

Universität Duisburg-Essen

Lehrstuhl für Mechanik und  
Robotik

Technische Mechanik I

# **Skriptum**

Prof. Dr. Andrés Kecskeméthy



# Vorwort

Das vorliegende Skriptum deckt die wichtigsten Informationen zur Vorlesung „Technische Mechanik I“ stichwortartig ab. Dadurch soll es den Studierenden leichter gemacht werden, die Vorlesung zu verfolgen und gegebenenfalls fehlende Vorlesungsstunden nachzuholen.

Gerade den Anfängern möchte ich jedoch raten, begleitend zu den Vorlesungen unbedingt eigene Aufzeichnungen zu führen. Die Erfahrung zeigt immer wieder, daß durch ein aufmerksames und mitdenkendes Mitschreiben bereits ein Großteil des Lernaufwandes erbracht wird. Insbesondere läuft man dabei keine Gefahr, die vielen unscheinbaren, aber doch so oft entscheidenden Details des Lösungsweges zu übersehen.

Ferner möchte ich den Studierenden empfehlen, Gebrauch von den angebotenen Tutorien und Tests zu machen. Ein Gelingen des Lernprozesses hängt gerade in der Mechanik besonders vom *Verständnis* des Stoffes ab. Das effizienteste Lernen ist daher jenes, welches sich auf die Beherrschung der Grundprinzipien und deren Umsetzung auf technische Probleme richtet, und nicht auf die stereotype Anwendung von vorgefertigten Lösungsmustern auf ähnlich aussehende Beispiele. Dieses Verständnis läßt sich nur durch kontinuierliches Mitlernen und nicht durch stoßartiges „Durchpauken“ von Prüfungsbeispielsammlungen kurz vor der Prüfung erzielen.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen ehemaligen Mitarbeitern Klaus Six, Gerald Grabner, Wolfgang Ackerl sowie Daniel Strobach für die Mitwirkung bei der Erstellung dieses Skriptums.

Ich wünsche Ihnen, liebe Studierende, lieber Studierender, viel Erfolg beim Studium der Mechanik und der weiteren Lehrveranstaltungen Ihres Studienganges.

Duisburg, im Oktober 2008 A. Kecskeméthy



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundzüge der Vektorrechnung</b>	<b>3</b>
1.1 Grundarten von Vektoren in der Mechanik . . . . .	3
1.2 Grundoperationen für (freie) Vektoren (geometrisch) . . . . .	4
1.3 Koordinatendarstellung (für praktische Berechnung) . . . . .	5
1.4 Rechenregeln (algebraisch) . . . . .	6
1.5 Moment eines gebundenen Vektors, linienflüchtige Vektoren .	10
1.6 Vektorwinder, Vektorschraube . . . . .	11
<b>2 Grundlagen der Statik</b>	<b>13</b>
2.1 Begriff der Kraft . . . . .	13
2.2 Axiome der Statik . . . . .	14
2.3 Dimension und Einheit der Kraft . . . . .	17
2.4 Zeichnerische Darstellung von Kräften . . . . .	19
<b>3 Gleichgewicht</b>	<b>20</b>
3.1 Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	20
3.2 Lagerreaktionen und -wertigkeiten . . . . .	22
3.3 Systemfreiheitsgrade und statische Bestimmtheit . . . . .	24
3.4 Allgemeines Vorgehen zur Lösung von Gleichgewichtsproblemen . . . . .	26
3.5 Reduktionsmöglichkeiten für Kraftsysteme . . . . .	29
3.5.1 Reduktion mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt = zentrales Kräftesystem . . . . .	29
3.5.2 Zwei Kräfte am starren Körper, Reduktionsergebnis, Kräftepaar . . . . .	30
3.5.3 Moment einer Einzelkraft . . . . .	33
3.5.4 Gleichgewichtsbedingungen bei drei Kräften . . . . .	34
3.5.5 Gleichgewichtsbedingungen bei vier Kräften (CUL- MANNsche Methode) . . . . .	35
3.5.6 Gleichgewichtsbedingungen bei mehr als vier Kräften - Die Seileckmethode . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Fachwerke</b>	<b>37</b>
4.1	Statische Bestimmtheit . . . . .	38
4.2	Ermittlung der Stabkräfte . . . . .	40
4.2.1	Knotenpunktverfahren . . . . .	40
4.2.2	Nullstäbe . . . . .	43
4.2.3	Einfache Fachwerke . . . . .	43
4.2.4	Ritterscher Schnitt . . . . .	45
4.2.5	Cremona-Plan . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Reibung</b>	<b>47</b>
5.1	Haftungskegel, Haftungswinkel . . . . .	51
5.2	Schraubenverbindungen . . . . .	52
5.3	Seilreibung . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Verteilte Kräfte, Schwerpunkt, Massenmittelpunkt</b>	<b>57</b>
6.1	Schwerpunkt einer Gruppe von parallelen Kräften . . . . .	57
6.2	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers . . . . .	60
6.3	Grundregeln für die Berechnung von Massenmittelpunkten und Schwerpunkten . . . . .	62
6.3.1	Zusammensetzung von Teilkörpern zu Gesamtkörpern	62
6.3.2	Berücksichtigung von „Löchern“ bzw. ausgestanzten Teilen . . . . .	63
6.3.3	Symmetrieachsen bzw. Ebenen . . . . .	63
6.4	Flächenschwerpunkt . . . . .	64
6.5	Linien­schwerpunkt . . . . .	66
6.6	Formeln von Pappus und Guldin . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Balkenstatik</b>	<b>69</b>
7.1	Schnittreaktionen beim geraden, ebenen Balken . . . . .	71
7.2	Schnittgrößenverlauf bei Einzellasten . . . . .	72
7.3	Schnittgrößenverlauf bei kontinuierlichen Lasten . . . . .	75
7.4	Schnittgrößenverlauf bei Mehrfeldbelastung . . . . .	76
7.5	Föppl- bzw. Unstetigkeitssymbole . . . . .	84
7.6	Schnittgrößen bei Rahmen und Bögen (Zusatz Balkenstatik) .	86

