun  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit  $Q \subset D$  und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld (z.B. die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit) mit der Komponentendarstellung

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$



Nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung gilt für  $y, z$  mit  $a_2 \leq y \leq b_2$ ,  $a_3 \leq z \leq b_3$

$$\begin{aligned} \int \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} + \int \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{a_2}^{b_2} \left[ \int_{a_3}^{b_3} (v_1(b_1, y, z) - v_1(a_1, y, z)) dz \right] dy \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left[ \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left( \frac{\partial}{\partial x} (v_1(b_1, y, z) - v_1(a_1, y, z)) \right) dx \right\} dz \right] dy \\ &= \int \int \int_Q \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y, z) dV . \end{aligned} \quad (102)$$

Durch eine völlig analoge Rechnung erhält man

$$\int \int_{S_4} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} + \int \int_{S_3} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int \int \int_Q \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, y, z) dV \quad (103)$$

und

$$\int \int_{S_6} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} + \int \int_{S_5} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int \int \int_Q \frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, z) dV . \quad (104)$$

Die Summation der Gleichungen (102), (103) und (104) ergibt

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial Q} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} &= \sum_{j=1}^6 \int \int_{S_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} \\ &= \int \int \int_Q \left( \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, z) \right) dV \\ &= \int \int \int_{Q_1 \cup Q_2} \operatorname{div} \mathbf{v} dV . \end{aligned} \quad (105)$$

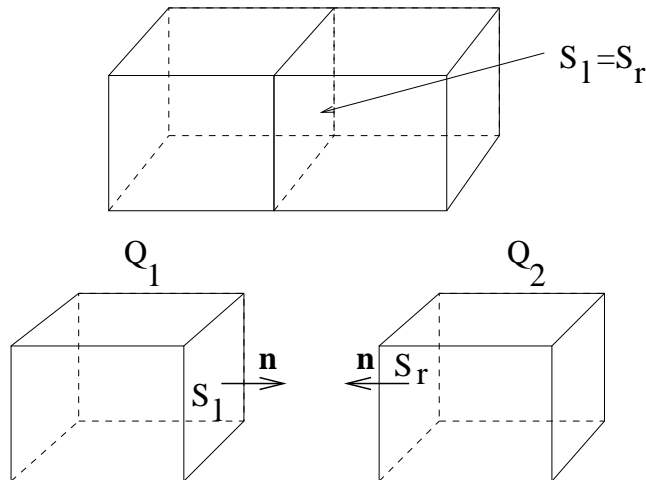


Abbildung 21:  $Q = Q_1 \cup Q_2$

Die Beziehung (105) ist der Satz von Gauss für einen Quader  $Q$ . Betrachtet man nun zwei nebeneinander liegende Quader einer Zerlegung eines "größeren" Bereichs  $B$ , wie in Abb. 21 dargestellt, so erkennt man, daß aufgrund der Bereichsadditivität die Beziehung

$$\int \int \int_{Q_1 \cup Q_2} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int \int \int_{Q_1} \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \int \int \int_{Q_2} \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

gilt. Die obige Rechnung ergibt desweiteren

$$\int \int \int_{Q_1} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV + \int \int \int_{Q_2} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int \int_{\partial Q_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} + \int \int_{\partial Q_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} .$$

Man überlegt nun, daß sich die Flußintegrale

$$\int \int_{S_l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} \quad \text{und} \quad \int \int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$$

gerade aufheben, da  $\mathbf{v}$  auf  $S_l = S_r$  selbstverständlich gleich ist, die äußeren Normalenvektoren jedoch gegensätzliche Richtungen haben. Die konsequente Weiterführung dieser Überlegung führt auf die Beziehung

$$\int \int \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} .$$

Wir formulieren den

**Satz 5.32.** (Satz von Gauss)

Sei  $B$  ein regulärer Bereich, die Normale  $\mathbf{n}$  weise in den Randpunkten von  $B$  aus  $B$  heraus (man spricht hier auch von der äußeren Normalen). Dann gilt

$$\int \int \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dO . \quad (106)$$

*Bemerkung 5.33.* (Fluß und Ergiebigkeit/Divergenz)

Seien  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei für  $\mathbf{x} \in D$  und  $r > 0$  die Kugel  $\overline{K}_{r,\mathbf{x}}$  in  $D$  enthalten. Wir verabreden  $S_r = \partial \overline{K}_{r,\mathbf{x}}$ . Wenn man den Fluß

$$U = \int \int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$$

betrachtet, hat man eine Netto-Bilanz des aus  $\overline{K}_{r,\mathbf{x}}$  herausfließenden Volumens pro Zeiteinheit, also die Differenz zwischen dem herausfließenden Volumens pro Zeiteinheit und dem hereinfließenden Volumen pro Zeiteinheit. Dividiert man den Fluß durch das Volumen des Bilanzgebietes  $\overline{K}_{r,\mathbf{x}}$ , erhält man mit

$$E_{\overline{K}_{r,\mathbf{x}}} := \frac{1}{V(\overline{K}_{r,\mathbf{x}})} \int \int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$$

die mittlere "Ergiebigkeit" bzgl.  $\overline{K}_{r,\mathbf{x}}$ . Wir wollen nun die Kugel auf einen Punkt zusammenziehen, um die Ergiebigkeit an einem Punkt zu erklären. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein Vektor  $\mathbf{x}^* \in \overline{K}_{r,\mathbf{x}}$  mit

$$\int \int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int \int \int_{\overline{K}_{r,\mathbf{x}}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}^*) V(\overline{K}_{r,\mathbf{x}}) .$$

Da die Funktion (Skalarfeld)  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  stetig ist, folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(\overline{K}_{r,\mathbf{x}})} \int \int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} .$$

Damit ist  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})$  als Grenzwert der mittleren Ergiebigkeit eines Bilanzvolumens um  $\mathbf{x}$  die Ergiebigkeit oder ein Maß für die Produktion bzw. die Vernichtung von Flüssigkeitsvolumen,

d.h., für die Quelle bzw. Senke von  $\mathbf{v}$  im Punkte  $\mathbf{x}$ . Mit Bezug auf das eingangs erwähnte Problem der Massenbilanz einer strömenden Flüssigkeit z.B. durch einen Reaktor (der Reaktorraum ist hier unser Volumenelement) bedeutet der Satz von Gauss, daß der Massenstrom<sup>13</sup>  $\dot{m}_{in}$  der in den Reaktor mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  transportierten Masse gleich dem Massenstrom  $\dot{m}_{out}$  der Masse, die dem Reaktor entnommen wird plus dem Zuwachs oder Verlust an Masse  $m_{vol} = \int \int \int_B f dV$  durch die im Reaktor erzeugten oder vernichteten Produkte ist, also

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} + m_{vol} ,$$

bzw.

$$\int \int_{S_{in}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = - \int \int_{S_{out}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} + \int \int \int_B f dV , \quad (107)$$

wobei  $B$  der Reaktorraum ist,  $S = S_{in} \cup S_{out} \cup S_{wall} = \partial B$  die Randfläche, unterteilt in den "Einlaß"  $S_{in}$ , den Reaktorauslaß  $S_{out}$  und die undurchlässige Reaktorwand  $S_{wall}$ . Da für undurchlässige Wände zwangsläufig

$$\int \int_{S_{wall}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = 0$$

gilt, bedeutet (107) unter Nutzung des Gaußschen Satzes

$$\int \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int \int \int_B \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = \int \int \int_B f dV ,$$

bzw.

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = f$$

für den Volumenstromvektor  $\rho \mathbf{v}$ . Ist die Dichte des strömenden Mediums konstant und ist der Reaktorraum quellen- und senkenfrei ( $m_{vol} = 0$ ), so erhält man schließlich mit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium.

## 5.6 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung mit dem Satz von Gauss

Die Wärmebilanz eines Bereiches  $B$  (möge aus irgendeinem kontinuierlichen Material bestehen) ergibt sich ähnlich wie bei der obigen Betrachtung zur Massenerhaltung, nämlich durch die Bilanz-Gleichung

$$\int \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{dO} = \int \int \int_B f(x, y, z) dV \quad (108)$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die Bilanz der Wärmeströme über den Rand  $S = \partial B$  betrachtet wird, die gleich dem Integral auf der rechten Seite der Gleichung, also der Gesamtheit aller Wärmequellen und -senken ist.  $\mathbf{q}$  steht dabei für den Wärmestromvektor und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt die Wärmequellen und -senken im Bereich  $B$ . Um die Zielstellung der Berechnung des Temperaturfeldes im Bereich  $B$  zu verwirklichen, sind folgende Überlegungen erforderlich:

- 1) Es sollte eine DGL aus der Bilanz (108) abgeleitet werden, d.h., das Flußintegral auf der linken Seite ist in ein Volumenintegral umzuformen,

<sup>13</sup>Wenn man als Vektorfeld  $\mathbf{v}$  ein Geschwindigkeitsfeld betrachtet, ist der Fluß ein Volumenstrom. Zum Massenstrom kommt man, wenn man statt  $\mathbf{v}$  das Vektorfeld  $\rho \mathbf{v}$  betrachtet, wobei  $\rho$  die Masse der Flüssigkeit ist.

- 2) es ist ein Modell bzw. Gesetz in Form einer Beziehung zwischen Wärmestromvektor  $q$  und Temperatur  $T$  erforderlich,
- 3) es werden Informationen über  $q$  oder  $T$  bzw. deren Ableitung in Form von Randbedingungen (Heizung, Kühlung, adiabatische Wände) benötigt.

Auf eine nähere Betrachtung des Punktes 3 soll hier nicht eingegangen werden.

Zum Punkt 1:

Der Satz von Gauss besagt, daß

$$\int \int_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{O} = \int \int \int_B \operatorname{div} \mathbf{q} dV$$

gilt. Damit kann man aus (108) die Gleichung

$$\int \int \int_B \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \int \int \int_B f(x, y, z) dV$$

bzw.

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = f(x, y, z) \quad (109)$$

für alle  $(x, y, z)^T \in B$  herleiten<sup>14</sup>.

Zum Punkt 2:

Fourier hat sich neben vielen anderen Dingen auch mit Wärmeleitproblemen befaßt. Dabei hat er die Gesetzmäßigkeit

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (110)$$

also eine Proportionalität von Wärmestromvektor  $\mathbf{q}$  und Temperaturgradienten mit dem Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  entdeckt.  $\lambda$  ist eine Materialkonstante und wird auch als Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Mit dem Fourierschen Gesetz (110) kann man schließlich die Wärmeleitungsgleichung

$$-\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} T) = f(x, y, z) \quad (111)$$

aus der Beziehung (109) herleiten.

## 5.7 Nutzung des Satzes von Gauss zur Konstruktion numerischer Lösungsverfahren

Die Sätze von Gauss und Stokes wurden im Raum, also im  $\mathbb{R}^3$  formuliert. Es soll hier nur darauf hingewiesen werden, daß die Sätze auch in der Ebene gelten. Beim Satz von Stokes betrachtet man dazu einfach Vektorfelder aus dem  $\mathbb{R}^3$ , deren dritte Komponente gleich Null ist. Als Ergebnis erhält man dann den Satz von Stokes in der Ebene und stellt fest, daß er identisch mit dem Satz von Green ist.

Ebenso kann man für geeignete Vektorfelder den Satz von Gauss in der Ebene in der Form

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} dF \quad (112)$$

aufschreiben, wobei der ebene Bereich  $B$  von der Kurve  $\gamma = \partial B$  umrandet wird und  $\mathbf{n}$  der äußere Normalenvektor ist.  $\mathbf{v} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

<sup>14</sup>dieser Schluss von der Integralbeziehung zur Differentialgleichung ist nicht trivial, es ist ein Grenzübergang erforderlich, wobei benutzt wird, daß die Integralbeziehung auch für "kleiner werdende" Teilbereiche von  $B$  gilt.

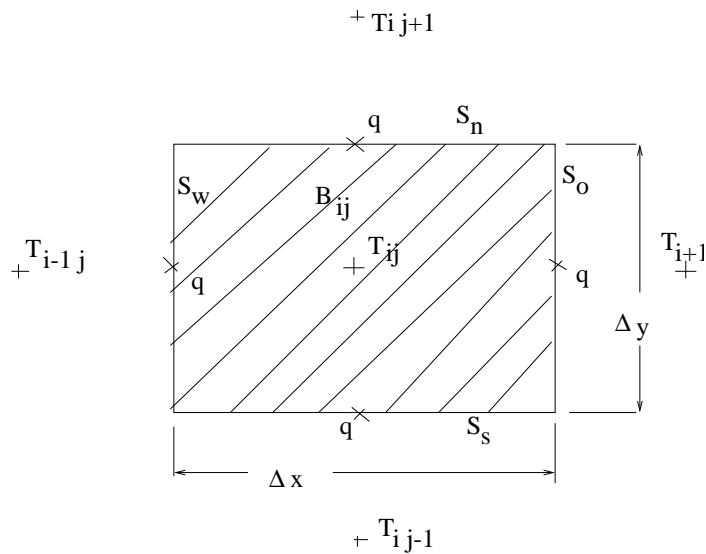


Abbildung 22: Bilanz- oder Kontrollbereich

Es soll nun für die Wärmeleitungsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T = f(x, y)$$

ein numerisches Lösungsverfahren skizziert werden, d.h. lösbare Gleichungen zur Bestimmung der Temperatur im Gebiet  $B$  hergeleitet werden. Dazu wird der Satz von Gauss in der Ebene benutzt. Betrachten wir den rechteckigen Teilbereich  $B_{ij}$  von  $B$ , in dem selbstverständlich die Wärmeleitungsgleichung auch gilt, und integrieren die Gleichung über  $B_{ij}$ , so erhalten wir

$$\int_{B_{ij}} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dF = \int_{B_{ij}} f(x, y) \, dF .$$

Unter Nutzung des Satzes von Gauss ergibt sich

$$\int_{S_{ij}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{B_{ij}} f(x, y) \, dF ,$$

wobei  $S_{ij}$  den Rand von  $B_{ij}$  bezeichnet und aus den Kanten  $S_o, S_w, S_n, S_s$  besteht (siehe auch 22). Die Additivität des Kurvenintegrals ergibt

$$\int_{S_o} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_w} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_n} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_s} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{B_{ij}} f(x, y) \, dF .$$

Wenn man die Richtung der äußeren Normalen auf den einzelnen Kanten berücksichtigt, erhält man

$$\int_{S_o} q_1 \, ds - \int_{S_w} q_1 \, ds + \int_{S_n} q_2 \, ds - \int_{S_s} q_2 \, ds = \int_{B_{ij}} f(x, y) \, dF ,$$

wobei  $q_1, q_2$  die Komponenten des Wärmestromvektors in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung sind. Nun kann man die Integrale auf beiden Seiten der letzten Gleichung näherungsweise berechnen, indem man z.B.

$$\int_{S_o} q_1 \, ds \quad \text{durch} \quad q_1 \Delta y$$

oder

$$\int_{B_{ij}} f(x, y) dF \quad \text{durch} \quad f \Delta x \Delta y$$

nähert ( $q_1$  wird dabei in der Mitte von  $S_o$  betrachtet, ebenso wie  $f$  in der Mitte von  $B_{ij}$ , siehe auch Abb. 22). Letztendlich erhält man auf diese Weise die Gleichung

$$q_{1_{i+\frac{1}{2}j}} \Delta y - q_{1_{i-\frac{1}{2}j}} \Delta y + q_{2_{ij+\frac{1}{2}}} \Delta x - q_{2_{ij-\frac{1}{2}}} \Delta x = f_{ij} \Delta x \Delta y .$$

Wenn man nun noch das Fourier-Gesetz  $q = -\lambda \text{grad} T$  verwendet, und z.B.  $q_{1_{i+\frac{1}{2}j}}$  durch

$$q_{1_{i+\frac{1}{2}j}} = -\lambda \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{\Delta x}$$

beschreibt, erhält man

$$\lambda \frac{\Delta y}{\Delta x} (2T_{ij} - T_{i+1j} - T_{i-1j}) + \lambda \frac{\Delta x}{\Delta y} (2T_{ij} - T_{ij+1} - T_{ij-1}) = f_{ij} \Delta x \Delta y .$$

Die Multiplikation der Gleichung mit  $\Delta x \Delta y$  ergibt letztendlich

$$\lambda \left[ \frac{2T_{ij} - T_{i+1j} - T_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{2T_{ij} - T_{ij+1} - T_{ij-1}}{\Delta y^2} \right] = f_{ij} . \quad (113)$$

Auf die beschriebene Weise erhält man für alle Teilbereiche  $B_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$  Gleichungen der Art (113), die miteinander verkoppelt sind und somit ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Temperaturwerte in den Punkten  $(i, j)$  bilden. Auf Sonderbetrachtungen am Rand von  $B$ , wo explizite Temperaturen oder Wärmeströme vorgegeben sind, kann hier nicht eingegangen werden (ist Thema der "Numerik für Ingenieure").

## 6 Partielle Differentialgleichungen

### 6.1 Allgemeines

Einige Beispiele von partiellen DGLn haben wir im Zusammenhang mit der Behandlung der Operatoren der Vektoranalysis mit den Navier-Stokes Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung schon diskutiert.

Mit partiellen DGLn ist es möglich zahlreiche Phänomene der Technik und Naturwissenschaften zu beschreiben. Zu nennen sind hier beispielsweise

- das Schwingungsverhalten von Platten,
- die Stabilität von Flugzeugtragfügeln,
- die Bestimmung der Dichteverteilung bei Strömungen,
- die Beschreibung von Temperaturverteilungen in vorgegebenen Medien oder
- die Beschreibung von Wellenausbreitungsvorgängen in flüssigen oder gasförmigen Medien.

Es ist an dieser Stelle nicht möglich das ausgesprochen umfangreiche mathematische Gebiet der partiellen Differentialgleichungen vollständig abzuhandeln. Es kann nur um die Vermittlung einiger Grundlagen der Herleitung von partiellen DGLn und die Beschreibung einiger Lösungsmethoden gehen.

### 6.2 Was ist eine partielle Differentialgleichung?

#### Definition 6.1.

Es sei  $D$  ein Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in D$ . Unter einer partiellen Differentialgleichung der Ordnung  $k$  für eine Funktion  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  versteht man eine Gleichung der Form

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_n^k}) = 0. \quad (114)$$

#### Bemerkung 6.2.

Im Unterschied zu den gewöhnlichen DGLn treten in der Funktion  $u$  mehrere unabhängige Veränderliche auf, und in der Gleichung (114) neben  $u$  und  $\mathbf{x}$  partielle Ableitungen von  $u$  bis zur Ordnung  $k$  auf. Ist  $n = 1$ , so liegt mit (114) als Spezialfall eine gewöhnliche DGL vor.

Die partielle DGL (114) heißt linear, wenn der durch

$$L[u] := F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_n^k})$$

definierte Operator bezügl.  $u$  linear ist, d.h.

$$L[u + v] = L[u] + L[v] \quad \text{und} \quad L[\alpha u] = \alpha L[u]$$

für Funktionen  $u$  und  $v$  sowie  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt.

Um zu Lösungen von (114) zu gelangen, sind Rand- und/oder Anfangsbedingungen zu stellen. Im Zusammenhang mit der Bestimmung von Lösungen partieller DGLn sind die folgenden Fragen interessant:

- (i) Gibt es überhaupt eine oder mehrere Lösung des Problems (Existenzproblem)?

- (ii) Falls es eine Lösung gibt, stellt sich die Frage der eindeutigen Bestimmtheit (Eindeutigkeitsproblem).
- (iii) Welchen Einfluß haben "Meßungenauigkeiten" bei den Rand- und/oder Anfangsdaten auf die Lösung.

Es kann hier nur andeutungsweise auf die Fragestellungen (i) und (ii) eingegangen werden, wobei man meistens schon sehr zufrieden ist, wenn man - auf welchem Weg auch immer - eine Lösung einer partiellen DGL gefunden hat. Hat man mehrere gefunden, hilft oft der ingenieurphysikalische Kontext die sinnvollen Lösungen herauszufiltern.

### 6.3 Beispiele

Im folgenden sollen nun einige bekannte DGLn der mathematischen Physik kurz aufgeführt werden. Dabei werden die gängigen Operatoren der Vektoranalysis (Laplace-Operator,  $\nabla$ -Operator,...) zur Darstellung genutzt.

Beispiel 1: Die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \infty) \quad (115)$$

ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung.  $u$  steht für die Temperatur, die vom Ort  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  abhängt.

Beispiel 2: Die Wellengleichung

$$c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \infty) \quad (116)$$

ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung ( $c$  ist hier die Phasengeschwindigkeit). (116) beschreibt die Ausbreitung von Wellen in homogenen flüssigen oder gasförmigen Medien.

Beispiel 3: Die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

$$\Delta U(\mathbf{x}) + k^2 U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (117)$$

ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für  $U(\mathbf{x})$ . Der Spezialfall  $k = 0$  ergibt die Potentialgleichung

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (118)$$

die in der Elektrostatik eine wichtige Rolle spielt.

Beispiel 4: Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \infty) \quad (119)$$

mit einem gegebenen Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .  $\rho(\mathbf{x}, t)$  steht hier für die Dichteverteilung einer mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  strömenden Flüssigkeit.

Beispiel 5: Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, \infty) \quad (120)$$



mit den positiven Konstanten  $\epsilon$  (Dielektrizität),  $\mu$  (Permeabilität) und  $\sigma$  (elektrische Leitfähigkeit) stellen ein lineares System von partiellen DGLn 1. Ordnung für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  dar<sup>15</sup>.

#### 6.4 Korrektheit von Problemstellungen der mathematischen Physik und des Ingenieurwesens

Oben wurde die Frage der Auswirkungen von Fehlern in den Anfangs- oder Randdaten auf die Lösung von partiellen Differentialgleichungen angesprochen. Mathematisch wird dieser Sachverhalt mit Korrektheit oder Inkorrektheit von Problemen bezeichnet.

**Definition 6.3.** (Korrektheit)

Ein Problem der mathematischen Physik heißt korrekt gestellt, wenn eine und nur eine Lösung der Gleichung existiert, die den vorgegebenen Zusatzbedingungen (Rand- und/oder Anfangsbedingungen) genügt, und wenn kleine Änderungen der Vorgaben kleine Änderungen der Lösungsfunktion entsprechen (wenn die Lösungsfunktion stetig von den Vorgaben abhängt).

Der Begriff der Korrektheit eines Problems setzt die Möglichkeit voraus, zwei voneinander verschiedene Funktionen miteinander vergleichen zu können, indem man einen verallgemeinerten Abstand zwischen ihnen einführt, der den Grad der Annäherung der beiden Funktionen mißt. Das kann auf verschiedene Weisen geschehen. Bei reellwertigen Lösungsfunktionen  $u, v$ , die von  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  und  $t \in [0, T]$  abhängen, kann man den Abstand z.B. durch

$$\|u - v\| := \max_{\mathbf{x} \in D, t \in [0, T]} |u(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, t)|$$

erklären. Ist bei der Problemstellung eine Anfangsbedingungen für die Lösung vorgegeben, z.B.  $u(\mathbf{x}, 0) = u_0$ , so bedeutet die stetige Abhängigkeit der Lösungsfunktion vom Anfangswert, daß für jede Zahl  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gefunden werden kann, so daß die Ungleichung

$$\|u(u_0) - u(u_0^*)\| < \epsilon$$

gilt, sobald die Ungleichung

$$|u_0 - u_0^*| < \delta$$

erfüllt ist. Neben der Forderung der stetigen Abhängigkeit der Lösung von Vorgaben kann man darüberhinaus die stetige Abhängigkeit von Ableitungen der Lösung bis zu einer vorgegebenen Ordnung fordern. Der Nachweis der Korrektheit von Problemstellungen hängt im Einzelfall von der Art der Differentialgleichung und den jeweiligen Rand- und Anfangsbedingungen ab. Die Nachweise sind im einzelnen oft kompliziert und das folgende Beispiel zeigt, daß selbst die Linearität der Differentialgleichung keine Garantie für die Korrektheit bietet.