<b>8</b>	<b>Balkenbiegung</b>	<b>89</b>
8.1	Spannungen . . . . .	90
8.2	Spannung-/Dehnungsbeziehungen . . . . .	92
8.3	Zug/Druck-Stäbe . . . . .	93
8.4	Technische Biegelehre . . . . .	97
8.4.1	Belastungen durch ein reines Moment . . . . .	97
8.4.2	Biegelinie bei geraden Balken . . . . .	102



## Einleitung

„Mechanik“  $\equiv$  μηχανική τέχνη

Aussprache: mēchanikē teknē [die Kunst, Maschinen zu bauen]

Lehre von den Kräften und ihren Wirkungen (Bewegungen, Verformungen) auf starre und verformbare Körper.

Die Geburt der Mechanik als Wissenschaftszweig wird willkürlich auf das Jahr 1638, in dem Galilei's „Discorsi“ veröffentlicht wurde, gelegt.

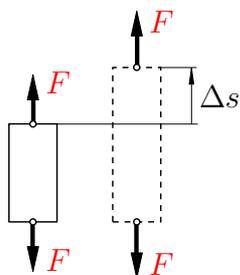
## Einteilung der Mechanik

- a) **nach physikalischen Vorgängen** [Definition nach Kirchhoff (1826–1908)]
- 1) **Kinematik:** Lehre von den reinen Bewegungen ohne Berücksichtigung von Kräften („Geometrie der Bewegungen“)
  - 2) **Dynamik:** Lehre von den Kräften [Dynamik - griech.: Kraft]
    - a) **Statik:** Lehre von den Kräften und dem Gleichgewicht von *ruhenden* Systemen
    - b) **Kinetik** (oft auch  $\equiv$  Dynamik): Lehre von den Kräften und den Wechselwirkungen mit den Bewegungen

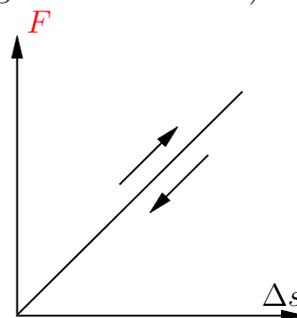
Diese Vorlesung beschäftigt sich mit 2a) Statik.

Weitere Möglichkeiten der Einteilung:

- b) **nach der Natur der Körper**
- 1) **Stereomechanik:** [griech.: stereos = „fest, starr“]  
Idealisierung der Körper als **starre Körper**
  - 2) **Kontinuumsmechanik**
    - a) **Elastomechanik**  
elastische Körper (Verformungen sind reversibel)



Keine bleibenden Verformungen

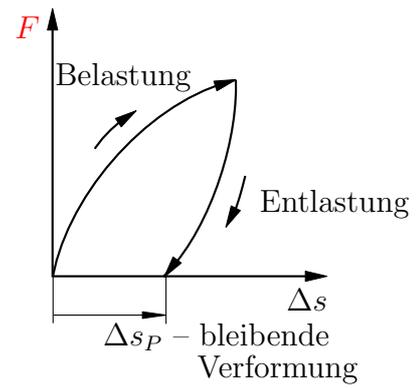


Beim Belasten und Entlasten wird die selbe Trajektorie durchlaufen.