Beispiel eines inkorrekt gestellten Problems (nach Hadamard):

Im Gebiet  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$  wird die Lösung der DGL

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

betrachtet. Als Randbedingungen sind

$$u|_{x=-\frac{\pi}{2}} = u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \phi(x),$$

<sup>15</sup>Statt *rot*  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  wird auch die Bezeichnung  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  verwendet.

vorgegeben. Für  $\phi(x)$  möge außerdem

$$\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

gelten. Für  $\phi(x) = 0$  stellt  $u(x, y) = 0$  die einzige Lösung dar. Für

$$\phi^*(x) = e^{-\sqrt{2n+1}} \cos(2n+1)x$$

lautet die einzige Lösung

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2n+1} e^{-\sqrt{2n+1}} \cos(2n+1)x \sinh(2n+1)y \quad .$$

Es läßt sich nun leicht überprüfen, daß die Funktion  $\phi^*$  bei hinreichend großem  $n$  beliebig klein wird, also einen beliebig kleinen Abstand zu  $\phi$  hat. Andererseits hat die Lösungsfunktion  $u^*$  die Form eines Kosinus, der bei jedem von Null verschiedenen  $y$  eine beliebig große Amplitude hat, und damit beliebig stark von  $u = 0$  abweicht.

## 7 Fourierreihen

In der Physik und im Ingenieurwesen spielen periodische Vorgänge eine große Rolle. Sie treten in Form von mechanischen oder elektrischen Schwingungen, Wellen, Drehbewegungen treten sie vielfach auf. In der jüngsten Vergangenheit wurden auch zahlreiche periodische Phänomene in der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften entdeckt. Das Darstellen beliebiger periodischer funktionaler Zusammenhänge durch Reihen von Cosinus- und Sinusfunktionen ist dabei die mathematische Grundaufgabe.

### 7.1 Periodische Funktionen

**Definition 7.1.** (periodische Funktion)

Unter einer periodischen Funktion verstehen wir eine Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$ , die die Gleichung

$$f(x + L) = f(x) \quad (121)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt. Dabei ist  $L$  eine positive Konstante.  $L$  heißt die Periode von  $f$ . Man nennt  $f$  auch eine  $L$ -periodische Funktion.

*Bemerkung 7.2.*

Teilt man die reelle Achse in Intervalle der Länge  $L$  ein, z.B. in Intervalle  $[kL, (k + 1)L]$  ( $k$  ganzzahlig), so ist der Graph von  $f$  auf allen diesen Intervallen gleich. Die Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  sind wichtige periodische Funktionen mit der Periode  $2\pi$ . Die Funktionen

$$\sin(nx) \quad \cos(nx) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

haben die Perioden  $\frac{2\pi}{n}$  und damit auch die Periode  $2\pi$ .

**Definition 7.3.** (trigonometrisches Funktionensystem)

Die Funktionen  $\varphi(x) = 1$  und  $\sin(nx)$  sowie  $\cos(nx)$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) bilden das trigonometrische Funktionensystem.

*Bemerkung 7.4.*

Durch eine einfache Transformation bzw. Substitution kann man jede  $L$ -periodische Funktion  $f$  in eine Funktion mit der Periode  $2\pi$  verwandeln.

Wir substituieren  $x = t\frac{L}{2\pi}$  und erhalten mit

$$\hat{f}(t) := f\left(t\frac{L}{2\pi}\right)$$

ausgehend von  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $\hat{f}$ . Dieser Fakt rechtfertigt im weiteren die abschließliche Behandlung von  $2\pi$ -periodischen Funktionen.

### 7.2 Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige  $2\pi$ -periodische Funktion. Unser Ziel soll im folgenden darin bestehen, diese Funktion durch eine Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (122)$$

darzustellen. Eine Reihe (122) heißt trigonometrische Reihe. Es gilt also die Frage zu beantworten, ob  $f$  tatsächlich so darstellbar ist, und gegebenenfalls eine Möglichkeit zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots$  und  $b_1, b_2, \dots$  zu finden. Zur Klärung dieser Fragen nehmen wir die

Existenz einer Reihe der Form (122) an, und setzen desweiteren die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe voraus.

Zur Bestimmung der Koeffizienten:

Beide Seiten der Gleichung (122) werden mit  $\sin(kx)$  multipliziert und anschließend über das Intervall  $[-\pi, \pi]$  integriert. Durch die Annahme der gleichmäßigen Konvergenz kann man die Reihe gliedweise integrieren, man erhält also

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \right). \quad (123)$$

Wenn wir uns nun an die Integrationsaufgaben aus der HM I und HM II erinnern stellen wir fest, daß die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx &= 0 \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= 0 \quad \text{für } k \neq n, k, n \in \mathbb{N}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= \pi \quad \text{für } k = n, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (124)$$

gelten. Danach verschwinden auf der rechten Seite von (123) alle Integrale bis auf das Integral  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx$ , so daß aus (123) die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = b_k \pi \quad (125)$$

folgt. Multipliziert man (122) mit  $\cos(kx)$  und integriert über das Intervall  $[-\pi, \pi]$  erhält man auf analoge Weise die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = a_k \pi & \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = a_0 \pi & \text{für } k = 0. \end{cases} \quad (126)$$

Die Auflösung nach den Koeffizienten liefert die Berechnungsformeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (127)$$

Diese Methode zur Berechnung aller Koeffizienten ist von Fourier genialerweise entdeckt worden, weshalb die Approximation periodischer Vorgänge mit Sinus-Kosinus-Reihen auch Fourieranalyse genannt wird. Die Ausdrücke in (127) heißen Fourier-Koeffizienten.

Das Problem besteht nun darin, daß man nicht a-priori weiß, ob die Reihe gleichmäßig konvergiert. Immerhin kann man aber die Formeln (127) für jede integrierbare Funktion  $f$  anwenden und damit formal die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

bilden. Sie heißt Fourier-Reihe von  $f$ . Es bleibt die Frage zu beantworten, für welche Funktionen  $f$  konvergiert deren Fourier-Reihe gegen  $f$ ? Glücklicherweise kann man diese Frage für die meisten im Ingenieurwesen vorkommenden periodischen Funktionen positiv beantworten, nämlich für stückweise glatte Funktionen.

**Definition 7.5.**

Eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion  $f$  heißt stückweise glatt, wenn gilt

- (a)  $f$  ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich nirgends häufen,
- (b) in diesen Ausnahmepunkten  $x_i$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte  $f(x_i + 0)$  und  $f(x_i - 0)$  sowie  $f'(x_i + 0)$  und  $f'(x_i - 0)$ . Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt dann

$$f'(x_i + 0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i + 0)}{h}, \quad (128)$$

$$f'(x_i - 0) = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i - 0)}{h},$$

- (c) in allen Punkten  $x_i$  ist der Funktionswert  $f(x_i)$  das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i + 0) + f(x_i - 0)). \quad (129)$$

Die Forderung (c) ist stark auf Fourierreihen zugeschnitten, wie man im folgenden sehen wird. Schließlich gilt der folgende Satz.

**Satz 7.6.** (Konvergenz von Fourierreihen)

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische stückweise glatte Funktion, so konvergiert ihre Fourierreihe punktweise gegen  $f$ . In jedem kompakten Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von  $f$  ist die Konvergenz darüberhinaus gleichmäßig.

*Beweis.*

Wir betrachten die  $n$ -te Partialsumme der Fourier-Reihe von  $f$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \quad (130)$$

Zu zeigen ist  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dazu werden auf der rechten Seite von (129) für die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  die entsprechenden Integralausdrücke eingesetzt und  $\sum$  mit  $\int$  vertauscht. Unter Nutzung von Kosinus-Additionstheoremen der durch vollständige Induktion zu beweisenden Summenformel

$$\sin((2n+1)t) = [1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)] \sin t$$

erhält man die folgende Herleitung:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(\lambda(t-x))}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt, \quad \lambda = n + \frac{1}{2}, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\sin(\lambda\tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau, \quad \text{mit } t = x + \tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} (f(x+\tau) - f(x+0)) \frac{\sin(\lambda\tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau + f(x+0) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\lambda\tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^0 (f(x+\tau) - f(x-0)) \frac{\sin(\lambda\tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau + f(x-0) \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(\lambda\tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau \right) \end{aligned}$$

In den letzten beiden Zeilen streben das erste und das dritte Integral bei festem  $x$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen Null. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Intervallen ohne Sprungstellen von  $f$  (wird in einem folgenden Hilfssatz bewiesen). Das zweite Integral strebt mit  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{\pi}{2}$ . Das vierte Integral ist nach Substitution  $\bar{\tau} = -\tau$  gleich dem zweiten, strebt demnach auch gegen  $\frac{\pi}{2}$ . Damit strebt  $s_n(x)$  bei festem  $x$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  und außerdem punktweise und gleichmäßig auf kompakten Intervallen ohne Sprungstellen von  $f$  gegen  $f$ .  $\square$

Mit der Verabredung

$$s_x(t) := \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2 \sin(t/2)} & \text{für } t \in (0, \pi], \\ f'(x+0) & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

formulieren wir den noch ausstehenden Hilfssatz zum obigen Beweis der Konvergenz der Fourierreihe.

**Lemma 7.7.**

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$J_x(\lambda) := \int_0^\pi s_x(t) \sin(\lambda t) dt \rightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall  $[\alpha, \beta]$  ohne Sprungstellen von  $f$ .

*Beweis.*

Die Funktion  $\sin(\lambda t)$  wechselt jeweils im Abstand  $h = \pi/\lambda$  ihr Vorzeichen ( $\lambda > 0$ ). Die Substitution  $t = u + h$  in  $J_x(\lambda)$  ergibt

$$J_x(\lambda) = - \int_{-h}^{\pi-h} s_x(u+h) \sin(\lambda u) du.$$

Schreibt man hier wieder  $t$  statt  $u$  und addiert dies zu  $J_x(\lambda)$  in seiner ursprünglichen Form, erhält man

$$2J_x(\lambda) = - \int_{-h}^0 s_x(t+h) \sin(\lambda t) dt + \int_0^{\pi-h} (s_x(t) - s_x(t+h)) \sin(\lambda t) dt + \int_{\pi-h}^\pi s_x(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Man überlegt nun, daß  $|s_x(t)| \leq M$  gilt<sup>16</sup>. Damit ergibt sich die Abschätzung

$$2|J_x(\lambda)| \leq Mh + \int_0^{\pi-h} |s_x(t) - s_x(t+h)| dt + Mh. \quad (131)$$

Wir zerlegen  $\int_0^{\pi-h}$  in

$$\int_0^{\pi-h} = \left( \int_0^{t_1-h} + \int_{t_1-h}^{t_1} \right) + \left( \int_0^{t_2-h} + \int_{t_2-h}^{t_2} \right) + \dots + \int_{t_m}^{\pi-h}$$

wobei  $t_1, \dots, t_m$  die Unstetigkeitsstellen von  $s_x$  sind. Dabei kann es höchstens so viele - sagen wir  $N$  - geben, wie es Sprünge von  $f$  in  $[0, \pi]$  gibt. In den Intervalle  $[t_i - h, t_i]$  der Länge  $h$  ist der Integrand  $|s_x(t) - s_x(t+h)| \leq 2M$ , während er in den übrigen Intervallen aus Stetigkeitsgründen

<sup>16</sup>Die Beschränktheit in  $t$  für jedes feste  $x$  folgt für  $t \rightarrow 0$  aus der l'Hospitalischen Regel. Die Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf Zähler und Nenner ergibt  $s_x(t) = f'(x+t_1)/\cos(t_2/2)$  mit  $t_1, t_2 \in (0, t)$ , woraus die gleichmäßige Beschränktheit  $|s_x(t)| \leq M$  für alle  $t \in [0, \pi]$  und alle  $x \in [\alpha, \beta]$  folgt.

$\leq \epsilon$  ist für  $h \leq h_0$  (dabei  $\epsilon > 0$  beliebig gegeben und  $h_0$  passend gewählt). Damit ergibt sich aus (131)

$$2|J_x(\lambda)| \leq Mh + N \cdot 2Mh + \epsilon \cdot (\pi - h) + Mh < (2N + 2)M \cdot h + \epsilon\pi$$

für  $h \leq h_0$ . Diese Abschätzung gilt sowohl für festes  $x$ , als auch für alle  $x$  aus einem Intervall  $[\alpha, \beta]$  ohne Sprünge von  $f$ . Die rechte Seite wird aber kleiner als jedes  $\epsilon^* > 0$ , wenn  $h < h_1$  ist (wobei  $h_1$  genügend klein gewählt wurde). Daraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.  $\square$

Eine wichtige Ungleichung für die Fourier-Koeffizienten beinhaltet der folgende Satz.

**Satz 7.8.**

Für alle integrierbaren Funktionen auf  $[-\pi, \pi]$  gilt die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (132)$$

Dabei sind  $a_k, b_k$  die Fourier-Koeffizienten von  $f$ .

*Beweis.*

In der folgenden Herleitung wird die quadratische Klammer im Integral ausmultipliziert. Die Verwendung der Orthogonalitätsrelationen (124) ergibt dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))])^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f^2(x) - 2f(x)[...] + [...]^2) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

$\square$

Aus der Besselschen Ungleichung (132) erhält man für  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

d.h., die linke Reihe ist konvergent und es gilt die Folgerung

**Korollar 7.9.**

Die Fourier-Koeffizienten einer integrierbaren Funktion sind Nullfolgen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0. \quad (133)$$

Schließlich formulieren wir den Satz

**Satz 7.10.**

Ist  $f$  eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode  $2\pi$ , so konvergiert ihre Fourier-Reihe gleichmäßig und absolut gegen  $f$ . Für ihre Fourier-Koeffizienten  $a_k, b_k$  folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

*Beweis.*

Aus  $(|A| - |B|)^2 \geq 0$  folgt  $2 < |AB| \leq A^2 + B^2$ . Damit gilt mit  $A = \frac{1}{k}$  und  $B = ka_k$  die Ungleichungskette

$$2|a_k \cos(kx)| \leq 2|a_k| = \frac{2}{k}|ka_k| \leq \frac{1}{k^2} + (ka_k)^2 \quad (134)$$

und analog

$$2|b_k \sin(kx)| \leq 2|b_k| \leq \frac{1}{k^2} + (kb_k)^2 \quad (135)$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Die Ableitung  $f'$  wird an ihren Sprungstellen durch das arithmetische Mittel ihrer einseitigen Grenzwerte erklärt. Die Fourier-Koeffizienten von  $f'$  sind  $kb_k$  und  $-ka_k$ , wie man durch partielle Integration der Integraldarstellungen der Koeffizienten herausfindet. Die Besselsche Ungleichung für  $f'$  ergibt damit die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2).$$

Die obigen Ungleichungen (134) und (135) ergeben

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq |a_k| + |b_k| \leq \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2). \quad (136)$$

Da  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{k^2} \right)$  konvergiert, ist diese Reihe eine Majorante für die Fourier-Reihe von  $f$ , wie auch für die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ . Daraus folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Bisher wurde bei den Konvergenzuntersuchungen der Abstand zwischen der Funktion und der Fourier-Reihe als maximaler Betrag betrachtet und im Satz (7.6) die gleichmäßige Konvergenz für stückweise glatte Funktionen nachgewiesen. Mißt man den Unterschied zweier Funktionen nicht am Maximum der Differenzen aller Funktionswerte auf  $[-\pi, \pi]$ , sondern gemäß der

**Definition 7.11.**  $L_2$ -Norm

$$\|f - g\|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

kann man auf die Voraussetzung der stückweisen Glattheit verzichten und gelangt man zu

**Satz 7.12.** (Konvergenz im quadratischen Mittel)

Die Fourier-Reihe einer auf  $[-\pi, \pi]$  stückweise stetigen Funktion  $f$  konvergiert stets auf  $[-\pi, \pi]$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ , d.h., für die Partialsummen  $s_m$  der Fourier-Reihe von  $f$  gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

Auf den Beweis wird etwas später nochmal eingegangen.

Nach den vielen Beweisen soll nun auf einige Beispiele und praktische Aspekte der Berechnung von Fourier-Reihen eingegangen werden. Wenn man die Berechnungsformeln für die Fourier-Koeffizienten ansieht, und an die Integration gerader oder ungerader Funktionen über daß Intervall  $[-\pi, \pi]$  denkt, dann kommt man schnell zu der



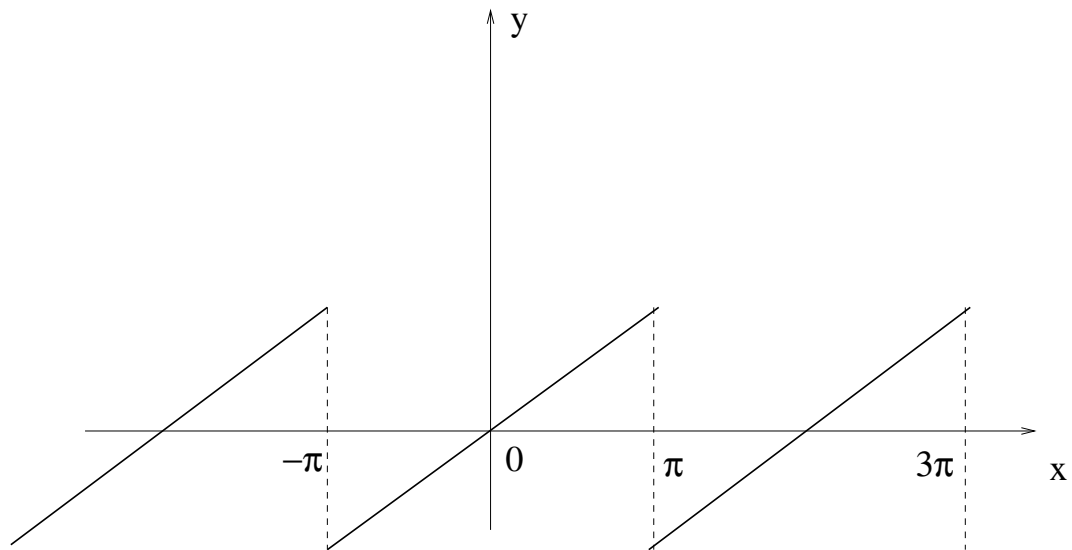


Abbildung 23: Sägezahn-Kurve

**Korollar 7.13.**

Die Fourierreihe einer ungeraden Funktion ist eine reine Sinusreihe, einer geraden Funktion eine reine Kosinusreihe (incl. konstantem Glied).

Beispiel (Sägezahnkurve):

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } -\pi < x < \pi, \quad (a > 0) \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

und denken uns die Funktion zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt.  $f$  ist eine ungerade Funktion und damit gilt  $a_n = 0$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Die  $b_n$  berechnet man mit der Formel (127) zu

$$b_n = \frac{2a}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2a}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right) = \frac{2a(-1)^{n+1}}{n}.$$

Damit folgt die Reihendarstellung der Sägezahnkurve

$$f(x) = 2a \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - +\dots \right).$$

Setzt man  $a = 1$  und betrachtet nur  $x$ -Werte aus  $(-\pi, \pi)$ , so erhält die Formel

$$x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - +\dots \right), \quad -\pi < x < \pi,$$

und damit die erstaunliche Darstellung einer sehr einfachen Funktion durch die Kombination sich wild bewegender Sinusfunktionen.

### 7.3 Komplexe Schreibweise von Fourier-Reihen

Obwohl wir bisher nur reellwertige periodische Funktionen betrachtet haben, erweist sich in vielen Bereichen der Technik die komplexe Schreibweise von Fourier-Reihen oft als sehr brauchbar. Deshalb wollen wir ausgehend von den reellen Fourier-Koeffizienten die komplexe Schreibweise herleiten.

Wir wissen, daß jede stückweise glatte,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (137)$$

entwickelt werden kann. Die Reihendarstellung wird noch übersichtlicher, wenn wir die aus den Eulerschen Formeln aus dem Gebiet der komplexen Zahlen folgenden Beziehungen

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (138)$$

berücksichtigen. Damit können wir die Fourier-Reihe von  $f$  umformen in

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Ziel einer recht kompakten Darstellung verabreden wir  $b_0 := 0$  und

$$a_{-n} := a_n \quad \text{und} \quad b_{-n} := -b_n \quad (139)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Damit und mit der Abkürzung

$$\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \text{ ganzzahlig}, \quad (140)$$

erhält  $f$  die Reihendarstellung

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}). \quad (141)$$

Die  $m$ -te Partialsumme der rechten Seite hat die Form

$$s_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^m (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{inx}. \quad (142)$$

Da sie für  $m \rightarrow \infty$  gegen  $f(x)$  strebt, schreiben wir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}. \quad (143)$$

Die rechte Seite wird dabei als Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{inx}. \quad (144)$$

im Sinne einer "symmetrischen" Grenzwertbildung verstanden<sup>17</sup>. Die Koeffizienten  $\alpha_n$  in (143) lassen sich ebenso wie die reellen Koeffizienten  $a_n, b_n$  direkt durch eine Integralformel angeben.

<sup>17</sup>Normalerweise wird unter  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$  die Summe  $\sum_{n=-\infty}^0 c_n + \sum_0^{\infty} c_n$  verstanden, d.h., es müssen zwei Grenzwerte gebildet werden.

Wenn wir annehmen, daß die Reihe (143) gleichmäßig konvergiert, erhält man nach Multiplikation der Reihe mit  $e^{ikx}$ ,  $k$  ganzzahlig, der Integration über  $[-\pi, \pi]$  und der Vertauschung von  $\int_{-\pi}^{\pi}$  mit  $\sum$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx. \quad (145)$$

Das rechts stehende Integral ist dabei so zu verstehen, daß über Real- und Imaginärteil einzeln integriert wird und danach summiert wird. Man errechnet somit

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-k)x) + i \sin((n-k)x)) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) dx + i \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-k)x) dx}_0 = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = k, \\ 0 & \text{falls } n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Summe in (145) reduziert sich damit nur auf das eine Glied mit  $n = k$ , und es ergibt sich durch umstellen

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (146)$$

Die Integralformel (146) gilt allgemein, also auch wenn die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (143) nicht gegeben ist, denn aus der Beziehung (140) kann man die Beziehung (146) einfach durch Einsetzen der Integralformeln für  $a_n$  und  $b_n$  herleiten, wenn man  $e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)$  beachtet.

Für die Rückberechnung von  $a_n, b_n$  aus  $\alpha_n$  ergibt sich

$a_n = 2 \operatorname{Re} \alpha_n, b_n = -2 \operatorname{Im} \alpha_n$  oder

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}, \quad b_n = i(\alpha_n - \alpha_{-n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (147)$$

Dabei ist  $\alpha_n = \overline{\alpha_{-n}}$ .

Die Konvergenzsätze (7.6) und (7.8) gelten für die komplex geschriebene Reihe (143) entsprechend.