Raum für Notizen

**b) Plasto-Mechanik**

plastische Körper ( es  
treten bleibende Ver-  
formungen auf)

**c) Fluid-Dynamik**

flüssige und gasförmige Körper

**In dieser Vorlesung wird Punkt 1) Stereomechanik behandelt.**

# 1 Grundzüge der Vektorrechnung

- **Skalar:** Durch eine **Maßzahl** festgelegte Größe.  
Beispiel: Zeit, Masse, Länge
- **Vektor:** Durch **Maßzahl** (Größe), **Richtung** und **Richtungssinn** festgelegte Größe.  
Beispiel: Kraft, Geschwindigkeit, Impuls

**Anschaulich:** gerichtete Strecke im Raum

Betrag (Maßzahl) [dimensionsbehaftet]  
(Intensität)

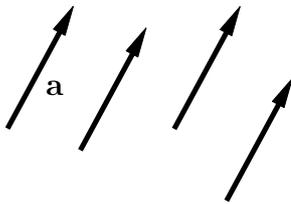


$$|\mathbf{a}| = a$$

Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  mit  $|\mathbf{e}| = 1$

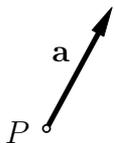
## 1.1 Grundarten von Vektoren in der Mechanik

### a) freie Vektoren



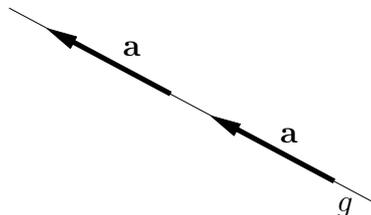
können im Raum frei verschoben werden

### b) gebundene Vektoren



sind (nur) bezogen auf jeweils einen Angriffspunkt definiert

### c) linienflüchtige Vektoren

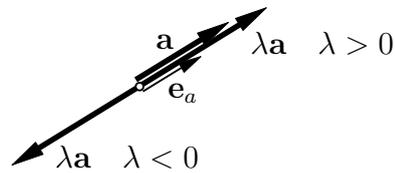


können (nur) entlang **einer Geraden**  $g$  verschoben werden

Raum für Notizen

1.2 Grundoperationen für (freie) Vektoren (geometrisch)

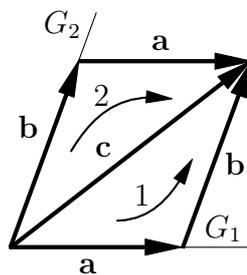
a) Multiplikation mit einem Skalar



Speziell  $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a$   
 bzw.  $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

$\mathbf{e}_a \dots$  Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{a}$

b) Addition



(Parallelogrammregel)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

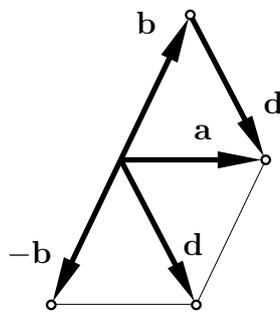
(Kommutativität)

$$\underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{b}}_1 = \underbrace{\mathbf{b} + \mathbf{a}}_2$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sind die **Komponenten** von  $\mathbf{c}$  in Richtung der Geraden  $G_1, G_2$ .

**Beachte:** Die Zerlegung von  $\mathbf{c}$  in die Richtungen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist *eindeutig* für  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ .

Subtraktion



$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$$

c) Nullvektor

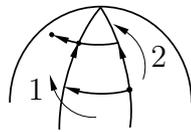
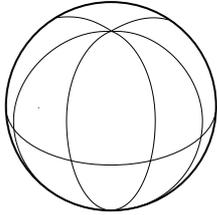
$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad |\mathbf{0}| = 0$$

**Bemerkung:** Ein System von Objekten, für die die Regeln a), b) und c) definiert sind, wird (linearer) Vektorraum genannt.

Beispiel:

- a) Die 2-Tupel  $\begin{bmatrix} \text{Weg} \\ \text{Zeit} \end{bmatrix}$  bilden einen Vektorraum.

b) Die 2-Tupel  $\begin{bmatrix} \text{km West} \\ \text{km Nord} \end{bmatrix}$  bilden **keinen** Vektorraum.