*Bemerkung 7.14.*

Zur Beschreibung von Schwingungen verwenden Ingenieure und Physiker häufig unmittelbar den Reihenansatz über die komplexe Exponentialfunktion, also

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}. \quad (148)$$

$\omega > 0$  ist dabei die Kreisfrequenz der Schwingung. Mit dieser Reihe arbeitet man einfacher als mit Sinus- und Kosinusreihen, da die Exponentialfunktion die Gleichung  $e^{x+y} = e^x e^y$  erfüllt.

Will man z.B. die phasenverschobene Schwingung  $g(t) := f(t - t_0)$  durch eine Fourierreihe beschreiben, dann ergibt sich aus (148) sofort

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(\alpha_n e^{-in\omega t_0})}_{=: \beta_n} e^{in\omega t}, \quad (149)$$

und somit ist die Fourier-Reihe von  $g$  schnell ermittelt. Der Weg über die reelle Fourier-Reihe von  $f$  ist dagegen wesentlich umständlicher.

### 7.4 Fourier-Reihen komplexwertiger Funktionen

In den bisherigen Abschnitten haben wir zwar Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , also reellwertige Funktionen betrachtet, jedoch an keiner Stelle benutzt, daß die Funktionen nur reelle Werte haben dürfen. Deshalb können sämtliche Aussagen und Herleitungen der vorangegangenen Abschnitte problemlos auf komplexwertige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  übertragen werden.

Bei den Integralformeln zur Berechnung der Koeffizienten  $a_n, b_n$  ist lediglich darauf zu achten, daß Real- und Imaginärteil des Integranden einzeln zu integrieren und dann zu summieren sind, also

$$\int f(t) dt = \int \operatorname{Re} f(t) dt + i \int \operatorname{Im} f(t) dt .$$

Im folgenden werden nun einige Rechenregeln zur vereinfachten Berechnung von Fourier-Reihen notiert.

**Satz 7.15.** (Rechenregeln)

Im folgenden sind  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $L$ -periodische stückweise glatte Funktionen mit den Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$  mit  $\omega = \frac{2\pi}{L}$  als Kreisfrequenz<sup>18</sup>.

(1) Linearität

$$af + bg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\alpha_n + b\beta_n) e^{in\omega t}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (150)$$

(2) Konjugation, Zeitumkehr

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_{-n}} e^{in\omega t}, \quad f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} e^{in\omega t}. \quad (151)$$

(3) Streckung, Ähnlichkeit

$$f(ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inc\omega t} \quad (152)$$

(4) Verschiebung im Zeitbereich (Phasenverschiebung)

$$f(t+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{in\omega a} \alpha_n) e^{in\omega t} \quad (153)$$

(5) Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{ik\omega t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} e^{in\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (154)$$

(6) Fourier-Reihe der Ableitung

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in\omega \alpha_n) e^{in\omega t} \quad (155)$$

(7) Fourier-Reihe der Stammfunktion

Sei  $a_0 = \alpha_0 = \int_0^L f(t) dt = 0$ , dann gilt

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = -\frac{1}{L} \int_0^L t f(t) dt + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{in\omega} \right) e^{in\omega t}. \quad (156)$$

<sup>18</sup>Die Verbindung zu  $2\pi$ -periodischen Funktionen wird durch die Substitution  $t := \frac{x}{\omega}$  hergestellt.  $F(x) := f(\frac{x}{\omega} - \pi)$  ist dann eine  $2\pi$ -periodische Funktion im bisher betrachtetem Sinne.

Die Beweise lassen sich durch richtige Anwendung der Potenzgesetze, gliedweise Differentiation und im Falle von (156) durch die partielle Integration der Formel für die Fourier-Koeffizienten in der komplexen Schreibweise  $\alpha_n = \frac{1}{L} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$  (siehe auch (146)) mit  $u(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  und  $v'(t) = e^{-in\omega t}$  gut durchrechnen und sollten als Übung geführt werden.

**Definition 7.16.** (periodisches Faltungsprodukt)

Die  $L$ -periodische Funktion

$$(f * g)(t) := \frac{1}{L} \int_0^L f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

heißt das periodische Faltungsprodukt von  $f$  und  $g$ .

**Satz 7.17.**

Die Fourier-Reihe des Faltungsproduktes lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \beta_n) e^{in\omega t} . \quad (157)$$

*Beweis.* Mit dem Satz von Fubini für Gebietsintegrale leitet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L (f * g)(t) e^{-in\omega t} dt &= \frac{1}{L^2} \int \int_{0 \leq \tau, t \leq L} f(t - \tau) g(\tau) e^{-in\omega t} d\tau dt \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \left[ \int_0^L f(t - \tau) e^{-in\omega(t-\tau)} dt \right] g(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_n g(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau = \alpha_n \beta_n , \end{aligned}$$

wobei im inneren Integral  $\zeta = t - \tau$  substituiert wurde. □

**Satz 7.18.** (Eigenschaften des periodischen Faltungsproduktes)

Seien  $f, g, h$   $L$ -periodische in  $[0, L]$  stückweise stetige Funktionen.

(1) Das Faltungsprodukt ist assoziativ, distributiv und kommutativ, d.h.,

$$f * (g * h) = (f * g) * h , \quad f * (g + h) = f * g + f * h , \quad f * g = g * f .$$

(2) Das Faltungsprodukt glättet, d.h.,  $(f * g)(t)$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  stetig.

(3) Die Fourier-Reihe des Faltungsproduktes  $f * g$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f * g$  und es gilt

$$(f * g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \beta_n) e^{in\omega t} .$$

*Beweis.*

Der Beweis von (1) ist elementares Ergebnis von einfachen Integrationsregeln.

$g$  und  $f$  sind beschränkt, mit  $|g(t)| \leq M$  gilt deshalb für  $h = f * g$

$$\begin{aligned} |h(t + \delta) - h(t)| &\leq \frac{1}{L} \int_0^L |f(t + \delta - \tau) - f(t - \tau)| |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M}{L} \int_0^L |f(\zeta + \delta) - f(\zeta)| d\zeta . \end{aligned}$$

$\int_0^L |f(\zeta + \delta) - f(\zeta)| d\zeta$  ist die Fläche zwischen den Graphen von  $f(t + \delta)$  und  $f(t)$  und strebt für  $\delta \rightarrow 0$  gegen Null.

Bezüglich der Aussage (3) verzichten wir auf den nicht ganz elementaren Beweis. Es sei nur noch einmal darauf hingewiesen, daß man zum Faltungsprodukt stückweise stetiger Funktionen keine zusätzlichen Glattheitsforderungen zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe benötigt, wie etwa beim Satz (7.6). □

Weiter oben wurde mit der Besselschen Ungleichung eine wichtige Beziehung für die Fourier-Koeffizienten nachgewiesen. Eine etwas stärkere Aussage beinhaltet der

**Satz 7.19.** (*Parsevalsche Vollständigkeitsrelationen*)

Sind  $f$  und  $g$   $L$ -periodische in  $[0, L]$  stückweise stetige Funktionen mit den Fourier-Reihen  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$  und  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$ , so gelten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} = \frac{1}{L} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \quad (158)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{1}{L} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (\text{Parsevalsche Gleichung}) \quad (159)$$

*Beweis.*

Aus den Rechenregeln des Satzes 7.15 folgt

$$f(t) * \overline{g(-t)} = \frac{1}{L} \int_0^L f(\tau) \overline{g(\tau - t)} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} e^{in\omega t}.$$

Setzt man nun  $t = 0$ , so folgt (158). Für  $g = f$  folgt (159).  $\square$

**Korollar 7.20.**

Aus der Parsevalschen Gleichung (159) für die komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe von  $f$  folgt für die Koeffizienten  $a_n, b_n$  der entsprechenden sin – cos-Reihe die Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{L} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (160)$$

Der Beweis der Folgerung ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung  $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  und das Zusammenfassen der Summanden mit den Indizes  $n$  und  $-n$ .

Anwendung finden die Parsevalschen Relationen z.B. bei der Aufstellung von Summenformeln und der Berechnung bestimmter Integrale.

## 7.5 Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit der Fourierschen Methode

Die wichtigsten Anwendungen von Fourier-Reihen liegen auf dem Gebiet der mathematischen Physik. An der Lösung des klassischen Problems der "schwingenden Saite" soll die Methodik im folgenden demonstriert werden.

Unter einer Saite versteht man einen frei verbiegbaren gewichtslosen Faden. Eine solche Saite der Länge  $l$  sei an den Enden  $x = 0$  und  $x = l$  der  $x$ -Achse eingespannt und unter Einwirkung einer Spannung  $H$  längs der Achse im Gleichgewicht. In der Abb. 24) ist die Situation dargestellt.

Wir stellen uns vor, im Zeitpunkt  $t = 0$  sei die Saite aus der Gleichgewichtslage gebracht. Ihre Punkte mögen außerdem eine gewisse Geschwindigkeit in vertikaler Richtung besitzen. Dann beginnen die Punkte der Saite in einer vertikalen Ebene zu schwingen. Nimmt man an, jeder Punkt  $M$  der Saite mit der Abszisse  $x$  schwinde streng vertikal, so ist seine Auslenkung  $y$  aus der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t \geq 0$  eine Funktion der beiden Veränderlichen  $x$  und  $t$ , also  $y = y(x, t)$ . Um die Bestimmung dieser Funktion geht es im folgenden.

Wir beschränken uns auf kleine Auslenkungen/Schwingungen, bei denen  $y$  und  $\frac{\partial y}{\partial x}$  klein sind (so daß sich die Saite nur wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt und die Neigung der Tangente an die Saite klein bleibt). Diese Kleinheit vorausgesetzt erlaubt die Vernachlässigung von Quadraten kleiner Größen, ohne wesentliche Fehler zu machen.

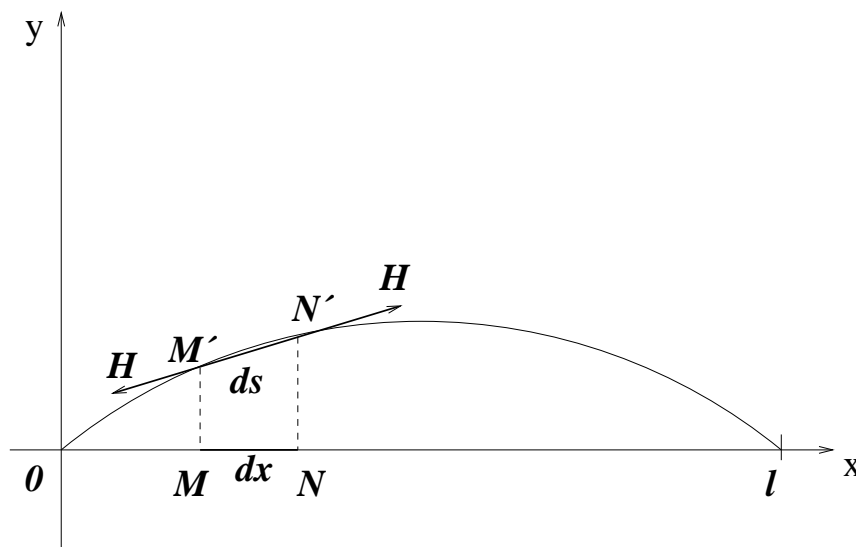


Abbildung 24: eingespannte Saite

Wir betrachten nun das Element  $ds = M'N'$  der Saite zum Zeitpunkt  $t$ . Seine Länge können wir auf Grund unserer Annahmen gleich seiner ursprünglichen Länge  $dx = MN$  im Anfangszeitpunkt ansehen, wegen

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \approx dx .$$

Da wir die Längenänderungen vernachlässigen, können wir auch die Spannung der Saite als unverändert ansehen.

Auf das herausgegriffene Saitenelement wirkt im Punkt  $M'$  die Spannung  $H$  tangential nach links, in  $N'$  dieselbe Spannung tangential nach rechts. Sind  $\alpha$  bzw.  $\bar{\alpha}$  die Neigungswinkel der Tangenten, so ist die Summe der vertikalen Komponenten (die horizontalen können vernachlässigt werden) dieser Kräfte gleich

$$H \cdot (\sin \bar{\alpha} - \sin \alpha) = H \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} \right] = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx .$$

Hier haben wir ebenfalls benutzt, daß Quadrate kleiner Größen vernachlässigt werden können, z.B. setzt man

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} .$$

Außerdem wurde der Zuwachs der Funktion  $\frac{\partial y}{\partial x}$  durch ihr Differential  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$  ersetzt.

Ist  $\rho$  die Dichte der Saite, so ist die Masse des Saitenelements gleich  $\rho ds = \rho dx$ . Nach dem Newtonschen Gesetz muß nun das Produkt aus der Masse  $\rho dx$  und der Beschleunigung  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  gleich der Kraft sein, die auf das Element wirkt. Diese Bilanz bedeutet

$$\rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx .$$

Wenn man nun  $a^2 = \frac{H}{\rho}$  setzt, so ergibt sich schließlich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} , \quad (161)$$

die die schwingende Saite beschreibt.

Als Randbedingungen für  $y = y(x, t)$  fordert man

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad (162)$$

und berücksichtigt damit, daß die Saite an den Enden eingespannt ist. Wenn weiterhin  $f(x)$  und  $g(x)$  für  $0 \leq x \leq l$  die Auslenkung und die Geschwindigkeit der Punkte der Saite zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreiben, so müssen die Anfangsbedingungen

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (163)$$

erfüllt sein. Natürlich muß  $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$  gelten.

Die Lösung des Rand-Anfangswert-Problems (161)-(163) soll nun mit der Methode vorgenommen werden, die Fourier benutzt hat.

Für die Lösung der Gleichung (161) wird ein Produkt zweier Funktionen, von denen die eine nur von  $x$  und die andere nur von  $t$  abhängt, angesetzt

$$y = X(x)T(t).$$

Damit ergibt sich aus der DGL

$$XT'' = a^2 X''T,$$

wobei die Striche Ableitungen nach der Variablen bedeuten, von der die jeweilige Funktion abhängt, und nach einer Umstellung

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \quad (164)$$

Da die linke Seite von (164) nicht von  $x$  abhängt, und die rechte Seite nicht von  $t$  abhängt, ist der gemeinsame Wert eine Konstante, die wir mit  $\lambda = -a^2\beta^2$ ,  $\beta > 0$  bezeichnen<sup>19</sup>. Damit kann man (164) in die beiden Differentialgleichungen

$$T'' + a^2\beta^2 T = 0 \quad X'' + \beta^2 X = 0 \quad (165)$$

aufspalten. Für die Lösungen findet man mit den HM II-Kenntnissen

$$\begin{aligned} T &= A \cos(a\beta t) + B \sin(a\beta t) \\ X &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \end{aligned}$$

Damit  $y = XT$  den Randbedingungen (162) genügt, muß ihnen  $X$  genügen. Für  $x = 0$  ergibt sich sofort  $C = 0$ . Setzt man  $x = l$ , so erhält man die Bedingung

$$\sin(\beta l) = 0,$$

weil  $D$  verschieden von Null sein muß, da wir die triviale Lösung  $X = 0$  ausschließen.  $\sin(\beta l)$  ist gleich Null für

$$\beta_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \beta_2 = 2\frac{\pi}{l}, \quad \dots \quad \beta_n = n\frac{\pi}{l}, \dots \quad (166)$$

Setzt man für  $\beta = \beta_n$

$$AD =: a_n, \quad BD =: b_n,$$

<sup>19</sup>hätten wir die Konstante in (164) mit  $a^2\beta^2$ , also größer als Null angesetzt, so könnten die Randbedingungen nur von der Funktion  $X = 0$  erfüllt werden.



so gelangt man zu den partikulären Lösungen

$$y_n = T \cdot X = (a_n \cos(a\beta_n t) + b_n \sin(a\beta_n t)) \sin(\beta_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Man sieht leicht, daß auch die Summe beliebig vieler solcher Lösungen die gestellten Forderungen erfüllt. Daher ist es naheliegend, die aus allen Lösungen gebildete Reihe

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(a\beta_n t) + b_n \sin(a\beta_n t)) \sin(\beta_n x) . \quad (167)$$

zu betrachten. Wir nehmen für die weiteren Betrachtungen erst mal an, daß die Reihe (167) konvergiert und die DGL (161) erfüllt. Jetzt wollen wir  $a_n, b_n$  so wählen, daß die Anfangsbedingungen (163) erfüllt sind. Dazu setzen wir die Reihe (167) als gliedweise differenzierbar voraus, so daß man

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n a \beta_n \sin(a\beta_n t) + b_n a \beta_n \cos(a\beta_n t)) \sin(\beta_n x) \quad (168)$$

erhält. Setzen wir in (167) und (168)  $t = 0$ , so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) = f(x) , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a \beta_n b_n \sin(\beta_n x) = g(x) . \quad (169)$$

Wenn wir nun von den Funktionen  $f$  und  $g$  annehmen, daß sie in Fourier-Reihen entwickelt werden können, dann erhält man die Koeffizienten  $a_n, b_n$  unter Nutzung von Orthogonalitätsrelationen in der Form

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\beta_n x) dx , \quad (170)$$

$$a \beta_n b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin(\beta_n x) dx \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{2}{a \beta_n l} \int_0^l g(x) \sin(\beta_n x) dx .$$

Damit haben wir mit der Reihe (167) und den Koeffizienten (170) formal die vollständige Lösung des Problems erhalten.

Wenn man nun von  $f$  die zweifache Differenzierbarkeit und von  $g$  die Differenzierbarkeit fordert, sowie von  $f''$  und  $g'$  in  $[0, l]$  die stückweise Glattheit fordert, dann konvergiert die Reihe (167) in  $[0, l]$  auch gleichmäßig. Damit ist das obige gliedweise differenzieren gerechtfertigt. Man sieht auch, daß die durch die Reihe (167) dargestellte Funktion die Anfangs- und Randbedingungen (162) und (163) erfüllt.

Offen ist jetzt nur noch der Nachweis, daß  $y$  aus (167) auch die Differentialgleichung (161) erfüllt. Das kann man bei den oben an  $f$  und  $g$  gestellten Forderungen schließlich durch gliedweises Differenzieren zeigen.

Wenn man in (167) die Glieder in der Klammer zusammenfaßt, kann man  $y$  in der Form

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n\right)$$

schreiben. Daraus sieht man, daß sich die vollständige Schwingung der Saite aus den einzelnen Schwingungen

$$y_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n\right)$$

additiv zusammensetzt. Alle Punkte der Saite, die an einer Elementarschwingung beteiligt sind, schwingen mit derselben Frequenz bzw. mit ein und derselben Periode, der jeweils eine bestimmte Tonhöhe entspricht. Die Amplitude der Schwingung jedes Punktes hängt von seiner Lage ab und ist gleich

$$A_n \left| \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right|.$$

Denkt man sich die ganze Saite in  $n$  gleiche Teile geteilt, so befinden sich die Punkte desselben Teilstücks stets in gleicher, die Punkte benachbarter Teilstücke jeweils in entgegengesetzter Phase.

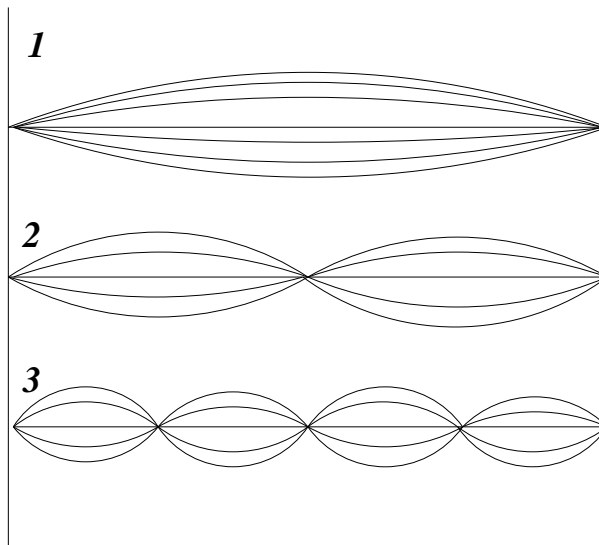


Abbildung 25: die ersten drei Saitenlagen

Die Abb. 25 zeigt die aufeinanderfolgenden Lagen der Saite für  $n = 1, 2, 3$ . Die Punkte, die ein Teilstück von dem nächsten trennen, befinden sich in Ruhe, es sind die sogenannten Knoten. Die Mitten der Teilstücke (die Bäuche) schwingen mit der größten Amplitude. Diese Erscheinung wird stehende Welle genannt, weshalb die Fouriersche Methode der Lösung auch Methode der stehenden Welle genannt wird.

Der Grundton wird durch  $y_1$  mit der Frequenz  $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{\rho}}$  und die Periode  $T_1 = 2l \sqrt{\frac{\rho}{H}}$  bestimmt. Die übrigen Töne, die gleichzeitig mit dem Grundton von der Saite hervorgebracht werden, charakterisieren eine bestimmte "Färbung" (Timbre) des Tones. Drückt man einen Finger auf die Mitte der Saite, so ersterben sowohl der Grundton als auch die ungeraden Obertöne, für welche dort wie beim Grundton ein Knoten war. Die geraden Obertöne, für welche in der Mitte des Intervalls  $[0, l]$  ein Knoten war, ertönen weiter.

## 7.6 Diskrete Fourieranalyse \*

In der Ingenieurpraxis sind die zeitabhängigen periodischen Vorgänge oftmals nicht als Funktionen in Form von analytischen Ausdrücken, sondern in der Regel nur in Form von Tabellen oder diskreten Meßreihen bekannt. Deshalb sind die weiter oben hergeleiteten Integralformeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten nicht direkt anwendbar. Als Beispiel soll das periodische Verhalten der Tangentialkräfte (an der Kurbelwelle) für eine Dampfmaschine weiter unten diskutiert werden.

Aber wir gehen bei der diskreten Fourier-Analyse erst einmal von der Vorgabe von diskret gegebenen, äquidistanten Ordinaten, d.h., Werten einer periodischen Funktion in äquidistanten Argumentwerten  $x$ , aus. Ziel ist nun die möglichst einfache Berechnung von Fourierkoeffizienten auf der Basis der vorgegebenen diskreten Werte einer Funktion  $y$ .

Sei beispielsweise das Intervall  $[0, 2\pi]$  in  $k$  gleiche Teile geteilt, und es seien die Ordinaten

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y_0$$

in den Teilpunkten

$$0, \frac{2\pi}{k}, 2\frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1)\frac{2\pi}{k}, 2\pi$$

bekannt. Nach der Trapezformel ergibt sich für den Fourierkoeffizienten<sup>20</sup>  $a_0^* = \frac{a_0}{2}$  näherungsweise

$$a_0^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[ \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k \right].$$

Auf Grund der Periodizität ist  $y_k = y_0$  und damit

$$ka_0^* = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \quad (171)$$

Analog ergibt sich mit Hilfe der Trapezregel für die übrigen Integrale

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[ y_0 + y_1 \cos\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cos\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \cos\left(m\frac{2(k-1)\pi}{k}\right) \right]$$

oder

$$\frac{k}{2}a_m = y_0 + y_1 \cos\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cos\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \cos\left(m\frac{2(k-1)\pi}{k}\right), \quad (172)$$

sowie

$$\frac{k}{2}b_m = y_1 \sin\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \sin\left(m\frac{2\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \sin\left(m\frac{2(k-1)\pi}{k}\right). \quad (173)$$

Wir setzen zunächst  $k = 12$  und gehen von den zwölf Ordinaten

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$$

aus, die den 12 äquidistanten Argumentwerten

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

d.h. den Winkeln

$$0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ$$

entsprechen.

Durch die Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion reduzieren sich alle Faktoren der Ordinaten in den Formeln (171) - (173) auf

$$+1, \quad \pm \sin 30^\circ = \pm 0.5, \quad \pm \sin 60^\circ = \pm 0.866.$$

<sup>20</sup>Aus Darstellungsgründen verwenden wir hier als freies Glied der Fourier-Reihe  $a_0^*$  statt der Form  $\frac{a_0}{2}$ .

Man prüft nämlich leicht nach, daß

$$\begin{aligned}
 12a_0^* &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}, \\
 6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_3) \sin 30^\circ + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin 60^\circ + (y_0 - y_6), \\
 6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_3 - y_{10}) \sin 30^\circ + (y_0 + y_6 - y_2 - y_9), \\
 6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}, \\
 6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ + (y_3 - y_9), \\
 6b_2 &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ, \\
 6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \text{ usw.}
 \end{aligned} \tag{174}$$

ist. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
 6a_1 &= y_0 + y_1 \cos 30^\circ + y_2 \cos 60^\circ + y_3 \cos 90^\circ + y_4 \cos 120^\circ + y_5 \cos 150^\circ \\
 &\quad + y_6 \cos 180^\circ + y_7 \cos 210^\circ + y_8 \cos 240^\circ + y_9 \cos 270^\circ + y_{10} \cos 300^\circ \\
 &\quad + y_{11} \cos 330^\circ \\
 &= y_0 + y_1 \sin 60^\circ + y_2 \sin 30^\circ - y_4 \sin 30^\circ - y_5 \sin 60^\circ - y_6 - y_7 \sin 60^\circ \\
 &\quad - y_8 \sin 30^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 60^\circ,
 \end{aligned}$$

was dem oben angegebenen Ausdruck entspricht. Um die Berechnungen (hauptsächlich die "teuren" Multiplikationen) auf ein Minimum zu reduzieren, führt man sie nach einem bestimmten Schema aus, das von dem deutschen Mathematiker Carl Runge (1856-1927) stammt.

Zuerst schreibt man die Ordinaten in der nachstehend angegebenen Anordnung, darunter die Summe und die Differenz je zweier übereinander stehender Ordinaten:

	Ordinaten						
	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
		$y_{11}$	$y_{10}$	$y_9$	$y_8$	$y_7$	
Summen	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
Differenzen		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	

Danach verfährt man mit den erhaltenen Summen und Differenzen ähnlich:

	Summen					Differenzenn		
	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		$v_1$	$v_2$	$v_3$
	$u_6$	$u_5$	$u_4$			$v_5$	$v_6$	
Summen	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	Summen	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
Differenzen	$d_1$	$d_2$	$d_3$		Differenzen	$\delta_1$	$\delta_2$	

Mit Hilfe dieser Größen  $s, d, \sigma, \delta$  können wir die gesuchten Koeffizienten folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 12a_0^* &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\
 6a_1 &= d_0 + 0.866d_1 + 0.5d_2, \\
 6a_2 &= (s_0 - s_3) + 0.5(s_1 - s_2) \\
 6a_3 &= d_0 - d_2, \\
 6b_1 &= 0.5\sigma_1 + 0.866\sigma_2 + \sigma_3, \\
 6b_2 &= 0.866(\delta_1 + \delta_2), \\
 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3, \text{ usw.}
 \end{aligned} \tag{175}$$

Man prüft leicht nach, daß die Formeln genau die Werte (174) liefern.

Zur Demonstration der diskreten Fourieranalyse kommen wir jetzt noch einmal auf das oben genannte Beispiel der Tangentialkräfte einer Dampfmaschine zurück. Im Zusammenhang mit dem

Problem der kleinen Schwingungen der Welle ist es interessant, die harmonischen Komponenten der Tangentialkraft als Funktion des Drehwinkels  $\varphi$  der Kurbelwelle zu bestimmen. In Abb. 26 ist das Diagramm dargestellt, dem 12 äquidistante Ordinaten entnommen werden.

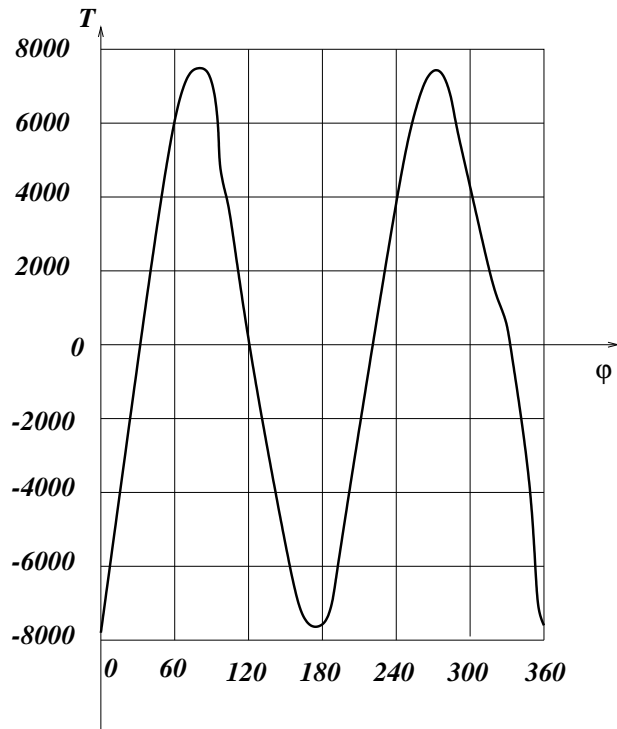


Abbildung 26: Diagramm der Tangentialkräfte

Damit wird nach dem obigen Schema die Fourieranalyse durchgeführt.

	Ordinaten von $T$						
$u$	-7200	-300	7000	4300	0	-5200	-7400
$v$		250	4500	7600	3850	-2250	
Summen	-7200	-50	11500	11900	3800	-7450	-7400
Differenzen		-550	2500	-3300	-3850	-2950	

	Summen			
$u$	-7200	-50	11500	11900
$u$	-7400	-7450	3850	
$s$	-14600	-7500	15350	11900
$d$	200	7400	7650	

	Differenzen		
$v$	-550	2500	-3300
$v$	-2950	-3850	
$\sigma$	-3500	-1350	-3300
$\delta$	2400	6350	

Nach den Formeln (175) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 12a_0^* &= -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150, & a_0^* &= 429, \\
 6a_1 &= 200 + 7400 \cdot 0.866 + 7650 \cdot 0.5 = 10433, & a_1 &= 1739, \\
 6a_2 &= (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \cdot 0.5 = -37925, & a_2 &= -6321, \\
 6a_3 &= 200 - 7650 = -7450, & a_3 &= -1242, \\
 6b_1 &= -3500 \cdot 0.5 - 1350 \cdot 0.866 - 3300 = -6219, & b_1 &= -1037, \\
 6b_2 &= (2400 + 6350) \cdot 0.866 = 7578, & b_2 &= 1263, \\
 6b_3 &= -3500 + 3300 = -200, & b_3 &= -33,
 \end{aligned}$$

also

$$T = 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos(2\varphi) + 1263 \sin(2\varphi) \\ - 1242 \cos(3\varphi) - 33 \sin(3\varphi) + \dots$$

Wenn man Kosinus und Sinus des gleichen Winkels zusammenfaßt erhält man

$$T = 429 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) \\ + 1240 \sin(3\varphi + 268^\circ) + \dots$$

Aus der Reihendarstellung sieht man, daß das zweite Glied oder die "zweite Harmonische" den größten Einfluß hat.

Die eben skizzierte diskrete Fourieranalyse ist nach dem Vorbild des diskutierten Schemas von Runge für große Ordinatenzahlen in Computerprogrammen realisiert, wobei diese Methodik besonders schnell und effektiv wird, wenn die Zahl der diskreten Ordinaten pro Periode gleich einer Zweierpotenz  $k = 2^n$  oder zumindest gerade ist. In diesen Fällen spricht man auch von der schnellen Fourieranalyse.

Eine Überblick über die Genauigkeit der beschriebenen diskreten Fourieranalyse kann man sich durch die diskrete Fourieranalyse einer analytisch gegebenen Funktion verschaffen. Wenn man z.B. die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

mit dem in Abb. 27 dargestellten Graphen

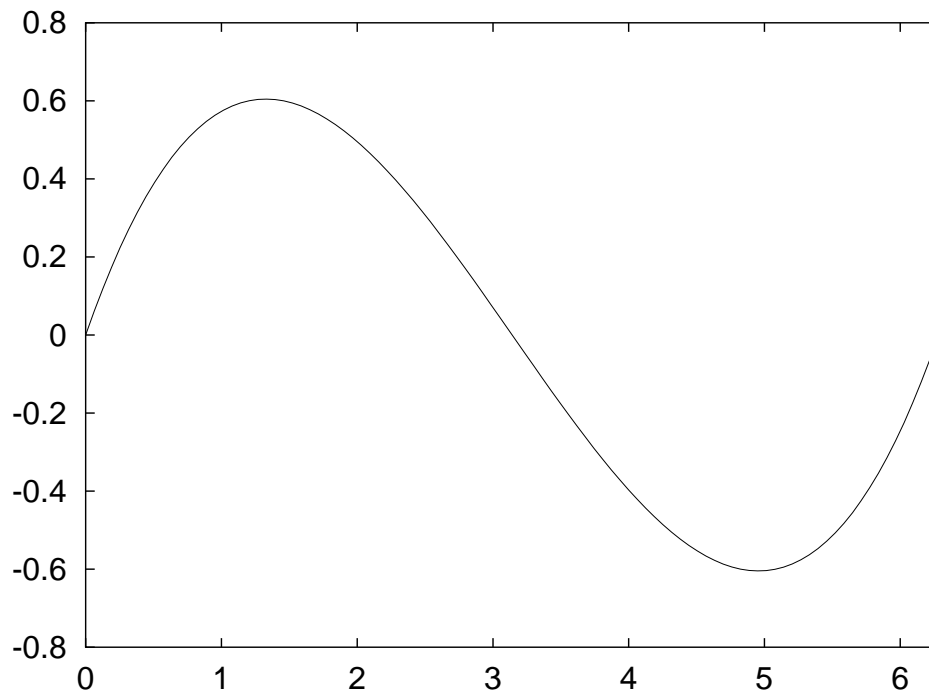


Abbildung 27:  $f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)$

betrachtet und an den 12 äquidistanten  $x$ -Positionen des Intervalls  $[0, 2\pi]$  die Funktionswerte berechnet,

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y	0	0,4	0,582	0,589	0,465	0,255	0	-0,255	-0,465	-0,589	-0,582	-0,4	0

kann man nach dem Rungeschen Schema für die vorgegebenen Ordinaten

$$b_1 = 0,608 \quad b_2 = 0,076 \quad b_3 = 0,022 .$$

Alle  $a_n$  sind Null, da auch alle  $u_k$  im Schema Null sind. Mit der Formel für die Fourierkoeffizienten  $b_n$  erhält man nach dreimaliger partieller Integration

$$b_n = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin(nx) dx = \frac{6}{n^3 \pi^2} .$$

Danach sind die exakten Werte von  $b_n$

$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0,6079 \quad b_2 = \frac{6}{4\pi^2} = 0,0760 \quad b_3 = \frac{6}{9\pi^2} = 0,0225 ,$$

stimmen also mit den Ergebnissen der diskreten Fourieranalyse recht gut überein.

## 8 Integraltransformationen

Mit diesem Kapitel soll eine mathematische Methodik behandelt werden, die es erlaubt mathematische Aufgaben mit dem Ziel zu transformieren, die Problemlösung zu erleichtern. Z.B. sollen Transformationen besprochen werden, die z.B. eine partielle Differentialgleichung für eine Funktion in eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine transformierte Funktion überführen. Nach der Lösung der gewöhnlichen DGL kommt man durch eine Rücktransformation zur Lösung des ursprünglichen Problems (Fouriertransformation).

Außerdem wird es möglich sein, Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch eine Transformation in Systeme algebraischer Gleichungen zu überführen, die in der Regel leichter lösbar sind, als die DGL-Systeme. Auch hier erhält man nach einer Rücktransformation die Lösung des ursprünglichen Problems (Laplace-Transformation).

### Definition 8.1. (Integraltransformation)

Unter einer Integraltransformation  $T$  versteht man eine eindeutige Zuordnung  $T : f \rightarrow T(f)$  der Form

$$[T(f)](x) := \int_D K(x, y) f(y) dy, \quad x \in D, \quad (176)$$

wobei  $D$  ein nicht notwendig beschränktes Intervall in  $\mathbb{R}$  ist<sup>21</sup>.

Damit der Ausdruck (176) überhaupt sinnvoll ist, müssen die Funktion  $f$  und die Kernfunktion  $K(x, y)$  geeignete Voraussetzungen erfüllen. Im folgenden sollen zwei spezielle Integraltransformationen behandelt werden,

(i) die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (177)$$

d.h.,

$$D = (-\infty, \infty), \quad K(s, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-ist}.$$

(ii) die Laplacetransformation

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (178)$$

d.h.,

$$D = (0, \infty), \quad K(z, t) = e^{-zt}.$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß wir in der HM II die uneigentlichen Integrale der Art

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

bei festgehaltenem  $y$  durch den Grenzwert

$$\lim_{A, B \rightarrow \infty} \int_{-B}^A f(x, y) dx$$

erklärt haben. Dabei waren die Grenzübergänge  $A \rightarrow \infty$  und  $B \rightarrow \infty$  unabhängig voneinander durchzuführen. Wir sagen, das uneigentliche Integral existiert, wenn die Grenzwerte existieren. Im folgenden wollen wir auch den Fall betrachten, daß die Grenzübergänge in Richtung  $\infty$  und  $-\infty$  gleichzeitig betrachtet werden.

<sup>21</sup>Statt  $[T(f)](x)$  wird im folgenden auch die Bezeichnung  $T[f(y)]$  verwendet!



*Bemerkung 8.2.* (Cauchyscher Hauptwert)

Setzt man formal

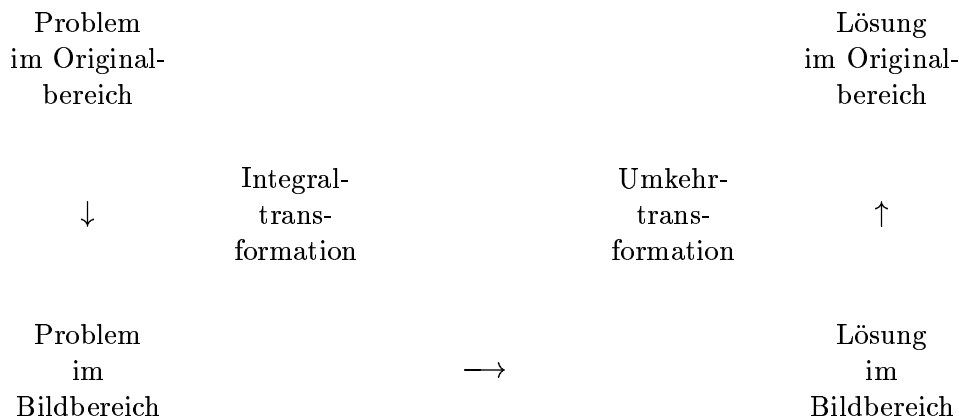
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx &= \int_{-\infty}^{-a} f(x, y) dx + \int_{-a}^a f(x, y) dx + \int_a^{\infty} f(x, y) dx \\ &= -\int_{-a}^{-\infty} f(x, y) dx + \int_{-a}^a f(x, y) dx + \int_a^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{\infty} [f(-x, y) + f(x, y)] dx + \int_{-a}^a f(x, y) dx . \end{aligned}$$

so wollen wir  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$  verstehen als

$$\begin{aligned} C.H. \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x, y) dx \\ &:= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A [f(-x, y) + f(x, y)] dx + \int_{-a}^a f(x, y) dx , \end{aligned} \quad (179)$$

und bezeichnen den Ausdruck auf der linken Seite als Cauchyschen Hauptwert, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Es sei darauf hingewiesen, daß aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots$  die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes folgt, aber nicht umgekehrt.

Auf den Cauchyschen Hauptwert kommen wir etwas später zurück. Mit den Integraltransformationen wird ein Ausgangsproblem (im Originalbereich) auf ein äquivalentes Problem im Bildbereich abgebildet und dort gelöst. Anschließend erfolgt die Rücktransformation. Die Vorgehensweise wird anhand des folgenden Diagramms sichtbar:



Nun soll mit der Fouriertransformation eine Integraltransformation etwas genauer diskutiert werden.

### 8.1 Fouriertransformation

Ausgehend von den Überlegungen zur Fourier-Reihenentwicklung periodischer Funktionen soll im folgenden das Motiv für die Fouriertransformation dargelegt werden. Im vorigen Kapitel wurde ausgeführt, daß sich jede  $2\pi$ -periodische Funktion in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

entwickeln läßt, wobei  $c_k$  die komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sind. Wenn  $f$  die Periode  $2\pi l$  hat, dann lauten die Formeln

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{1}{l}x} \quad (180)$$

bzw.

$$c_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-ik\frac{1}{l}t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (181)$$

Wir wollen uns nun von der Periodizitätsforderung an  $f$  lösen und untersuchen, welche Form die Formeln (180) bzw. (181) und die Ausdrücke darin dann haben. Dazu setzen wir (181) in (180) ein und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-ik\frac{1}{l}t} dt \right) e^{ik\frac{1}{l}x} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-ik\frac{1}{l}(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Setzen wir  $\frac{1}{l} =: \Delta s$  und beachten, daß wir einen Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k\Delta s) \cdot \Delta s$$

als Riemannsche Summe einer Funktion  $g$  bei äquidistanter Zerlegung  $\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \dots$  auffassen können, die für geeignete  $g$  in das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} g(s) ds$$

übergeht, so erhält man beim Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  bzw.  $\Delta s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{ik\frac{1}{l}(x-t)} dt \right) \Delta s \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(x-t)} dt \right) ds. \end{aligned}$$

Es ergeben sich formal die Beziehungen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(x-t)} dt \right) ds, \quad (182)$$

oder kurz

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} ds, \quad (183)$$

wenn wir  $\hat{f}$  durch

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \quad (184)$$

erklären.

*Bemerkung 8.3.*

Den Ausdrücken (183) und (184) entsprechen die Ausdrücke (180) und (181) im periodischen Fall.

**Definition 8.4.** (Spektralen von Funktionen)

Die Formeln (181) bzw. (184) liefern das Spektrum der Funktion  $f$ .

*Bemerkung 8.5.*

Im Fall periodischer Funktionen haben wir es stets mit einem diskreten Spektrum oder Linienspektrum zu tun, da nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega = \frac{1}{T}$  auftreten können. Kontinuierliche Spektren treten im Fall von nichtperiodischen Vorgängen auf.

*Bemerkung 8.6.*

(a) Für Funktionen  $f$ , für die die Formeln (180), (181) bzw. (183) und (184) gelten, gilt:

*Ist das Spektrum von  $f$  bekannt, so ist damit  $f$  eindeutig festgelegt und umgekehrt.*

(b) Die Darstellungsformel (182) ermöglicht eine Zerlegung der Funktion  $f$  im Intervall  $(-\infty, \infty)$  in harmonische Schwingungen. Setzen wir

$$a(s) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt \tag{185}$$

$$b(s) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt ,$$

so können wir  $f$  unter Benutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(st) \cdot \cos(xs) ds &= 2 \int_0^{\infty} \cos(st) \cdot \cos(xs) ds , \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(st) \cdot \cos(xs) ds &= 0 \quad usw. \end{aligned}$$

mit Hilfe von (182) durch

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(s) \cos(xs) + b(s) \sin(xs)] ds \tag{186}$$

darstellen. Dabei durchlaufen die Frequenzen  $s$  der harmonischen Schwingungen sämtliche Werte von 0 bis  $\infty$ . Die Formel (186) entspricht bei  $2\pi$ -periodischen Funktionen der Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit den diskreten Frequenzen  $k$ .

Die bisherigen Überlegungen haben wir unter dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung von Ergebnissen der Fourieranalyse periodischer Funktionen auf eine analoge Darstellung für nicht notwendigerweise periodische Funktionen - man könnte auch sagen Funktionen mit der Periode  $\infty$  geführt. Im folgenden soll diskutiert werden, unter welchen Bedingungen der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i st} dt$$

existiert und damit die Fouriertransformation sinnvoll ist. An dieser Stelle sei an die Definition der stückweise glatten Funktionen aus dem vorigen Kapitel erinnert und an den Begriff der stückweisen Stetigkeit. Außerdem sollen die folgenden Definitionen Begriffe aus der HM I und HM II für komplexwertige Funktionen verallgemeinern.

**Definition 8.7.**

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

existiert.

**Satz 8.8.**

Sei  $f$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetig, und  $g$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar und gelte

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad (187)$$

dann ist auch  $f$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar.

**Lemma 8.9.**

Sei  $f$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetig und absolut integrierbar, dann existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i st} dt \quad (188)$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.*

Aus der absoluten Integrierbarkeit von  $f$  in  $\mathbb{R}$  und der Abschätzung

$$|f(t) e^{-st}| \leq |f(t)| \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \quad (189)$$

folgt aus dem obigen Satz die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung 8.10.*

Wegen der Abschätzung (189) ist (188) gleichmäßig konvergent und deshalb ist das Integral (188) eine stetige Funktion für  $s \in \mathbb{R}$ .

Die Sätze und Bemerkungen rechtfertigen nun die

**Definition 8.11.** (Fouriertransformation)

Sei  $f$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetig und absolut integrierbar. Ordnet man  $f$  auf Grund der Beziehung

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i st} dt \quad (190)$$

die Funktion  $\hat{f}$  zu, so nennt man  $\hat{f}$  Fouriertransformierte oder Spektralfunktion von  $f$ . Neben  $\hat{f}(s)$  verwendet man auch die Schreibweise  $\mathcal{F}[f(t)]$ .

Beispiel:

Es soll die Fouriertransformierte der Funktion  $f(t) = e^{-|t|}$  berechnet werden. Aufgrund der Definition erhält man

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i st} dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i st} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i st} dt \right) \\ &= \lim_{A, B \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i s)t}}{1-i s} \Big|_{t=-A}^{t=0} + \frac{e^{-(1+i s)t}}{-(1+i s)} \Big|_{t=0}^{t=B} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-i s} + \frac{1}{1+i s} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$|e^{-R} \cdot e^{\pm i s R}| \leq e^{-R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

benutzt.

### 8.1.1 Umkehrung der Fouriertransformation

Mit der Definition der Fouriertransformierten einer Funktion ist jetzt die Frage zu klären, unter welchen Voraussetzungen die Darstellungsformel (183) für die Funktion  $f$  unter Nutzung von  $\hat{f}$  gilt. Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Möglichkeit der Rückkehr aus dem Bildbereich in den Originalbereich.

Unter Nutzung des Cauchyschen Hauptwertes kann man zur Antwort der Frage den folgenden Satz formulieren.

**Satz 8.12.**

Sei  $f$  eine in  $\mathbb{R}$  stückweise glatte Funktion. Ferner sei  $f$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar. Für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{f}(s) e^{ixs} ds \quad (= C.H. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} ds). \quad (191)$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{f}(s) e^{ixs} ds \quad (= C.H. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} ds). \quad (192)$$

Der Beweis des Satzes 8.12 ist recht aufwendig und z.B. im Buch von Smirnow, Bd. II, Kap. IV [8] für Interessierte nachzulesen.