Weg 1: erst 1km West  
dann 1 km Nord  
Weg 2: erst 1km Nord  
dann 1 km West  
 $\Rightarrow$  Weg 1  $\neq$  Weg 2!

„Addition“ ist nicht kommutativ!

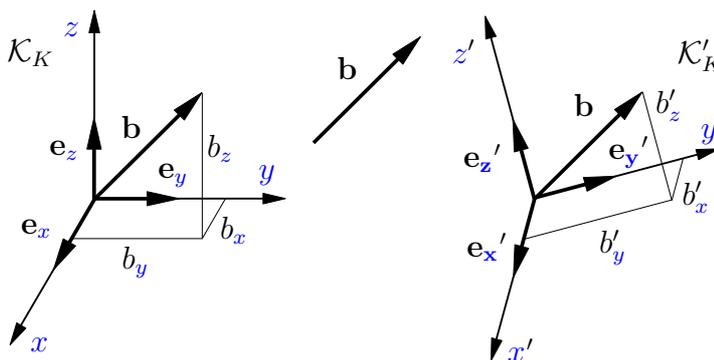
### 1.3 Koordinatendarstellung (für praktische Berechnung)

Aus der Zerlegung eines Vektors in Richtung der drei Achsen eines rechtshändigen orthogonalen Koordinatensystems folgen dessen kartesische Koordinaten.

**Satz:** Jeder physikalische Vektor im dreidimensionalen Raum lässt sich durch Angabe seiner drei kartesischen Koordinaten eindeutig festlegen.

**Beachte:** Zwei Komponentendarstellungen eines gleichen Vektors ergeben unterschiedliche Werte bezüglich unterschiedlicher Koordinatensysteme.

$\Rightarrow$  Immer ein gemeinsames Koordinatensystem für alle Vektoren verwenden!!



Zerlegung in  $\mathcal{K}_K$ :

$$\mathbf{b} = \underbrace{b_x \mathbf{e}_x}_{\mathbf{b}_x} + \underbrace{b_y \mathbf{e}_y}_{\mathbf{b}_y} + \underbrace{b_z \mathbf{e}_z}_{\mathbf{b}_z}$$

Zerlegung in einem zweiten Koordinatensystem  $\mathcal{K}'_K$ :

$$\mathbf{b} = \underbrace{b'_x \mathbf{e}'_x}_{\mathbf{b}'_x} + \underbrace{b'_y \mathbf{e}'_y}_{\mathbf{b}'_y} + \underbrace{b'_z \mathbf{e}'_z}_{\mathbf{b}'_z}$$

$x, y, z$  - kartesisches Koordinatensystem  
 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  - orthonormiertes Rechtssystem

Raum für Notizen

Auch

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ &= \sum b_i\mathbf{e}_i \\ &= b_i\mathbf{e}_i\end{aligned}$$

[Einsteinsche Summenkonvention]

 $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z$ : Komponenten von  $\mathbf{b}$  in  $\mathcal{K}_K$  $b_x, b_y, b_z$ : Koordinaten (skalare Komponenten) von  $\mathbf{b}$  in  $\mathcal{K}_K$ 

Schreibweise für Koordinatendarstellungen (Komponentendarstellungen)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}: \quad \text{Koordinaten (oft auch „Komponenten“ genannt) von } \mathbf{b} \\ \text{bezüglich } \mathcal{K}_K (\Rightarrow \text{Matrix})$$

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} b_x' \\ b_y' \\ b_z' \end{bmatrix}: \quad \text{Koordinaten } (\cong \text{Komponenten}) \text{ von } \mathbf{b} \text{ bezüglich } \mathcal{K}'_K$$

**Bemerkung:** Es gilt allgemein der Satz, dass alle n-dimensionalen Vektorräume „isomorph“ dem  $\mathbf{R}^n$  sind. $\Rightarrow$  Komponentendarstellungen sind bei einem *festgehaltenen* Koordinatensystem äquivalent den physikalischen Vektoren.