*Bemerkung 8.13.*

Es sei deutlich darauf hingewiesen, daß Satz 8.12 nur dann immer gilt, wenn auf der rechten Seite von (191) bzw. (192) der Cauchysche Hauptwert verwendet wird. Es sei nur an Beispiele erinnert, wo uneigentliches Integral und Cauchyscher Hauptwert nicht übereinstimmen.

Als Beispiel kann die Formel für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

und deren Fouriertransformierte untersucht werden.

**Satz 8.14. (Eindeutigkeitssatz)**

Für die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  seien die Voraussetzungen des Satzes 8.12 erfüllt und es gelte

$$\hat{f}_1(s) = \hat{f}_2(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R},$$

dann gilt in jedem Punkt  $x$ , in dem  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind

$$f_1(x) = f_2(x) \quad .$$

### 8.1.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

Um mit den Fouriertransformierten arbeiten zu können, sind die Eigenschaften der Fouriertransformierten von Nutzen. Im folgenden solle diese zusammengefaßt werden. Dies geschieht ohne Beweise.

**Satz 8.15. (Linearität)**

Sind  $f$ ,  $f_1$  und  $f_2$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetige und dort absolut integrierbare Funktionen, so folgt aus der Definition der Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f_1 + f_2] = \mathcal{F}[f_1] + \mathcal{F}[f_2] \quad (193)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f] = \alpha \mathcal{F}[f], \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (194)$$

**Satz 8.16.** (*Verschiebungssatz*)

Sei  $f$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetig und dort absolut integrierbar. Dann gilt für beliebige  $h \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f(t \pm h)] = e^{\pm i sh} \mathcal{F}[f(t)], \quad s \in \mathbb{R}. \quad (195)$$

Bei der Lösung von Problemen mit Hilfe der Fouriertransformation treten im Bildbereich in vielen Fällen Produkte der Form  $\mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2]$  auf. Unser Ziel ist es nun Produkte dieser Art als **eine** Fouriertransformierte einer geeigneten Funktion  $f$ , die sich aus  $f_1$  und  $f_2$  bestimmen läßt darzustellen. Dazu definieren ein weiteres (das periodische hatte wir schon) Faltungsprodukt.

**Definition 8.17.** (*Faltung*)

Unter dem Faltungsprodukt der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  versteht man den Ausdruck

$$(f_1 * f_2)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du. \quad (196)$$

*Bemerkung 8.18.*

Wenn  $f_1$  und  $f_2$  in  $\mathbb{R}$  stetige Funktionen sind, und  $f_2$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar ist, sowie  $f_1$  in  $\mathbb{R}$  durch eine Konstante  $M$  beschränkt ist, dann existiert das Integral auf der rechten Seite von (196) und die Faltungsdefinition ist sinnvoll. Ebenso wie beim periodischen Faltungsprodukt gilt die Kommutativität.

**Satz 8.19.** (*Faltungssatz*)

Seien  $f_1, f_2$  in  $\mathbb{R}$  stetige und absolut integrierbare Funktionen. Ferner sei  $f_1$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2]. \quad (197)$$

**Satz 8.20.** (*Differentiation I*)

Sei  $f$  eine in  $\mathbb{R}$  stetige stückweise glatte Funktion. Ferner seien  $f$  und  $f'$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar. Dann gilt

$$\mathcal{F}[f'(t)] = (i s) \mathcal{F}[f(t)], \quad s \in \mathbb{R}, \quad (198)$$

d.h., der Differentiation im Originalbereich entspricht die Multiplikation mit dem Faktor  $(i s)$  im Bildbereich.

Für viele Anwendungen ist es erforderlich, die Stetigkeitsanforderungen abzuschwächen. Es gilt der

**Satz 8.21.** (*Differentiation II*)

Sei  $f$  eine in  $\mathbb{R}$  stückweise glatte Funktion und seien  $f$  und  $f'$  in  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar. Ferner besitze  $f$  die  $n$  Unstetigkeitsstellen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dann gilt für  $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = (i s) \mathcal{F}[f(t)] - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n [f(a_k + 0) - f(a_k - 0)] e^{-i s a_k}. \quad (199)$$

Antwort auf die Frage nach der Fouriertransformation höherer Ableitungen gibt der

**Satz 8.22.** (*Differentiation III*)

Sei  $f$   $(r-1)$ -mal stetig differenzierbar und  $f^{(r-1)}$  stückweise glatt in  $\mathbb{R}$ . Ferner seien  $f, f', \dots, f^{(r)}$  absolut integrierbar in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\mathcal{F}[f^{(r)}(t)] = (i s)^r \mathcal{F}[f(t)], \quad s \in \mathbb{R}. \quad (200)$$

Beispiel:

Es sei eine Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + y' - y = f(x)$$

gegeben. Die Fouriertransformation ergibt

$$\mathcal{F}[y''' - 4y'' + y' - y] = \mathcal{F}[f],$$

und nach (200) ergibt sich im Bildraum

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y''' - 4y'' + y' - y] &= (i s)^3 \mathcal{F}[y] - 4(i s)^2 \mathcal{F}[y] + (i s) \mathcal{F}[y] - \mathcal{F}[y] \\ &= (-i s^3 + 4s^2 + i s - 1) \mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[f], \end{aligned}$$

und damit ergibt sich für die Lösung im Bildraum

$$\mathcal{F}[y] = \frac{1}{(-i s^3 + 4s^2 + i s - 1)} \mathcal{F}[f].$$

Die Anwendung der Formel (183) bedeutet die Rücktransformation und ergibt die Lösung der Differentialgleichung als Lösung des Originalproblems.

### 8.1.3 Anwendung der Fouriertransformation auf partielle Differentialgleichungen

Die anfangs angesprochene Bedeutung der Fouriertransformation für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen soll am Beispiel der Lösung der Wärmeleitungsgleichung für einen unendlich ausgedehnten Stab dargestellt werden.

Gesucht ist eine Funktion  $U(x, t)$ , die der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (201)$$

und der Anfangsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} U(x, t) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (202)$$

genügt. Zur Bestimmung einer formalen Lösung des Anfangswertproblems (201),(202) bilden wir die Fouriertransformation von  $U(x, t)$  bezüglich  $x$  (d.h., wir halten  $t$  fest)

$$\hat{U}(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) e^{-i s x} dx. \quad (203)$$

Die Differentiation nach  $t$  und die anschließende Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration auf der rechten Seite ergibt

$$\frac{\partial \hat{U}(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} e^{-i s x} dx,$$

woraus wegen (201)

$$\frac{\partial \hat{U}(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} e^{-i s x} dx$$

folgt. Unter Beachtung von (200) erhalten wir hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial \hat{U}(s, t)}{\partial t} = (is)^2 \hat{U}(s, t), \quad t > 0. \quad (204)$$

Die ist bei festem  $s \in \mathbb{R}$  eine gewöhnliche DGL für  $\hat{U}(s, t)$  bezüglich  $t$ . der Anfangsbedingung (202) entspricht im Bildbereich, wenn der Grenzübergang  $t \rightarrow 0 + 0$  mit der Integration vertauscht wird, die Bedingung

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+0} \hat{U}(s, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \lim_{t \rightarrow 0+0} U(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx = \hat{f}(s). \end{aligned} \quad (205)$$

Insgesamt erhalten wir für  $\hat{U}(s, t)$  bei festem  $s \in \mathbb{R}$  das folgende Anfangswertproblem im Bildbereich

$$\frac{\partial \hat{U}(s, t)}{\partial t} = -s^2 \hat{U}(s, t), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (206)$$

$$\hat{U}(s, t) = \hat{f}(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (207)$$

$f$  ist vorgegeben. Damit können wir die Lösung des Problems (206) im Bildbereich sofort angeben und erhalten

$$\hat{U}(s, t) = \hat{f}(s) \cdot e^{-s^2 t}, \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Setzt man nun noch

$$g_t(u) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4t}},$$

und berücksichtigt (siehe dazu Bemerkung 8.24)

$$\mathcal{F}[g_t(u)] = \frac{1}{2\pi} e^{-s^2 t} = \hat{g}_t(s),$$

(bitte als Übung nachrechnen!) so kann man  $\hat{U}$  in der Form

$$\hat{U}(s, t) = 2\pi \hat{f}(s) \cdot \hat{g}_t(s) = 2\pi \widehat{(f * g_t)}(t) \quad (208)$$

als Lösung im Bildbereich darstellen. Mit dem Eindeutigkeitssatz 8.14 für die Fouriertransformation erhalten wir damit

$$U(x, t) = 2\pi (f * g_t)(x) = 2\pi (g_t * f)(x) = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x - u) f(u) du$$

bzw. nach dem Einsetzen von  $g_t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u) du, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (209)$$

*Bemerkung 8.23.*

An dieser Stelle muß nochmal nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die hergeleitete Lösung (209) eine **formale** Lösung des Wärmeleitproblems darstellt. Ein Nachweis, daß (209) tatsächlich das anfangs gestellte Originalproblem löst, erfordert Voraussetzungen an  $f$ , um die bei der formalen Herleitung benutzten Vertauschungsoperationen zu rechtfertigen.



Bemerkung 8.24.

Für die Funktion

$$g_t(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4t}}, \quad t \text{ fest,}$$

ergibt sich die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_t(u)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4t}} e^{-isu} du \\ &= \frac{1}{2\pi 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{2\sqrt{t}} + is\sqrt{t}\right)^2 + i^2 s^2 t} du \\ &= \frac{1}{2\pi 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{2\sqrt{t}} + is\sqrt{t}\right)^2} e^{i^2 s^2 t} du \\ &= \frac{1}{2\pi 2\sqrt{\pi t}} e^{-s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{2\sqrt{t}} + is\sqrt{t}\right)^2} du \\ &= \frac{1}{2\pi 2\sqrt{\pi t}} e^{-s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{t} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{-s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} e^{-s^2 t} = \frac{1}{2\pi} e^{-s^2 t} = \hat{g}_t(s), \end{aligned}$$

wobei das Gaußsche Fehlerintegral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}$  benutzt wurde.

## 8.2 Laplacetransformation

Die Fouriertransformierte einer Funktion erfordert mit der absoluten Integrierbarkeit Voraussetzungen (absolute Integrierbarkeit), die viele Funktionen nicht erfüllen. Als Beispiele solcher Funktionen seien die Heaviside-Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

und die Funktionen  $e^{\alpha t}$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$  genannt, die in  $\mathbb{R}$  nicht absolut integrierbar sind. Man kann auch schnell nachrechnen, daß die Funktionen keine Fouriertransformierte besitzen. Die genannten Funktionen sind aber bei vielen Vorgängen wichtig, häufig verbunden mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0,$$

die nichts anderes bedeutet, als das ein Vorgang erst ab einem bestimmten Zeitpunkt beginnt oder eingeschaltet wird. Dieser Zeitpunkt wird willkürlich auf  $t = 0$  gesetzt.

Um nun auch solche Vorgänge transformieren zu können, führt man den *konvergenzerzeugenden* Faktor

$$e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0) \tag{210}$$

ein und betrachten statt  $f$  die Funktion  $f^*$  mit

$$f^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-\alpha t} f(t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \tag{211}$$

Bildet man nun formal die Fouriertransformierte von  $f^*$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^*(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + is)t} f(t) dt. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit  $z = \alpha + i s$

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z t} f(t) dt. \quad (212)$$

### 8.2.1 Definition der Laplacetransformation

Die obigen einführende Überlegungen führen auf die folgende

**Definition 8.25.** (Laplacetransformation<sup>22</sup>)

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ordnet man  $f$  aufgrund der Beziehung

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-z t} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad (213)$$

die Funktion  $F$  zu, so nennt man  $F$  die Laplacetransformierte von  $f$ . Neben  $F(z)$  verwendet man auch die Schreibweise  $\mathcal{L}[f(t)]$ . Die Laplacetransformierte  $F(z)$  nennt man auch Unterfunktion von  $f$ , und  $f$  heißt Originalfunktion (oder Oberfunktion).

Wie bei der Fouriertransformation ist nun die Frage zu klären, für welche Funktionen die Definition 8.25 sinnvoll ist, bzw. das uneigentliche Integral (213) existiert. Mit der folgenden Definition wird nun eine Eigenschaft von Funktionen formuliert, die eine Existenz der uneigentlichen Integrals (213) sichert.

**Definition 8.26.**

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , falls es Konstanten  $M > 0$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  gibt, so daß für alle  $t$  mit  $0 \leq t < \infty$  gilt

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}. \quad (214)$$

*Bemerkung 8.27.*

Man überzeugt sich leicht davon, daß alle Polynome und Sinus- bzw. Kosinusfunktionen von exponentieller Ordnung sind. Z.B. gilt unter Nutzung der Taylorreihe für die Exponentialfunktion für alle  $t \geq 0$

$$|t^3| = t^3 \leq 6e^t = 6 + 6t + 3t^2 + t^3 + \dots$$

**Satz 8.28.**

Sei  $f$  in  $[0, \infty)$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann existiert die Laplacetransformierte  $F(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > \gamma$  (also in einer Konvergenzhalbebene).

*Beweis.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Voraussetzung  $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$  ( $f$  von exponentieller Ordnung) und der daraus folgenden Ungleichungskette

$$\begin{aligned} |e^{-z t} f(t)| &\leq |e^{-\operatorname{Re} z t}| \cdot |e^{-i \operatorname{Im} z t}| \cdot |f(t)| \\ &\leq e^{-\operatorname{Re} z t} \cdot 1 \cdot M e^{\gamma t} = M e^{-(\operatorname{Re} z - \gamma)t}, \end{aligned}$$

weil  $\operatorname{Re} z - \gamma > 0$  ist. □

Beispiel 1:

Für die Heaviside-Funktion

$$h_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

<sup>22</sup>Auf eine mögliche Verallgemeinerung auf Funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  soll hier nicht weiter eingegangen werden.

berechnet man für  $\operatorname{Re} z = x > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h_a(t)] &= \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-zt} \cdot 1 dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A e^{-zt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-zt}}{(-z)} \right|_{t=a}^{t=A} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{z} (e^{-az} - e^{-Az}) = \begin{cases} \frac{e^{-az}}{z} & \text{für } a \neq 0 \\ \frac{1}{z} & \text{für } a = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Beispiel 2:

Für die Exponentialfunktion  $e^{at}$  berechnet man für  $\operatorname{Re} z > a$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-zt} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-z)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{(a-z)t}}{a-z} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{z-a}.$$

### 8.2.2 Inverse Laplacetransformation

Bisher wurde die Laplace-Transformierte einer Funktion  $f$  definiert und es wurden Voraussetzungen an die Funktion  $f$  formuliert, die die Existenz des uneigentlichen Integrals (213) zur Folge haben.

Jetzt gilt es zu untersuchen, wann man ausgehend von einer Laplace-Transformierten einer Funktion ebendiese Funktion durch eine Rücktransformation erhalten kann. Wir erinnern uns daran, daß die Laplace-Transformation Spezialfall einer Fouriertransformation ist.

Sei nun  $f$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$  mit der Konstanten  $M$ , also

$$|f(t)| \leq M e^{-\gamma t},$$

verschwinde für  $t < 0$  und sei in  $\mathbb{R}$  stückweise glatt. Die Funktion

$$f^*(t) := e^{-xt} f(t) \tag{215}$$

ist in  $\mathbb{R}$  ebenfalls stückweise glatt, verschwindet für  $t < 0$  und ist für  $x > \gamma$  absolut integrierbar, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |f^*(t)| dt &= \int_0^\infty e^{-xt} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-xt} e^{\gamma t} dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(x-\gamma)t} dt, \quad x > \gamma.\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Existenz der Fouriertransformierten erfüllt und es existiert

$$\begin{aligned}\hat{f}^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f^*(t) e^{-ist} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) e^{-(x+is)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} F(x+is), \quad x > \gamma.\end{aligned}$$

Nach Satz 8.12 gilt für  $x > \gamma$

$$\frac{f^*(t+0) + f^*(t-0)}{2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{f}^*(t) e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is) e^{ist} ds$$

bzw. wegen  $f^*(t) = e^{-xt} f(t)$

$$\begin{aligned}\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} &= \frac{e^{xt}}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is) e^{ist} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is) e^{(x+is)t} ds.\end{aligned}$$

Mit der Substitution  $z := x + is$  ergibt sich schließlich

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt} dz, \quad \operatorname{Re} z > \gamma.$$

Mit der eben durchgeführten Betrachtung ergibt sich der

**Satz 8.29.** (Umkehrsatz für Laplacetransformationen)

Die Funktion  $f$  sei von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , verschwinde für  $t < 0$  und sei in  $\mathbb{R}$  stückweise glatt. Dann gilt für alle  $x > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt} dt = \quad (216)$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is) e^{(x+is)t} ds = \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{für } t > 0, \\ \frac{f(0+0)}{2} & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt  $t$  von  $f$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt} dz, \quad x > \gamma. \quad (217)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is) e^{(x+is)t} ds.$$

*Bemerkung 8.30.*

In den Gleichungen (216) bzw. (217) treten Integrale mit komplexen Integrationsvariablen der Form

$$\int_C k(z) dz$$

auf, wobei  $C$  i. allg. eine Kurve bzw. ein Weg in der komplexen Zahlenebene ist. Hier ist  $C$  z.B. die gerade Verbindung der komplexen Zahlen  $x-iA$  und  $x+iA$  in der Gaussischen Zahlenebene. Die Auswertung solcher Integrale kann und soll hier nicht näher erläutert werden. Definiert ist das Integral wie folgt.

Sei  $k : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion mit komplexen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{C}$ . Für  $z = x + iy \in D$  ist  $k(z)$  darstellbar in der Form

$$k(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Die Kurve  $C$  sei parametrisiert, d.h.  $C(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Mit starkem Bezug auf das vektorielle Kurvenintegral definieren wir

$$\int_C k(z) dz = \int_a^b k(C(t)) \dot{C}(t) dt,$$

wobei  $\dot{C}(t) = \dot{x} dt + i\dot{y} dt$  ist. Mit den eingeführten Bezeichnungen ergibt sich auch

$$\begin{aligned} \int_C k(z) dz &= \int_a^b (u(x, y) + iv(x, y)) \cdot (\dot{x} dt + i\dot{y} dt) \\ &= \int_a^b [u(x, y)\dot{x} - v(x, y)\dot{y} + iv(x, y)\dot{x} + iu(x, y)\dot{y}] dt \\ &= \int_a^b (u(x, y)\dot{x} - v(x, y)\dot{y}) dt + i \int_a^b (v(x, y)\dot{x} + u(x, y)\dot{y}) dt \\ &= \int_C \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{x} + i \int_C \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

und damit eine Form, die wir als vektorielle Kurvenintegrale gut kennen.

Wir werden im folgenden auf die Auswertung der eben besprochenen Integrale weitestgehend verzichten, zumal uns dazu grundlegende, sehr hilfreiche Kenntnisse aus der Funktionentheorie nicht zur Verfügung stehen. Helfen wird uns dabei der folgende Satz.

**Satz 8.31.** (Eindeutigkeitsatz)

Für die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  seien die Voraussetzungen von Satz 8.29 erfüllt. Ferner gelte  $F_1(z) = F_2(z)$  für  $\operatorname{Re} z > \gamma$ . Dann gilt in jedem Stetigkeitspunkt  $t$  von  $f$

$$f_1(t) = f_2(t).$$

### 8.2.3 Rechenregeln der Laplacetransformation

Im folgenden sollen die wesentlichen "Rechenregeln" für die Laplace-Transformation zusammengestellt werden, die denen der Fouriertransformation ähneln, und dazu führen, daß eine etwas weiter unten aufgestellte Tabelle von "Laplace-Korrespondenzen" genutzt werden kann, um inverse Laplace-Transformationen ablesen zu können.

**Satz 8.32.** (Linearität)

Sei  $f$  und  $g$  stückweise stetige Funktionen von exponentieller Ordnung, dann gilt für beliebige reelle Koeffizienten  $a, b$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

Die Linearität folgt direkt aus der Linearität des uneigentlichen Integrals.

**Satz 8.33.** (Transformation der Ableitung und des Integrals)

a) Die Funktion  $f$  sei in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig, stückweise glatt und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , dann gilt für  $\operatorname{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0). \quad (218)$$

b) Die Funktion  $f$  sei in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$   $(k-1)$ -mal stetig diff'bar und  $f^{(k-1)}$  stückweise glatt. Desweiteren seien  $f, f', \dots, f^{(k-1)}$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann gilt für  $\operatorname{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k \mathcal{L}[f(t)] - z^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0). \quad (219)$$

c) Die Funktion  $f$  sei in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , dann gilt für  $\operatorname{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)]. \quad (220)$$

*Beweis.*

Aus der Definition der Laplace-Transformation und der partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-zt} f'(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) \Big|_{t=0}^{t=A} - \int_0^\infty -z e^{-zt} f(t) dt \\ &= -f(0) + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = -f(0) + z\mathcal{L}[f(t)] \end{aligned} \quad (221)$$

also (218). (219) zeigt man durch  $k$ -malige partielle Integration.

Wenn man (218) auf die Funktion  $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  anwendet, erhält man sofort (220).  $\square$

Beispiel:

Wir haben weiter oben die Laplace-Transformierte der Heaviside-Funktion ( $h_0(t) = 1$  für  $t \geq 0$  und  $h_0(t) = 0$  für  $t < 0$ ) ausgerechnet, es war

$$\mathcal{L}[h_0(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z}.$$

Mit der Formel (220) ist nun leicht möglich die Laplace-Transformierten der Funktionen

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2, \quad f_3(t) = t^3, \quad \dots, \quad f_n(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}, t \geq 0,$$

zu berechnen. Man findet für  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t 1 du\right] = \frac{1}{z} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z^2}.$$

Ebenso zeigt man  $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{z^3}$ . Mit der vollständigen Induktion zeigt man leicht

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{z^{n+1}} .$$

**Lemma 8.34.**

Seien die Voraussetzungen des Satzes 8.33 a) erfüllt. Nur an der Stelle  $t = a > 0$  liege eine Sprungstelle von  $f$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-az} . \quad (222)$$

*Beweis.*

Das erste Integral in (221) wird in der Form

$$\int_0^{a-0} \dots + \int_{a+0}^{\infty} \dots$$

aufgespaltet. Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis des Satzes 8.33 a). □

**Satz 8.35.** (Dämpfung, Verschiebung - Streckung)

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von exponentieller Ordnung  $\gamma$ .

a) Ein Dämpfungsfaktor  $e^{-at}$  im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich, d.h.,

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(z+a) \quad \text{für } \operatorname{Re} z > \gamma - a .$$

b) Für  $a > 0$  gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{für } \operatorname{Re} z > a \cdot \gamma .$$

Die Beweise der Beziehungen ergeben sich sofort nach dem Aufschreiben der Definition der Laplace-Transformierten der Funktionen  $e^{-at}f(t)$  bzw.  $f(at)$ .

**Definition 8.36.** (Faltungsprodukt)

Seien  $f$  und  $g$  in  $\mathbb{R}$  stückweise stetige Funktionen mit  $f(t) = g(t) = 0$  für  $t < 0$ . Unter dem Faltungsprodukt im Kontext der Laplace-Transformation der Funktionen  $f$  und  $g$  wollen wir

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

verstehen.

**Satz 8.37.** (Faltungsregel)

Die Funktion  $f$  sei in  $\mathbb{R}$  stetig, die Funktion  $g$  stückweise stetig. Beide seien von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , und es gelte  $f(t) = g(t) = 0$  für  $t < 0$ . Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung  $f * g$  für  $\operatorname{Re} z > \gamma$  und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] ,$$

also ist die Laplace-Transformierte des Faltungsproduktes zweier Funktionen gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten der Funktionen.

*Beweis.* (Beweisskizze)

Mit der Substitution  $t = u + \tau$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-su} \mathcal{L}[g(t)] f(u) du = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-s(u+\tau)} g(\tau) d\tau \right) f(u) du \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_u^{\infty} e^{-st} g(t-u) dt \right) f(u) du , \end{aligned}$$

da  $\{(u, t) : 0 \leq u < \infty, u \leq t < \infty\} = \{(u, t) : 0 \leq u \leq t, 0 \leq t < \infty\}$  ist. Die Änderung der Integrationsreihenfolge ergibt mit

$$\int_0^\infty \left( \int_u^\infty e^{-st} g(t-u) dt \right) f(u) du = \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t g(t-u) f(u) du \right) dt$$

die Behauptung. □

Da bei Anwendungen häufig periodische Vorgänge auftreten ist der Fall der Laplace-Transformation für periodische Funktionen interessant. Sei also  $f$  eine  $T$ -periodische Funktion, d.h., es gilt  $f(t+T) = f(t)$  für  $T > 0$  und beliebige  $t \geq 0$ . Dann gilt der

**Satz 8.38.**

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $T$ -periodische stückweise stetige und beschränkte Funktion. Dann gilt für  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zu} f(u) du. \quad (223)$$

*Beweis.*

Aufgrund der Beschränktheit von  $f$  gilt für  $\alpha \geq 0$

$$|f(t)| \leq M \leq M \cdot e^{\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

d.h.,  $f$  ist von exponentieller Ordnung 1, so daß  $\mathcal{L}[f(t)]$  existiert für  $\operatorname{Re} z > 0$ . Da  $f$  eine  $T$ -periodische Funktion ist, gilt

$$f(u + kT) = f(u), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

und damit

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-zt} f(t) dt.$$

Mit der Substitution  $t = u + kT$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T e^{-z(u+kT)} f(u+kT) du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-zkT} \int_0^T e^{-zu} f(u+kT) du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-zkT} \int_0^T e^{-zu} f(u) du. \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-zT})^k = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \quad (\text{geometrische Reihe!})$$

ergibt sich die Behauptung. □

Eine Regel, die bei der Lösung von Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten hilfreich sein kann, soll abschließend mit dem folgenden Satz angegeben werden.

**Satz 8.39.**

Sei  $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$  und  $f$  Laplace-transformierbar sowie  $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$  die Laplace-Transformierte von  $f$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(z). \quad (224)$$

*Bemerkung 8.40.* (Dirac-Deltafunktion) \*

In der Physik oder im Ingenieurwesen hat man es oft mit punktuellen Effekten wie einem Hammerschlag oder kurzzeitigen Stromstößen zu einem Zeitpunkt  $t_0$  in Form einer Impulsfunktion zu tun, wobei nur der Gesamtimpuls

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt, \quad t_1 \text{ "nahe bei" } t_0,$$

bekannt ist. Eine Impulsfunktion ist z.B. für kleines  $\epsilon > 0$

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \infty < t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & \epsilon < t < \infty \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1.$$

Man kann  $\delta_\epsilon$  leicht mit der Heaviside-Funktion  $h_0(t)$  in der Form

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} [h_0(t) - h_0(t - \epsilon)].$$

darstellen. In der Praxis möchte man nun gern den Gesamtimpuls auf einen Zeitpunkt  $t = t_0$  konzentrieren. Das könnte man etwa durch

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

tun, wobei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (225)$$

gelten sollte. Das ist allerdings nicht möglich, da ein Funktionswert  $\infty$  nicht zulässig ist, und (225) als Riemann-Integral unmöglich ist.

Abhilfe schafft hier die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen), deren Grundidee darin besteht, Gebilde wie etwa  $\delta(t)$  nur als Faktoren von stetigen Funktionen in bestimmten Integralen zu betrachten. Das ist möglich, weil die Fundamentalformel der Delta-Funktion

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt \\ &= g(t_0), \quad \text{falls } g \text{ stetig in } t_0, \end{aligned} \quad (226)$$

Ohne hier weiter darauf eingehen zu wollen, kann man mit (226) nun die Laplace-Transformierte von  $\delta(t)$  ausrechnen. Man erhält

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad (227)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-az} \quad (228)$$

und mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau =: u(t), \quad t \neq 0, \quad (229)$$

die *Einheitssprungfunktion*.



### 8.2.4 Praktische Arbeit mit der Laplace-Transformation und der Rücktransformation

Es wurde weiter oben schon darauf hingewiesen, daß die Berechnung der inversen Laplace-Transformation nach den Formeln (216) bzw. (217) ohne funktionentheoretische Hilfsmittel oft recht kompliziert ist. Weiterhin haben wir schon angemerkt, daß mit dem Eindeutigkeitsatz 8.31 die Rücktransformation für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Laplace-Transformierten auch aus einer Referenz-Tabelle einfach abgelesen werden können. Die Tabelle erstellt man, indem man für viele Laplace-transformierbaren Funktionen die Laplace-Transformierten unter Nutzung der oben diskutierten Regeln ausrechnet und in die Tabelle einträgt. Im folgenden wird eine Tabelle der Laplace-Transformationen der wichtigsten Funktionen zusammengestellt (auf eine Nachrechnung wird hier verzichtet).

$f(t)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{z}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$t^a, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{z-a}$
$\delta(t-t_0)$ bzw. $\delta(t)$	$e^{-zt_0}$ bzw. 1
$\ln t$	$-\frac{1}{z}(c + \ln z)$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(z-a)^n}$
$\frac{t^{\beta-1}e^{at}}{\Gamma(\beta)}, \beta > 0$	$\frac{1}{(z-a)^\beta}$
$\sin at$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(z-b)^2+a^2}$
$e^{bt} \cos at$	$\frac{z-b}{(z-b)^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
$e^{bt} \sinh at$	$\frac{a}{(z-b)^2-a^2}$
$e^{bt} \cosh at$	$\frac{z-b}{(z-b)^2-a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2az}{(z^2+a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$ (Besselfunktion)	$\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$

Neben den Einträgen in der Tabelle sind natürlich auch die im vergangenen Abschnitt dargestellten Rechenregeln bei der praktischen Arbeit sehr nützlich. Bei den Tabelleneinträgen sei noch einmal darauf hingewiesen, daß durch den Eindeutigkeitsatz 8.31 die Zuordnungen  $f(t) \leftrightarrow F(z)$  eineindeutig sind, so daß z.B.  $\frac{1}{z-a}$  nur die Laplacetransformierte der Funktion  $f(t) = e^{at}$  und keiner anderen Funktion ist.

Mit den folgenden Beispielen soll nun die praktische Arbeit mit der Laplace-Transformation demonstriert werden.

Beispiel 1:

Zu lösen ist das Randwertproblem

$$y'' + 9y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung ergibt

$$\mathcal{L}[y'' + 9y] = \mathcal{L}[y''] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos(2x)]$$

bzw. nach Nutzung der Regeln und der Tabelle

$$z^2 \mathcal{L}[y] - zy(0) - y'(0) + 9\mathcal{L}[y] = \frac{z}{z^2 + 4}.$$

Mit  $y(0) = 1$  erhält man

$$(z^2 + 9)\mathcal{L}[y] - z - y'(0) = \frac{z}{z^2 + 4} \quad \text{und somit}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{z + y'(0)}{z^2 + 9} + \frac{z}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)} = \frac{4}{5} \frac{z}{z^2 + 9} + \frac{y'(0)}{z^2 + 9} + \frac{z}{5(z^2 + 4)}.$$

Aus der Tabelle kann man nun

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{4}{5} \mathcal{L}[\cos(3x)] + \frac{y'(0)}{3} \mathcal{L}[\sin(3x)] + \frac{1}{5} \mathcal{L}[\cos(2x)] \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{4}{5} \cos(3x) + \frac{y'(0)}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \cos(2x)\right] \end{aligned}$$

ablesen. Mit dem Eindeutigkeitsatz folgt

$$y(x) = \frac{4}{5} \cos(3x) + \frac{y'(0)}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \cos(2x).$$

Zur Bestimmung von  $y'(0)$  benutzen wir die zweite Randbedingung  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$  und erhalten

$$-1 = -\frac{y'(0)}{3} - \frac{1}{5} \quad \text{bzw.} \quad y'(0) = \frac{12}{5},$$

woraus man die Lösung

$$y(x) = \frac{4}{5} \cos(3x) + \frac{4}{5} \sin(3x) + \frac{1}{5} \cos(2x)$$

erhält.

Beispiel 2:

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$u' = u + 5v, \quad v' = -(u + 3v),$$

wobei als Anfangswerte  $u(0) = 1$  und  $v(0) = 0$  vorgegeben sind. Die Laplace-Transformation der Differentialgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} -u(0) + z\mathcal{L}[u] &= \mathcal{L}[u] + 5\mathcal{L}[v] \\ -v(0) + z\mathcal{L}[v] &= -\mathcal{L}[u] - 3\mathcal{L}[v]. \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Anfangsbedingungen führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (z - 1)\mathcal{L}[u] - 5\mathcal{L}[v] &= 1 \\ \mathcal{L}[u] + (z + 3)\mathcal{L}[v] &= 0 \end{aligned}$$

für die Laplace-Transformierten von  $u$  und  $v$  mit den Lösungen

$$\mathcal{L}[u] = \frac{z+3}{z^2+2z+2}, \quad \mathcal{L}[v] = \frac{-1}{z^2+2z+2}.$$

Eine quadratische Ergänzung des Nennerpolynoms führt auf die Darstellung

$$\mathcal{L}[u] = \frac{(z+1)}{(z+1)^2+1} + \frac{2}{(z+1)^2+1} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[v] = \frac{-1}{(z+1)^2+1},$$

und damit kann man aus der Tabelle

$$\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x] \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}[v] = \mathcal{L}[-e^{-x} \sin x]$$

ablesen. Der Eindeigkeitssatz ergibt die Lösungen des ursprünglichen gekoppelten Differentialgleichungssystems

$$u(x) = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x) \quad \text{und} \quad v(x) = -e^{-x} \sin x.$$

Es muss an dieser Stelle nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Laplacetransformation eine elegante Methode zur Lösung von Differentialgleichungen ist, wie die Beispiele 1 und 2 zeigen. Dieser Fakt sollte aber nicht dazu führen, die Grundlagen der Lösungstheorie für lineare DGI (HM II für Ingenieure) zu vergessen. Denn allein mit der Laplacetransformation erkennt man nicht, daß sich die allgemeine Lösung einer linearen DGI als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen DGI und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGI ergibt!

Beispiel 3:

Im Ergebnis mathematischer Modellierungen von physikalischen oder technischen Problemen erhält man möglicherweise Gleichungen der Form

$$y(t) + \int_0^t k(t-\tau)y(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0.$$

Gleichungen dieser Art bezeichnet man als Integralgleichungen vom Volterra-Typ. Gesucht ist  $y$ . Sind  $y$ ,  $k$ ,  $f$  Laplace-transformierbar, so führt die Laplace-Transformation der Gleichung zu

$$\mathcal{L}[y(t)] + \mathcal{L}[k(t)] \cdot \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[f(t)],$$

und man erhält die Lösung

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{1 + \mathcal{L}[k(t)]}$$

im Bildraum unter Nutzung des Faltungssatzes. Die Rücktransformation liefert die Lösung des ursprünglichen Problems  $y(t)$ .

Wir wollen nun  $k$  und  $f$  konkretisieren und die Gleichung

$$y(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau) d\tau = 1$$

lösen. Die Laplace-Transformation der Integralgleichung führt unter Benutzung der Faltungsregel und der Kenntnis der Laplace-Transformierten der Sinusfunktion auf

$$\mathcal{L}[y(t)] + \frac{1}{1+z^2} \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1+z^2}{z(2+z^2)}.$$

Eine Partialbruchzerlegung führt auf die Darstellung

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2 + 2} \right)$$

und aus der Tabelle liest man

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{2}t))\right].$$

Der Eindeutigkeitsatz führt schließlich auf die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{2}t)).$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Laplacetransformation einer Differentialgleichung vom Besselschen Typ

$$xy'' + y' + 2xy = 0,$$

etwa mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$ , durch Anwendung der Sätze 8.33 und 8.39, also

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[f(t)] \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}[f^{(r)}(t)] = z^r \mathcal{L}[f(t)] - z^{r-1} f(0) - z^{r-2} f'(0) - \dots - f^{(r-1)}(0),$$

auf eine gewöhnliche DGL erster Ordnung für die Funktion  $w(z) = \mathcal{L}[y]$  zurückgeführt werden kann, die durch Trennung der Variablen und möglicherweise Variation der Konstanten gelöst werden kann. Die Rücktransformation  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}w(z)$  ergibt dann die Lösung der obigen Besselschen DGL.

## 9 Variationsrechnung

Die Ursprünge der Variationsrechnung gehen auf Johann Bernoulli im Jahr 1696 zurück. Er stellte die Frage nach der Bahnkurve, auf der ein Massenpunkt  $M$  in einer vertikalen Ebene vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  unter dem Einfluß der Schwerkraft in minimaler Zeit gleitet. Diese Aufgabe wurde *Brachistochrone*-Problem genannt (griechisch steht *brachys* für kurz und *chronos* für die Zeit). Die Beantwortung der Frage von Bernoulli ist mit der klassischen Variationsrechnung möglich.

### 9.1 Einige mathematische Grundlagen

In der HM I und HM II haben wir den Begriff des Vektorraumes kennengelernt. Sei  $V$  im folgenden ein Vektorraum oder linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  (im allgemeinen über einem Körper  $K$ ).

Hat man eine *Norm* zur Verfügung, d.h., eine Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty)$ , die jedem Element aus  $V$  eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet, so kann man den Begriff des *normierten* Raumes einführen.

**Definition 9.1.** (Norm)

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\underline{x}, \underline{y} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften

- (1)  $\|\underline{x}\| \geq 0$ ;  $\|\underline{x}\| = 0$  genau dann, wenn  $\underline{x} = \underline{0}$  ist,
- (2)  $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$ ,
- (3)  $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ ,

heißt *Norm* auf dem Vektorraum  $V$

**Definition 9.2.** (normierter Raum)

Ein Vektorraum  $V$ , auf dem eine Norm  $\| \cdot \|$  erklärt ist, heißt *normierter Raum* und wird auch mit  $(V, \| \cdot \|)$  bezeichnet.

*Bemerkung 9.3.*

Die Verwendung der Bezeichnungsweise  $(V, \| \cdot \|)$  mit der Angabe der Norm ist sinnvoll, da es durchaus möglich ist, auf Vektorräumen unterschiedliche Normen zu betrachten. Nehmen wir  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , dann sind sowohl

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{als auch}$$

$$\|\underline{x}\|_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

*Normen* auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Man kann also Vektorräume mitunter unterschiedlich *normieren*, so daß die Angabe der zur Normierung verwendeten Norm bei der Bezeichnung des Raumes notwendig ist. Zumindest muß man im Zusammenhang mit normierten Räumen immer klar machen, welche Norm verwendet wird.

In normierten Räumen kann man nun Begriffe wie *offene Kugel*, *Beschränktheit*, *Konvergenz* und *Cauchy-Folge* analog zu den Definitionen im  $\mathbb{R}^n$  definieren.

**Definition 9.4.**

Sei  $(V, \| \cdot \|)$  ein normierter Raum,  $\underline{x}, \underline{x}_n, \underline{x}_0 \in V$ ,  $\epsilon, r, K \in (0, \infty)$ .

•

$$K_r(\underline{x}_0) := \{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$$

heißt *offene Kugel* um  $\underline{x}_0$  mit dem Radius  $r$ .

- Die Folge  $(\underline{x}_n) \subset V$  heißt *beschränkt*, falls es ein  $K > 0$  mit  $\|\underline{x}_n\| < K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt.
- Eine Folge  $(\underline{x}_n) \subset V$  *konvergiert* gegen  $\underline{x}_0 \in V$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, so daß

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt.

- Eine Folge  $(\underline{x}_n) \subset V$  heißt *Cauchy-Folge* in  $V$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, so daß

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}_m\| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0$$

erfüllt ist.

Nun ist es möglich den Begriff des *vollständigen* normierten Raumes zu definieren.

**Definition 9.5.** (vollständiger normierter Raum)

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Konvergiert jede Cauchy-Folge  $(\underline{x}_n) \subset V$  gegen ein Element aus  $V$ , dann nennt man  $V$  einen *vollständigen* normierten Raum.

Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

*Bemerkung 9.6.* Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  lassen sich mit dem üblichen Betrag  $|\cdot|$  als Norm zu einem normierten Raum machen. Man kann sich nun leicht Cauchy-Folgen rationaler Zahlen konstruieren, die keinen rationalen Grenzwert haben (z.B. eine Folge, die gegen  $\sqrt{2}$  oder gegen  $e$  strebt). Damit ist  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  kein vollständiger Raum.

Ergänzt man die rationalen Zahlen durch die Grenzwerte aller Cauchyfolgen, so *vervollständigt* man den normierten Raum  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  und erhält damit  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  als vollständigen normierten Raum, also als Banachraum.

Beispiele (auf die Nachweise der jeweiligen Eigenschaften kann hier nicht eingegangen werden):

1) Der  $\mathbb{R}^n$  bzw. der  $\mathbb{C}^n$  ist mit der euklidischen Norm

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

der Betragsnorm

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

und der Maximumnorm

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

ein Banachraum.

2) Der Raum der auf dem Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen  $C[a, b]$  mit der Norm

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

ist ein Banachraum.

3) Der Raum der auf  $[a, b]$   $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $C^k[a, b]$  ist mit der Norm

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| + \dots + \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|$$

ein Banachraum.

4) Normiert man den Raum der auf dem Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen  $C[a, b]$  mit

$$\|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

so ist der Raum nicht vollständig, also kein Banachraum. Hier wird deutlich, daß eine geschickte Wahl einer Norm zur Vollständigkeit führt.

Beim Beispiel 1 handelt es sich mit dem  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  um einen *endlichdimensionalen* normierten Raum, während in den Beispielen 2 bis 4 unendlichdimensionale Räume diskutiert werden.

**Definition 9.7.**

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  heißen *äquivalent*, wenn jede bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_1$  konvergente Folge auch bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  konvergent ist und umgekehrt.

**Satz 9.8.**

*Alle Normen in einem endlich dimensionalen Raum  $V$  sind äquivalent.*

*Beweis.*

Sei  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Wir setzen

$$d := \inf \{ \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| \mid |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| = 1 \}.$$

Dann gibt es Folgen

$$\{\alpha_1^{(k)}\}, \dots, \{\alpha_n^{(k)}\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad |\alpha_1^{(k)}| + \dots + |\alpha_n^{(k)}| = 1$$

und

$$\|\alpha_1^{(k)} v_1 + \dots + \alpha_n^{(k)} v_n\| \rightarrow d \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Durch Übergang zu Teilfolgen erhalten wir konvergente Folgen

$$\{\beta_1^{(k)}\}, \dots, \{\beta_n^{(k)}\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad |\beta_1^{(k)}| + \dots + |\beta_n^{(k)}| = 1$$

und

$$\|\beta_1^{(k)} v_1 + \dots + \beta_n^{(k)} v_n\| \rightarrow d \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Wir setzen

$$\beta_j := \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Es gilt dann

$$\|(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) - (\beta_1^{(k)} v_1 + \dots + \beta_n^{(k)} v_n)\|$$

$$\leq |\beta_1 - \beta_1^{(k)}| \cdot \|v_1\| + \dots + |\beta_n - \beta_n^{(k)}| \cdot \|v_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty .$$

Hieraus folgt unter Nutzung der Ungleichung  $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$

$$\|\beta_1^{(k)} v_1 + \dots + \beta_n^{(k)} v_n\| \rightarrow \|\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n\| = d \quad \text{für } k \rightarrow \infty .$$

Annahme:  $d = 0$ .

Dies hätte  $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = \mathbf{0}$  oder, da  $(v_1, \dots, v_n)$  Basis ist (linear unabhängig)  $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$  zur Folge im Widerspruch zu  $|\beta_1| + \dots + |\beta_n| = 1$ . Also ist  $d > 0$  und für beliebige  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  gilt

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \leq \frac{1}{d} \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| .$$

Seien nun  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen in  $V$ . Wir zeigen: Es gibt ein  $C > 0$  mit  $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  für alle  $x \in V$ . Anderenfalls gäbe es eine Folge  $(x_k)$  mit  $\|x_k\|_1 \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $\|x_k\|_2 = 1$ . Für  $x_k = \gamma_1^{(k)} v_1 + \dots + \gamma_n^{(k)} v_n$  gilt dann mit obiger Abschätzung

$$|\gamma_1^{(k)}| + \dots + |\gamma_n^{(k)}| \leq \frac{1}{d} \|\gamma_1^{(k)} v_1 + \dots + \gamma_n^{(k)} v_n\|_2 = \frac{1}{d} \|x_k\|_2 = \frac{1}{d} .$$

Ferner ist

$$\|x_k\|_1 \leq |\gamma_1^{(k)}| \cdot \|v_1\|_1 + \dots + |\gamma_n^{(k)}| \cdot \|v_n\|_1 \leq \frac{1}{d} (\|v_1\|_1 + \dots + \|v_n\|_1) ,$$

d.h.,  $(x_k)$  ist bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_1$  beschränkt im Widerspruch zur obigen Annahme. Damit ist

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$

gezeigt, so daß jede bezüglich  $\|\cdot\|_2$  konvergente Folge auch bezüglich  $\|\cdot\|_1$  konvergiert. Vertauscht man die Rollen von  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ , ergibt sich die Umkehrung des Satzes.  $\square$

Aus dem eben bewiesenen Satz ergibt sich

**Satz 9.9.**

*Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum  $V$  ist vollständig, also Banachraum.*

*Beweis.*

Sei  $\|\cdot\|_1$  eine beliebige Norm in  $V$  und  $V$  habe die Dimension  $n$ .  $(v_1, \dots, v_n)$  sei eine Basis von  $V$ . Dann ist durch

$$\|x\|_2 := \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|, \quad x \in V, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

eine weitere Norm in  $V$  erklärt. Sei  $(x_k)$  mit  $x_k = \alpha_1^{(k)} v_1 + \dots + \alpha_n^{(k)} v_n$  eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_1$ . Dann ist sie nach dem Satz 9.8 auch bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  eine Cauchy-Folge. Somit gilt

$$|\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(l)}| \leq \|x_k - x_l\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } k, l \rightarrow \infty, j = 1, \dots, n,$$

d.h.,  $(\alpha_j^{(k)})$  ist für jedes  $j = 1, \dots, n$  eine Cauchy-Folge in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , und aus der Vollständigkeit dieses Raumes ergibt sich

$$\alpha_j := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{(k)} \quad \text{existiert für } j = 1, \dots, n .$$

Daher konvergiert  $(x_k)$  gegen  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  bzw.  $\|\cdot\|_1$ , womit die Vollständigkeit von  $(V, \|\cdot\|_1)$  bewiesen ist.  $\square$

Man könnte nun noch eine Reihe weiterer Räume erklären, so z.B. Räume, in denen ein Skalarprodukt erklärt werden kann (Hilbert-Räume), aber es sollten ja nur die wichtigsten Grundlagen für die Variationsrechnung skizziert werden.



## 9.2 Abbildungen und Funktionale auf Banachräumen und Variationsprobleme

Im folgenden betrachten wir Abbildungen  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  wobei  $X, Y$  Banachräume sind. Es soll der Begriff der Ableitung einer Abbildung  $f$  erklärt werden. Da man in Banachräumen im allgemeinen nicht dividieren kann, kann man einen Differenzenquotienten der Art

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

der bei Funktionen mit reellen oder komplexen Argumenten die Grundlage für die Definition der Ableitung war, nicht bilden.

Deshalb wird hier an den Begriff der Differenzierbarkeit von Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$  angeknüpft. Eine Abbildung  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  war differenzierbar in  $x_0 \in \dot{D}$ , wenn sich  $\mathbf{f}(\underline{x})$  in einer Umgebung von  $\underline{x}_0$  in der Form

$$\mathbf{f}(\underline{x}) = \mathbf{f}(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \mathbf{k}(\underline{x})$$

darstellen läßt, wobei  $A$  eine reelle  $n \times m$ -Matrix ist, und  $\mathbf{k} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{\mathbf{k}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = \mathbf{0}$$

ist. Die Matrix  $A$  hängt von  $\underline{x}_0$  ab, wie auch die Abbildung  $\mathbf{k}$ . Durch

$$A\underline{h} =: L(\underline{h}) \quad (\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n)$$

ist eine stetige lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben. Man kann leicht zeigen, daß  $A$  gleich der Funktionalmatrix in  $x_0$  ist, also

$$A = \mathbf{f}'(\underline{x}_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\underline{x}_0) \right)$$

ist. Der Begriff der Differenzierbarkeit kann nun in der eben beschriebenen Weise auf Abbildungen  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  wobei  $X, Y$  Banachräume sind, verallgemeinert werden.

### Definition 9.10.

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  eine Abbildung, wobei  $X$  und  $Y$  Banachräume sind. Man nennt  $\mathbf{f}$  in  $\underline{x}_0 \in \dot{D}$  *Frechet-differenzierbar*, wenn  $\mathbf{f}$  in einer Umgebung von  $\underline{x}_0$  folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\mathbf{f}(\underline{x}) = \mathbf{f}(\underline{x}_0) + L[\underline{x}_0](\underline{x} - \underline{x}_0) + \mathbf{k}(\underline{x}). \quad (230)$$

Dabei ist  $L[\underline{x}_0]$  ein linearer stetiger Operator (Abbildung) von  $X$  in  $Y$ , und  $\mathbf{k} : D \rightarrow Y$  besitzt die Eigenschaft

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \mathbf{k}(\underline{x}) = \mathbf{0}. \quad (231)$$

In diesem Fall schreibt man den Operator  $L[\underline{x}_0]$  in der Form

$$L[\underline{x}_0] =: \mathbf{f}'[\underline{x}_0] \quad (232)$$

und nennt ihn die *Frechet-Ableitung* von  $\mathbf{f}$  in  $\underline{x}_0$ .  $\mathbf{f} : D \rightarrow Y$  heißt *Frechet-differenzierbar* in  $D$ , wenn  $\mathbf{f}$  in jedem Punkt  $\underline{x} \in D$  *Frechet-differenzierbar* ist.

Jedem Punkt  $\underline{x} \in D$  ist im Falle der *Frechet*-Differenzierbarkeit ein stetiger linearer Operator  $\mathbf{f}'[\underline{x}]; X \rightarrow Y$  zugeordnet. Die zugehörige Funktionsgleichung hat die Form

$$\underline{v} = \mathbf{f}'[\underline{x}]\underline{h}.$$

$\mathbf{f}'[\underline{x}]$  ist das Funktionssymbol (bei festem  $\underline{x}$ ),  $\underline{h}$  die unabhängige Variable und  $\underline{v}$  die abhängige Variable.

Beispiel:

Wir betrachten das Integral

$$f(u) := \int \int_B u^2(x, y) \, dx dy$$

auf einem kompakten, Jordan-meßbaren Bereich  $B$  in  $\mathbb{R}^2$ . Man kann  $f$  auffassen als eine Abbildung

$$f : C(B) \rightarrow \mathbb{R},$$

also vom Banachraum aller auf  $B$  stetigen Funktionen in den Raum der reellen Zahlen. Als Norm in  $C(B)$  verwenden wir

$$\|u\| = \max_{(x,y) \in B} |u(x, y)|.$$

Für eine festgewählte Funktion  $u_0 \in C(B)$  soll die Frechet-Ableitung von  $f$  berechnet werden. Dazu rechnen wir  $f(u) - f(u_0)$  explizit aus, wobei  $u = u_0 + h$  gesetzt wird, mit beliebigem  $h \neq 0$  ( $h \in C(B)$ ).

$$\begin{aligned} f(u_0 + h) - f(u_0) &= \int \int_B (u_0 + h)^2 \, dx dy - \int \int_B u_0^2 \, dx dy \\ &= \int \int_B [(u_0 + h)^2 - u_0^2] \, dx dy = \int \int_B [u_0^2 + 2u_0h + h^2 - u_0^2] \, dx dy \\ &= \int \int_B [2u_0h + h^2] \, dx dy. \end{aligned} \quad (233)$$

Man erhält also

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + 2 \int \int_B u_0 h \, dx dy + \underbrace{\int \int_B h^2 \, dx dy}_{=: k(u_0 + h)}. \quad (234)$$

Für das letzte Integral gilt

$$\frac{1}{\|h\|} k(u_0 + h) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \rightarrow 0,$$

denn man kann wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{\|k(u_0 + h)\|}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int \int_B h^2 \, dx dy \right| \leq \frac{1}{\|h\|} \int \int_B \|h\|^2 \, dx dy \\ &= \|h\| \int \int_B \, dx dy \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Man erkennt weiterhin, daß das erste Integral in (234) linear und stetig von  $h$  abhängt. Demzufolge hat man mit

$$f'[u_0]h = 2 \int \int_B u_0 h \, dx dy, \quad h \in C(B) \quad (235)$$

die Frechet-Ableitung von  $f$  berechnet (und damit auch die Frechet-Differenzierbarkeit von  $f$  bewiesen).

Im eben behandelten Beispiel war  $f$  auf einem Banachraum definiert und hatte reelle Werte. Abbildungen dieser Art haben bei Variationsproblemen eine besondere Bedeutung. Deshalb definieren wir:

**Definition 9.11.**

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ , wobei  $X$  ein Banachraum ist und  $Y = \mathbb{R}$ , also der Banachraum der reellen Zahlen ist, heißt *Funktional*.

**Satz 9.12.**

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ein Frechet-differenzierbares Funktional auf einer Teilmenge  $D$  eines Banachraumes  $X$  über  $\mathbb{R}$  (vollständiger linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen), und ist  $u_0 \in \dot{D}$  eine (lokale) Extremalstelle von  $f$ , so gilt

$$f'[u_0]h = 0 \quad \text{für alle } h \in X.$$

*Beweis.*

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß  $u_0$  eine lokale Minimalstelle von  $f$  ist (wäre es eine Maximalstelle, so würden wir statt  $f$  einfach  $-f$  betrachten). In einer Umgebung  $U$  von  $u_0$  gilt also

$$f(u) \geq f(u_0) \quad \text{für alle } u \in U. \quad (236)$$

Wir schreiben  $u$  in der Form  $u = u_0 + th$  mit  $t > 0$  und  $\|h\| = 1$ . Wegen der Frechet-Differenzierbarkeit können wir  $f(u)$  darstellen als

$$f(u_0 + th) = f(u_0) + f'[u_0](th) + k(u_0 + th)$$

mit

$$\frac{k(u_0 + th)}{\|th\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Umstellung und Division durch  $t > 0$  liefert

$$0 \leq \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t} = f'[u_0]h + \frac{k(u_0 + th)}{t}. \quad (237)$$

Der linke Quotient ist  $\geq 0$  wegen (236). Das rechte Glied  $\frac{k(u_0+th)}{t}$  strebt mit  $t \rightarrow 0$  gegen Null (wegen  $t = \|th\|$ ), also folgt

$$0 \leq f'[u_0]h \quad \text{für alle } h \in X \quad \text{mit } \|h\| = 1. \quad (238)$$

Setzen wir hier  $-h$  statt  $h$  ein, so erhalten wir wegen  $\|-h\| = 1$  auch

$$0 \leq f'[u_0](-h) = -f'[u_0]h$$

und somit

$$f'[u_0]h = 0 \quad \text{für alle } h \in X \quad \text{mit } \|h\| = 1. \quad (239)$$

Damit gilt (239) für alle  $h \in X$ , da man diese durch Multiplikation mit geeigneten  $\lambda \in \mathbb{R}$  aus den Elementen mit Einheitslänge gewinnt.  $\square$

Unter den  $u_0$  mit  $f'[u_0]h = 0$  für alle  $h \in X$  sind also alle Extremalstellen von  $f$  enthalten. (239) ist damit eine notwendige Bedingung zur Ermittlung von Kandidaten für Extremalstellen von  $f$ . Kandidaten  $u_0 \in \dot{D} \subset X$  für Extremalstellen von  $f$  nennt man auch *stationäre Punkte* von  $f$ .

**Definition 9.13.** (Variationsproblem auf einem Banachraum)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset X$ ) ein Frechet-differenzierbares Funktional, wobei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$  ist, so sind die Punkte  $u_0 \in \dot{D}$  gesucht, für die

$$f'[u_0]h = 0, \quad \text{für alle } h \in X$$

gesucht.

Beispiel:

Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  ist bekanntlich ein Banachraum) sei das Funktional

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2}(A\underline{x}, \underline{x}) + (\underline{b}, \underline{x}) + c, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

definiert, wobei  $A$  eine reelle symmetrische  $n \times n$ -Matrix ist, und  $(\underline{x}, \underline{y})$  das Skalarprodukt zweier Elemente aus dem  $\mathbb{R}^n$  ist.  $\underline{b}$  sei aus  $\mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Die Frechet-Ableitung berechnen wir für  $\underline{x}, \underline{h} \in \mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) &= \frac{1}{2}(A(\underline{x} + \underline{h}), \underline{x} + \underline{h}) + (\underline{b}, \underline{x} + \underline{h}) + c \\ &\quad - \frac{1}{2}(A\underline{x}, \underline{x}) - (\underline{b}, \underline{x}) - c \\ &= \frac{1}{2}[(A\underline{x}, \underline{x}) + (A\underline{x}, \underline{h}) + (A\underline{h}, \underline{x}) + (A\underline{h}, \underline{h}) \\ &\quad + ((\underline{b}, \underline{x}) + (\underline{b}, \underline{h}) - \frac{1}{2}(A\underline{x}, \underline{x}) - (\underline{b}, \underline{x})) \\ &= \frac{1}{2}[(A\underline{x}, \underline{h}) + (A\underline{h}, \underline{x})] + (\underline{b}, \underline{h}) + \frac{1}{2}(A\underline{h}, \underline{h}). \end{aligned}$$

Da  $A$  symmetrisch ist, gilt  $(A\underline{h}, \underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{h})$  und deshalb

$$f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{h}) + (\underline{b}, \underline{h}) + \frac{1}{2}(A\underline{h}, \underline{h}) = (A\underline{x} + \underline{b}, \underline{h}) + \frac{1}{2}(A\underline{h}, \underline{h}).$$

Es gilt offensichtlich

$$\frac{|(A\underline{h}, \underline{h})|}{\|\underline{h}\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|\underline{h}\|^2}{\|\underline{h}\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|\underline{h}\| \rightarrow 0 \quad (\underline{h} \neq \underline{0}).$$

Damit erhält man

$$f'[\underline{x}]\underline{h} = (A\underline{x} + \underline{b}, \underline{h}),$$

und die stationären Punkte  $\underline{x}$  mit  $f'[\underline{x}]\underline{h} = 0$  von  $f$  sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$A\underline{x} = -\underline{b}.$$

### 9.3 Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten

Sucht man z.B. nach stetigen Funktionen  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die ein Funktional  $I(y)$  extremal machen sollen, und die die Bedingungen  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$  erfüllen sollen, so sucht man nach Funktionen aus der Menge

$$M = \{y \in C[a, b] \mid \text{mit } y(a) = y_0 \quad \text{und} \quad y(b) = y_1\}.$$

Man stellt nun leicht fest, daß die Summen zweier Funktionen aus  $M$  nicht in  $M$  liegt (es sei denn  $y_0 = y_1 = 0$ ). Für diese Art von Variationsproblemen mit Nebenbedingungen erweist sich die Verwendung des Begriffs der linearen Mannigfaltigkeit als sinnvoll.

**Definition 9.14.**

Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$ ,  $V$  ein Unterraum von  $X$  und  $u^*$  ein beliebiges festes Element aus  $X$ . Durch

$$M = u^* + V := \{u^* + v \mid v \in V\}$$

wird eine *lineare Mannigfaltigkeit* erklärt.

*Bemerkung 9.15.*

Jede Gerade oder Ebene ist eine lineare Mannigfaltigkeit. Z.B. ist die Ebene

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z)^T = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + s\mathbf{c}, t, s \in \mathbb{R} \\ \text{und } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ linear unabhängige}\}$$

darstellbar als

$$E = \mathbf{a} + E_0$$

wobei  $E_0$  die zu  $E$  parallele Ebene ist, die durch den Ursprung geht (also den Nullvektor enthält).  $E_0$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ , denn die Summe zweier Ebenenpunkte ist wiederum Punkt der Ebene.

Es gilt nun für Variationsprobleme mit Nebenbedingungen der

**Satz 9.16.**

Es seien  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  Unterraum von  $X$  und  $M = u^* + V$  (lineare Mannigfaltigkeit).  $f$  sei Frechet-differenzierbar auf  $X$ . Hat die Einschränkung  $f|_M$  in  $u_0$  ein Extremum, so gilt

$$f'[u_0]h = 0, \quad \text{für alle } h \in V. \quad (240)$$

*Beweis.*

Wir definieren  $\hat{f}(v) := f(u^* + v)$  für alle  $v \in V$ . Es ist damit  $\hat{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Unterraum  $V$  definiert. Es folgt für  $v, h \in V$  über die Frechet-Differenzierbarkeit von  $f$

$$\hat{f}(v + h) = f(u^* + v + h) = f(u^* + v) + f'[u^* + v]h + k(u^* + v + h)$$

mit der Eigenschaft

$$\frac{k(u^* + v + h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\| \rightarrow 0.$$

Mit  $\hat{k}(v) := k(u^* + v)$  hat man

$$\hat{f}(v + h) = \hat{f}(v) + f'[u^* + v]h + \hat{k}(v + h), \quad h \in V.$$

Daraus folgt, daß  $f'[u^* + v]h = \hat{f}'[v]h$  zu setzen ist. Nach Satz 9.12 gilt aber für jede Extremalstelle  $v_0 \in V$  von  $\hat{f}$  die Gleichung  $\hat{f}'[v_0]h = 0$  für alle  $h \in V$ . Mit  $u_0 := u^* + v_0$  ist dies gerade die Behauptung (240).  $\square$

**Definition 9.17.** (Variationsproblem auf einer linearen Mannigfaltigkeit)

Es sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  Frechet-differenzierbar auf dem Banachraum  $X$  über  $\mathbb{R}$  und es sei  $M = u^* + V$  eine lineare Mannigfaltigkeit in  $X$  ( $V \subset X$  Unterraum,  $u^* \in X$ ). Gesucht sind die Elemente  $u_0 \in M$  mit

$$f'[u_0]h = 0, \quad \text{für alle } h \in V. \quad (241)$$

Diese Elemente  $u_0$  heißen *stationäre Punkte* von  $f$  mit der Nebenbedingung  $u_0 \in M$ .

Beispiel:

Variationsprobleme gehen oft von dem Integral

$$I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx \quad (242)$$

aus, wobei  $w = F(x, y, z)$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf  $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist, und  $u(a) = u_a$  und  $u(b) = u_b$  vorgegeben sind (Brachystrichrone-Problem). Es ist eine stetig differenzierbare Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht, die  $I(u)$  stationär (extrem) macht, also  $I'[u]h = 0$  für alle  $h$  mit  $h(a) = h(b) = 0$  macht (als Banachraum  $X$  haben wir hier die stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  und als lineare Mannigfaltigkeit  $M$  die Elemente  $v \in C^1[a, b]$  mit  $v(a) = u_a$  und  $v(b) = u_b$ ). Wir berechnen  $I'[u]$  aus der Differenz  $I(u + h) - I(u)$  mit  $h(a) = h(b) = 0$ .

$$\begin{aligned} I(u + h) - I(u) &= \int_a^b [F(x, u + h, u' + h') - F(x, u, u')] dx \\ &= \int_a^b [F'(x, u, u') \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ h' \end{pmatrix} + k(x, h, h')] dx \\ &= \int_a^b [F_y(x, u, u')h + F_z(x, u, u')h'] dx + \int_a^b k(x, h, h') dx, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{k(x, h, h')}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \rightarrow 0 \quad (\|h\| := \max_{x \in [a, b]} |h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h'(x)|).$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig. Damit gilt für das zweite Integral

$$\frac{1}{\|h\|} \int_a^b k(x, h, h') dx \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Das erste Integral ist bezüglich  $h$  linear und stetig, damit folgt

$$I'[u]h = \int_a^b [F_y(x, u, u')h + F_z(x, u, u')h'] dx.$$

Zur Vereinfachung der Gleichung  $I'[u]h = 0$  wird der zweite Teil mit der partiellen Integration umgeformt, man erhält

$$\begin{aligned} \int_a^b F_z h' dx &= h(b)F_z(b, h(b), h'(b)) - h(a)F_z(a, h(a), h'(a)) \\ &\quad - \int_a^b \frac{d}{dx} F_z(x, u(x), u'(x)) h(x) dx. \end{aligned}$$

Damit erhält man für  $I'[u]h$

$$I'[u]h = \int_a^b [F_y(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_z(x, u, u')] h dx. \quad (243)$$

Dieses Integral verschwindet für alle  $h \in V$  genau dann, wenn gilt:

$$F_y(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_z(x, u, u') = 0. \quad (244)$$

Die Gleichung (244) heißt *Euler-Lagrange Differentialgleichung* zum Variationsproblem für das in (242) definierte Funktional  $I(u)$ . Die Lösungen der Differentialgleichung sind die gesuchten stationären Punkte, unter der Nebenbedingung  $u(a) = u_a$ ,  $u(b) = u_b$ .

### 9.4 Klassische Variationsrechnung

Beim Beweis des Satzes 9.12 haben wir zur Berechnung der Frechet-Ableitung  $u$  in der Form  $u = u_0 + th$  mit  $\|h\| = 1$  und  $t > 0$  aufgeschrieben, und  $f'[u_0]h$  im Ergebnis eines Grenzprozesses für  $t \rightarrow 0$  erhalten. Es galt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(u_0 + th) - f(u_0)] = f'[u_0]h$$

In der klassischen Variationsrechnung definiert man

**Definition 9.18.** (Gateaux-Ableitung - Variation eines Funktionals)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset V$  ein Funktional und  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  $y \in D$  und  $v \in V$  mit  $y + \epsilon v \in D$ . Für alle  $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$  heißt

$$\delta f(y; v) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(y + \epsilon v) - f(y)] = \frac{d}{d\epsilon} f(y + \epsilon v) |_{\epsilon=0} .$$

*erste Variation* oder *Gateaux-Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $y$  in Richtung  $v$ , sofern der Grenzwert existiert.

Als *zweite Variation* von  $f$  bezeichnet man

$$\delta^2 f(y; v) := \frac{d^2}{d\epsilon^2} f(y + \epsilon v) |_{\epsilon=0} .$$

Die Änderungsfunktion

$$\delta y = \epsilon v$$

nennt man *Variation* der Funktion  $y(x)$ . Die Variation  $\delta y$  ist Element von  $V$ .

**Korollar 9.19.**

*Existiert die Frechet-Ableitung von  $f$  an der Stelle  $y$ , so gilt*

$$f'[y]h = \delta f(y; h) .$$

**Korollar 9.20.**

*Für eine Lösung  $y^*$  des Variationsproblems*

$$f(y) = \text{Extr.}! \quad y \in D$$

*ergibt sich aus dem Satz 9.12, daß für alle  $v$  mit  $y^* + \epsilon v \in D$  (zulässige  $v$ )*

$$\delta f(y^*; v) = 0$$

*sein muß, sofern die Gateaux-Ableitung existiert.*

*Für die zweite Variation von  $f$  muß*

$$\delta^2 f(y^*; v) \geq 0$$

*gelten.*

## 9.5 Einige Variationsaufgaben

### 9.5.1 Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

Gesucht ist eine Funktion  $y \in C^2[a, b]$  mit  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$ , also eine Funktion, deren Graph die Punkte  $(a, y_0)$  und  $(b, y_1)$  miteinander verbindet. Die Suche nach der kürzesten Verbindung bedeutet nun die Minimierung des Funktionals

$$f(y) := \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx .$$

Durch die Forderung  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$  handelt es sich um eine Variationsaufgabe auf der linearen Mannigfaltigkeit  $(y^* \in C^2[a, b]$  mit  $y^*(a) = y_0$  und  $y^*(b) = y_1$ )

$$M = \{y^* + v \mid v \in C^2[a, b] \text{ mit } v(a) = v(b) = 0\} .$$

Für die Funktion  $F$  aus (242) ergibt sich

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} .$$

Damit lautet die Euler-Lagrange-Differentialgleichung zur Ermittlung stationärer Punkte

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 0 .$$

Damit muß

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c = \text{const.}$$

gelten, und es folgt

$$y'(x) = a := \pm \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = ax + b .$$

Die Berücksichtigung von  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$  ergibt schließlich

$$y(x) = ax + b = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) ,$$

also - nicht unbedingt überraschend - die Gerade, die die Punkte verbindet.

### 9.5.2 Das Fermat-Prinzip

Das *Fermat-Prinzip* besagt, daß ein Lichtstrahl denjenigen Weg sucht, den er in kürzester Zeit zurücklegen kann. Die Geschwindigkeit im anisotropen Medium sei  $w = w(x, y)$ , dann ergibt sich für den Lichtweg  $y(x)$  die Zeit

$$T(y) = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{ds}{w(x, y)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{w(x, y)} dx .$$

Mit dem Brechungsindex  $n(x, y) = \frac{1}{w(x, y)}$  ergibt sich das zu minimierende Funktional

$$T(y) = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx . \quad (245)$$



Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung soll nur für den Fall  $n(x, y) = n(y)$ , also den Fall, daß der Brechungsindex nur von der Höhe in der vertikalen  $(x, y)$ -Ebene abhängt, betrachtet werden. Mit  $F(y, y') = n(y)\sqrt{1 + y'^2}$  ergibt sich die Euler-Lagrange-Differentialgleichung zu

$$y'' = \frac{1}{n(y)}n'(y)(1 + y'^2). \quad (246)$$

Nun kann man abhängig vom konkreten Brechungsindex die Gleichung (245) lösen. Für  $n(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$  erhält man als Lichtweg eine Zykloide (Brachistochrone). Mit  $n(y) = \frac{1}{y}$  wird (245) zu

$$yy'' = -1 - y'^2 \implies 0 = yy'' + y'^2 + 1 = (yy')' + 1 \implies y^2 + x^2 = cx + d,$$

mit Kreisen  $y^2 + x^2 = cx + d$  als Lösung.

Aus (246) kann man unter Nutzung der Krümmungsformeln (siehe HM II-Skript) die Krümmung des Lichtstrahls mit

$$\kappa = \frac{n'(y)}{n(y)\sqrt{1 + y'^2}}$$

aufschreiben. In der Luft nimmt der Brechungsindex mit der Höhe ab und damit wird  $n'(y) < 0$ . Dann ist auch  $\kappa < 0$  und die Lichtstrahlen konvex, d.h., man sieht die Sonne noch, obwohl sie schon untergegangen ist (siehe auch Abb. 28).

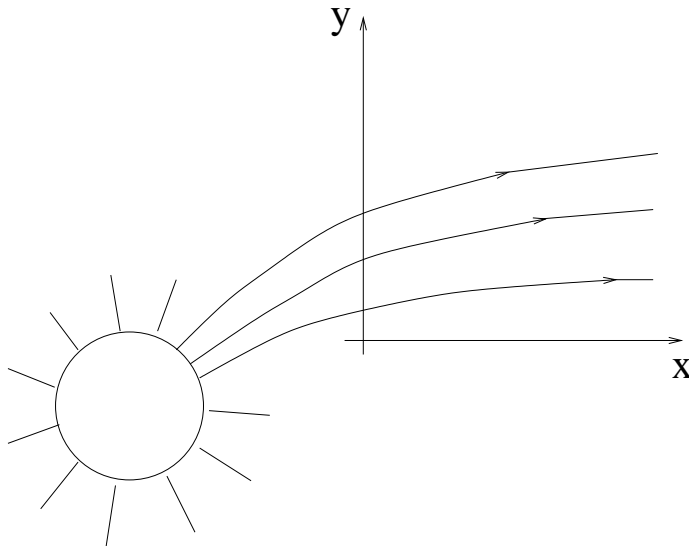


Abbildung 28: Untergegangene Sonne

### 9.5.3 Kubische Splines als Ergebnis einer Variationsaufgabe

Gegeben seien  $(n + 1)$  paarweise verschiedene Stützstellen  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , die im Sinn wachsender Abszissen numeriert seien, und zugehörige Stütz- oder Funktionswerte  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Gesucht wird eine mindestens einmal stetig differenzierbare Interpolationsfunktion  $s(x)$  mit  $s(x_i) = y_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Wir gehen nun vom Modell aus, wonach durch die gegebenen Stützpunkte eine dünne, homogene Latte gelegt sei, die in den Stützpunkten gelenkig gelagert sei und dort keinen äußeren Kräften unterliege. Dann soll die Biegelinie der Latte die Lösung  $s(x)$  der Interpolationsaufgabe sein (siehe Abb. 29).

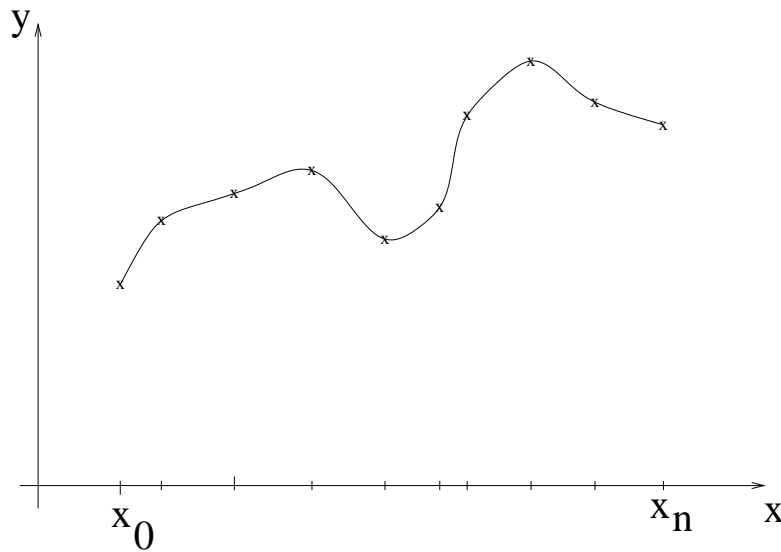


Abbildung 29: Biegelinie

Nach Extremalprinzipien wird die Deformationsenergie der Latte durch ihre angenommene Form minimiert. Sie ist für eine dünne, homogene Latte unter vereinfachenden Annahmen und, abgesehen von physikalischen und geometrischen Konstanten, durch den Integralausdruck bzw. das Funktional

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 dx$$

gegeben. Die gesuchte Spline-Interpolierende definieren wir als Lösung von folgender Variationsaufgabe unter den präzisierten Nebenbedingungen (Variationsaufgabe auf einer linearen Mannigfaltigkeit)

- a) Die Funktion  $s(x)$  erfülle die Interpolationseigenschaft

$$s(x_i) = y_i \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n.$$

- b) Die Funktion  $s(x)$  sei an allen inneren Stützstellen  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  mindestens einmal stetig differenzierbar.  
 c) Zwischen der Stützstellen sei  $s(x)$  viermal stetig differenzierbar.  
 d)  $s(x)$  minimiere das Funktional

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 dx. \quad (247)$$

Notwendig für eine Lösung  $s^*(x)$  der eben formulierten Variationsaufgabe ist das Verschwinden der ersten Variation, also

$$\delta E(s^*; v) = 0. \quad (248)$$

Für die erste Variation berechnet man

$$\begin{aligned} \delta E(s^*; v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} (s''(x) + v''(x))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{x_n} (s''(x)^2 + 2\epsilon s''(x)v''(x) + \epsilon^2 v''(x)^2 - s''(x)^2) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} s''(x)v''(x) dx. \end{aligned}$$

Nach zweimaliger partieller Integration erhält man unter Nutzung der Additivität des Integrals bezüglich des Integrationsintervalls für die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} \delta E(s^*; v) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)v''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ s''(x)v'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - s'''(x)v(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} s^{(4)}(x)v(x) dx \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (249)$$

Wegen der Eigenschaft a) muß  $v(x_i) = 0$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  sein ( $s^*(x) = s(x) + v(x)$  muß die Bedingung a) erfüllen). Folglich entfallen die ausintegrierten Terme, die  $v(x)$  enthalten. Aus der Stetigkeitsforderung b) für die erste Ableitung von  $s(x)$  folgt auch die Stetigkeit von  $v'(x)$ , da  $s^{*'}(x) = s'(x) + v'(x)$  ja stetig sein muß (zulässig sein muß). Damit gilt  $v'(x_i - 0) = v'(x_i + 0) = v'(x_i)$  und wir können (249) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \delta E(s^*; v) &= s''(x_n - 0)v'(x_n) - s''(x_0 + 0)v'(x_0) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \{s''(x_i + 0) - s''(x_i - 0)\}v'(x_i) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s^{(4)}(x)v(x) dx = 0 . \end{aligned} \quad (250)$$

Fordert man nun von  $s(x)$  zusätzlich zu den Bedingungen a) und b)

$$s^{(4)}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \neq x_0, x_1, \dots, x_n \quad (251)$$

$$s''(x_i + 0) = s''(x_i - 0) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (252)$$

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0 , \quad (253)$$

dann ist die notwendige Bedingung  $\delta E(s^*; v) = 0$  für alle zulässigen Variationen  $v(x)$  erfüllt. Mit den Bedingungen a) und b) aus der gestellten Variationsaufgabe und die Forderungen (251), (252) und (253) hat man nun die Grundlage für die Berechnung der Splines.

Für die zweite Variation von  $E$  errechnet man

$$\delta^2 E(s^*; v) = \int_{x_0}^{x_n} v''(x)^2 dx$$

und sieht damit sofort, daß  $\delta^2 E(s^*; v) \geq 0$  ist. Damit ist die zweite notwendige Bedingung für ein Extremum von  $E$  an der Stelle  $y^*$  erfüllt (nach Satz 9.20). Wegen der Bedingung (251) ist die gesuchte Spline-Interpolierende  $s(x)$  in jedem Teilintervall  $(x_i, x_{i+1})$  ein kubisches Polynom

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 . \quad (254)$$

Wegen (252) ist nicht nur die erste, sondern auch die zweite Ableitung von  $s(x)$  an den inneren Stützstellen stetig. Die zweite Ableitung verschwindet an den Stützstellen  $x_0$  und  $x_n$ .

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i, d_i$  sei auf die HM II verwiesen (Skript, Abschnitt Interpolation).

## 9.6 Natürliche Randbedingungen, Transversalität

Bisher haben wir Variationsprobleme besprochen, bei denen z.B. eine Kurve durch einen Anfangs- und einen Endpunkt führen soll (etwa  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$ ). Betrachtet man z.B. das Problem der Suche nach denjenigen Funktionen aus  $C^2[a, b]$ , deren Graph die Punkte  $(a, y_0)$  und  $(b, y_1)$  miteinander verbindet, und die bei Rotation um die  $x$ -Achse eine Fläche mit kleinstmöglichem Flächeninhalt erzeugt. Aus der HM I/HM II (Guldinsche Regeln) wissen wir, daß der Inhalt der Mantelfläche

$$S(y) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (255)$$

ist. Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung lautet

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y \frac{\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} y'' = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$1 + y'^2 - yy'' = 0.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung findet man

$$y(x) = c \cosh \frac{x+a}{c},$$

also Kettenlinien. Die Konstanten  $a$  und  $c$  sind nun so zu bestimmen, daß  $y(a) = y_0$  und  $y(b) = y_1$  gilt (darauf soll hier verzichtet werden).

Verzichtet man nun auf die Fixierung der Kurve im Punkt  $(b, y_1)$  und sucht die Kurve, die durch  $(a, y_0)$  läuft und (255) minimal macht, erhält man Rand  $x = b$  im Ergebnis der Variationsaufgabe eine *natürliche Randbedingung*.

Das Variationsproblem

$$f(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Extr.}$$

besteht nun in der Suche einer Funktion  $y \in C^2[a, b]$  mit  $y(a) = y_0$ . Die Auswertung der notwendigen Bedingung  $\delta f(y; v) = 0$  führt auf die Gleichung

$$v F_{y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) v dx = 0 \quad (256)$$

für alle zulässigen  $v$  mit  $v \in C^2[a, b]$ ,  $v(a) = 0$ . Da  $v$  mit  $v(a) = v(b)$  eine zulässige Variation ist, folgt aus (256) wie gehabt die Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Als weitere Bedingung muß auch  $v F_{y'} \Big|_a^b$  gleich Null sein, wenn für ein zulässiges  $v$  nun  $v(b) \neq 0$  gilt, muß zur Erfüllung von  $v F_{y'} \Big|_a^b = 0$  die *natürliche* oder *freie* Randbedingung

$$F_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0 \quad (257)$$

gelten.

Kehren wir noch einmal zu dem oben behandelten Problem der Minimalfläche eines Rotationskörpers zurück und lassen die Bedingung  $y(b) = y_1$  fallen. Die natürliche Randbedingung (257) lautet für  $F(x, y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$

$$y(b)y'(b) = 0.$$

Unter den Kettenlinien (Ergebnis der Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung) durch den Punkt  $(a, y_0)$  erzeugt also diejenige bei Rotation um die  $x$ -Achse die kleinste Mantelfläche, die senkrecht auf die Gerade  $x = b$  trifft (siehe Abb. 30).

Nun soll nur noch kurz auf die Transversalitätsbedingungen hingewiesen werden, die eine Verallgemeinerung der natürlichen Randbedingung darstellt.

Im Gegensatz zu dem eben besprochenen Fall der natürlichen Randbedingung läßt man den Randwert  $y(b)$  nicht auf einer Geraden  $x = b$  frei, sondern man sagt nur, daß er auf einer

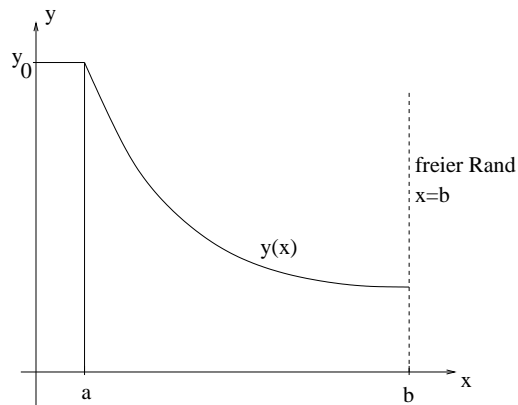


Abbildung 30: Kettenlinie

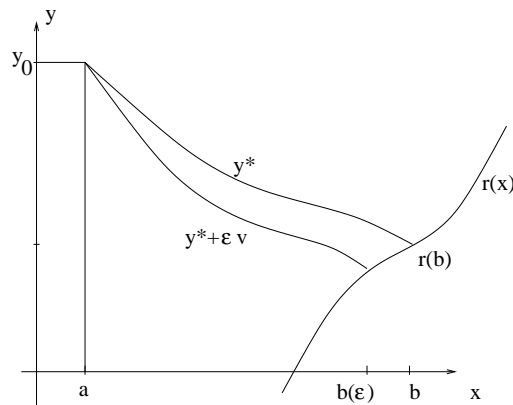


Abbildung 31: Transversalitätsbedingung

vorgegebenen Kurve  $y = r(x)$  liegen soll. Die Intervallgrenze  $b$  liegt also nicht a priori fest, sondern ist ein Ergebnis der Lösung der Variationsaufgabe

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extr!} \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = r(b). \quad (258)$$

Neben  $y(x)$  ist noch  $b$  zu bestimmen. Man nimmt  $b$  und  $y^*(x)$  als Lösung an. Die Vergleichsfunktion  $y_\epsilon(x) = y^*(x) + \epsilon v(x)$  mit  $v(a) = 0$  treffe bei  $b(\epsilon)$  auf die Kurve  $y = r(x)$ . In diesem Fall hängt die obere Grenze in

$$h(\epsilon) := \int_a^{b(\epsilon)} F(x, y_\epsilon(x), y'_\epsilon(x)) dx \quad (259)$$

von  $\epsilon$  ab. Die Anwendung der Leibnizregel für Differentiation von Parameterintegralen ergibt

$$0 = \dot{h}(0) = \int_a^b [F_y(x, y^*, y^{*\prime})v + F_{y'}(x, y^*, y^{*\prime})v'] dx + F(b, y^*(b), y^{*\prime}(b)) \cdot \dot{b}(0).$$

Aus der Bedingung  $y_\epsilon(b(\epsilon)) = r(b(\epsilon))$  für die variierte Funktion errechnet man durch Differentiation nach  $\epsilon$

$$\dot{b}(0) = \frac{v(b)}{r'(b) - y^{*\prime}(b)}.$$

Dies in setzt man in die obige Gleichung ein und führt wie zur ersten Herleitung der Euler-Lagrange-Differentialgleichung eine partielle Integration durch, es ergibt sich

$$0 = \int_a^b [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] v(x) dx + [F_{y'} + \frac{F}{r' - y^{*'}]} v |_{x=b} .$$

Hieraus folgt für ein  $v$  mit  $v(b) = 0$  zum einen die Euler-Lagrange-Differentialgleichung und aus dem zweiten Summanden auf der rechten Seite folgt mit

$$F_{y'} + \frac{F}{r' - y^{*'}} = 0 \quad \text{in} \quad x = b \quad (260)$$

die *Transversalitätsbedingung* zum Variationsproblem (258).

Einige wichtige Formeln

1.) Wichtige Ableitungen

Funktion	Ableitung	Bemerkung	Funktion	Ableitung	Bemerkung
$C$ (Konstante)	$0$		$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch x$	
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha$ reell	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sh x$	
$\ln x $	$\frac{1}{x}$		$\tanh x$	$\frac{1}{ch^2 x}$	
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\coth x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	
$e^x$	$e^x$		$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ x  < 1$
$a^x$	$a^x \ln a$	$a > 0$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ x  < 1$
$\sin x$	$\cos x$		$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x  < 1$
$\cos x$	$-\sin x$		$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$	$ x  > 1$
$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$	$\operatorname{arc} \cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\operatorname{arc} \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{arc} \cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

2.) Einige Substitutionen ( $R$  bezeichnet rationale Funktion,  $m, n, k$  natürliche Zahlen)

Integral	Substitution
$\int R(\sinh x, \cosh x, e^x) dx$	$t = e^x$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \tan \frac{x}{2} \quad (dx = \frac{2}{1+t^2} dt)$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$	$t = \tan x$
$\int R(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$
$\int R(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx$	$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0 \quad t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sin t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + (x + \beta)^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \sinh t$
$\int R(x, \sqrt{(x + \beta)^2 - \alpha^2}) dx$	$\alpha > 0, x + \beta = \alpha \cosh t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}) dx$	$\alpha > 0, t = \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} + x\sqrt{\alpha}$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[r]{x}, (r \text{ kgV der Nenner von } m \text{ und } n)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\alpha + \beta x^n} \quad (q \text{ Nenner von } k)$
$\int x^m (\alpha + \beta x^n)^k dx$	$\frac{m+1}{n} + k \in \mathbb{Z}, t = \sqrt[q]{\frac{\alpha + \beta x^n}{x^n}} \quad (q \text{ Nenner von } k)$

3.) Einige unbestimmte Integrale

Integral	eine Stammfunktion
$\int \sin^n(\alpha x) dx$	$= -\frac{\sin^{n-1}(\alpha x) \cos(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \cos^n(\alpha x) dx$	$= \frac{\cos^{n-1}(\alpha x) \sin(\alpha x)}{n\alpha} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(\alpha x) dx \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx$	$= \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctan}\left(\frac{x+b}{\sqrt{D}}\right), \quad D = c - b^2 > 0$
$\int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{x+b}{2(n-1)D(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)D} \int \frac{1}{(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} dx \quad , n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\int \frac{(x+\beta)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$	$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2\beta-2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n} dx$

4.) Identitäten für trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \cos x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2} & \tan x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - (\tan \frac{x}{2})^2} & \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - (\tan \frac{x}{2})^2}{2 \tan \frac{x}{2}} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

5.) Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu \quad , \quad \binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

## Index

- $\nabla$ -Operator 42
- 1. Hauptsatz für Kurvenintegrale 53
- Abbildung 8
- Abstand 5
- Arbeitsintegral 51
- Banachraum 148
- Besselsche Ungleichung 109
- Betrag 5
- Binormalenvektor 11
- Bogenlänge, Bogenelement 10
- Divergenz eines Vektorfeldes 41
- Divergenz, Ergiebigkeit 96
- Doppelintegral über Normalbereiche 65
- Doppelintegral über Rechteckbereiche 65
- Dreibein, begleitendes 11
- Dreifachintegral über Normalbereiche 89
- Dreifachintegral über Rechteckbereiche 89
- ebene Normalbereiche 64
- erste Variation eines Funktionals 157
- Euler-Lagrange Differentialgleichung 156
- Extremalstellen 30
- Faltungsprodukt, periodisches 115
- Fluß (eines Vektorfeldes) 78
- Flächen im  $\mathbb{R}^3$  71
- Flächeninhaltsformel 68
- Flächeninhalt 60
- Folge, Grenzwert einer 7
- Folge 7
- Fourier-Koeffizienten, komplexe Schreibweise 115
- Fourier-Koeffizienten 106
- Fourieranalyse, diskrete 120
- Fourieranalyse 106
- Frechet-Differenzierbarkeit 151
- Funktion, periodische 105
- Funktional 153
- Funktion 8
- Gateaux-Ableitung 157
- Gebiet, einfach zusammenhängend 55
- Gradientenfeld 46
- Gradient 41
- Hauptnormalenvektor 11
- Hesse-Matrix 19
- hinreichende Extremal-Bedingung 30ff
- Häufungspunkt einer Menge 6
- innerer Punkt 6
- Jacobi-Matrix 18
- Jordan-Inhalt 60, 84
- Kettenregel 20
- Kontinuitätsgleichung 102
- Konvergenz einer Fourierreihe, gleichmäßig 108
- Konvergenz einer Fourierreihe, punktweise 107
- Koordinatentransformation 69, 91
- Korrektheit von Problemen 103
- Kriterium für Potentialfelder 55
- Krümmungsvektor 12
- Krümmung 12
- Kurvenintegral, skalares 48
- Kurvenintegral, vektorielles 51
- Kurve 8
- Lagrange-Funktion 34
- Lagrange-Multiplikatoren 33
- Laplace-Operator 41
- lineare Approximation 22
- lineare Mannigfaltigkeit 154
- lineares Ausgleichsproblem 36
- logarithmisch-lineares Ausgleichsproblem 37
- Maxwellsche Gleichungen 102
- Menge, abgeschlossene 6
- Menge, offene 6
- Methode der kleinsten Quadrate 36
- natürliche Randbedingung 162
- Newton-Verfahren im  $\mathbb{R}^n$  38
- Norm 147
- notwendige Extremal-Bedingung 30
- Nullmenge 60, 84
- Oberflächenintegral einer Funktion 76
- Oberflächenintegral 75
- Operator 40
- Orientierung einer Kurve 66
- Parametrisierung eines Flächenstücks 71
- Parsevalsche Gleichung 116
- partielle Ableitung 15
- partielle Differenzierbarkeit 16
- Potentialfeld 46
- Potential 53
- Randpunkt einer Menge 6
- Raum, normierter 147
- Reihe, trigonometrische 105
- Richtungsableitung 21
- Riemannsches Zwischensumme 63, 86
- Riemannsches Doppelintegral 63
- Riemannsches Dreifachintegral 87



Rotation eines Vektorfeldes 41  
räumliche Normalbereiche 88  
Satz von Gauss 96  
Satz von Green 67  
Satz von Schwarz 17  
Satz von Stokes 82  
Satz über implizite Funktionen 28ff  
schwingende Saite 116  
Skalarfeld 8  
Stammfunktion eines Gradientenfeldes 53  
Stetigkeit von Abbildungen 14  
Tangentenebene 22  
Tangentenvektor einer Kurve 10  
Taylorformel im  $\mathbb{R}^n$  26  
Taylorpolynom  $p$ -ten Grades 26  
Taylorpolynom 2. Grades 27  
Torsionsvektor 12  
Torsion 12  
totales Differential 23  
Transformationssatz für Doppelintegrale 71  
Transformationssatz für Dreifachintegrale 92  
Transversalitätsbedingung 164  
Umgebung, abgeschlossene 6  
Umgebung, offene 6  
Variation einer Funktion 157  
Variationsproblem 154  
Vektorfeld 8  
Volumen 84  
Wegunabhängigkeit 54  
Wirbelstärke 81  
Wärmeleitungsgleichung 102  
Zirkulation 79  
zweite Variation eines Funktional 157

## Literatur

- [1] Meyberg, Vachenauer  
*Höhere Mathematik* in 2 Bänden,  
Springer-Verlag
- [2] Burg, Haf, Wille  
*Höhere Mathematik für Ingenieure* in 5 Bänden,  
Teubner-Verlag Stuttgart
- [3] Vorlesungen zur Höheren Mathematik für Ingenieure am Fachbereich Mathematik der TU  
Berlin von H. Bausch, K. Kutzler, B. Herz und D. Krüger
- [4] Jeffrey  
*Mathematik für Ing. und Naturwissenschaftler* in 2 Bänden,  
Verlag Chemie
- [5] Bronstein, Semendjajew  
*Taschenbuch der Mathematik*,  
Teubner-Verlag
- [6] Wüst  
*Höhere Mathematik für Physiker* in 2 Bänden,  
Verlag W. de Gruyter
- [7] Merziger, Wirth  
*Repetitorium der Höheren Mathematik*,  
Binomi-Verlag
- [8] Smirnow  
*Lehrbuch der höherem Mathematik* in 5 Bänden,  
Deutscher Verlag der Wissenschaften