## 1.4 Rechenregeln (algebraisch)

### a) Multiplikation mit einem Skalar

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$$

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{bmatrix}$$

### b) Addition

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$$

**Beachte:** Gleichheit von Vektoren liefert **drei** skalare Gleichungen!!

Beispiel:

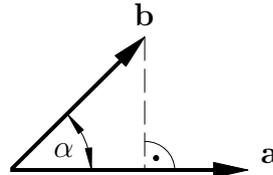
$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{array} \right\} 3 \text{ Gleichungen}$$

### c) Skalarprodukt

**Definition:**

$$S = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$$



**In Komponenten:**

$$\begin{aligned} S &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z)(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \\ &= a_x b_x \underbrace{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y}_{=0} + a_x b_z \underbrace{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z}_{=0} \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x + a_y b_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y + a_y b_z \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x + a_z b_y \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y + a_z b_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \\ &\Rightarrow \boxed{S = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \end{aligned}$$

[Skalarprodukt in Komponentendarstellung]

**Matrixschreibweise:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \quad T \dots \text{transponiert}$$

**Anwendungen:**

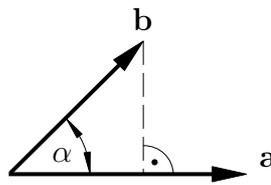
**Betragsbildung**

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{Pythagoräischer Lehrsatz}$$

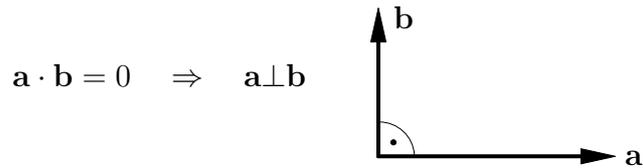
Raum für Notizen

**Winkel zwischen zwei Vektoren**

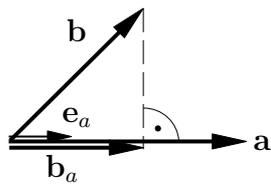


$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \\ &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \end{aligned}$$

**Beachte:** Für orthogonale Vektoren gilt:



**Projektion** Bestimmung der Komponente von **b** in Richtung **a**



$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a &= |\mathbf{b}_a| \mathbf{e}_a \\ &= \underbrace{|\mathbf{b}| \cos \alpha}_{|\mathbf{b}_a|} \underbrace{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}}_{\mathbf{e}_a} !! \\ &= \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \end{aligned}$$

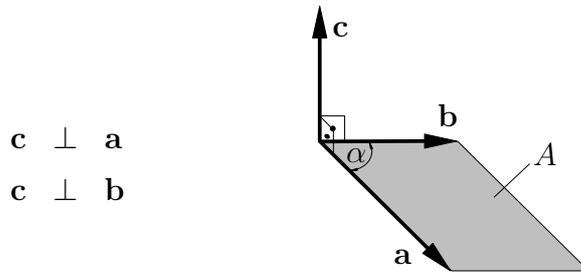
$$\Rightarrow \mathbf{b}_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

d) **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt)

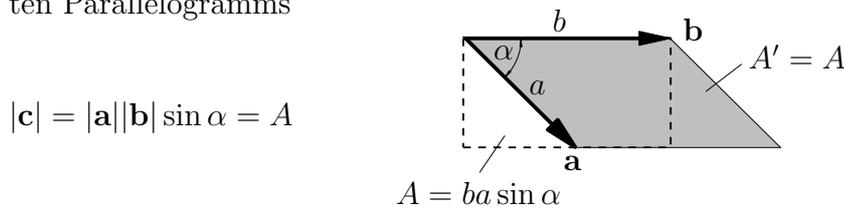
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Das Vektorprodukt von 2 Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ergibt wieder einen Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Er ist orthogonal zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$



- 2) Sein Betrag entspricht der Fläche  $A$  des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms



- 3) Es gilt die **Rechtsschraubenregel**

**In kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x \\ &= \sum [\dots] - \sum [\dots] \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x \\ &+ (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Raum für Notizen

**Matrixschreibweise**

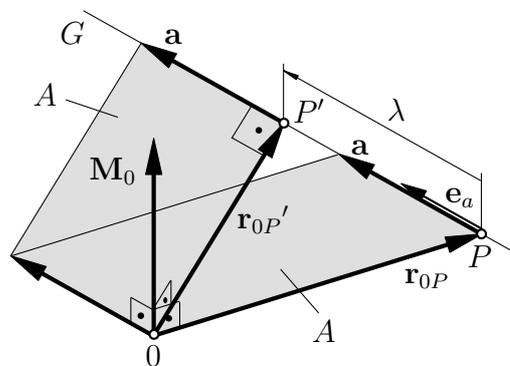
$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}$      $\tilde{\mathbf{a}}$ ... schiefsymmetrische Matrix

$\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{a}}^T$

**Bemerkung:** Im folgenden wird zwischen „physikalischen Vektoren“ und Komponentendarstellungen  $\mathbf{a}$  nicht mehr unterschieden.

**1.5 Moment eines gebundenen Vektors, linienflüchtige Vektoren**



Für einen *gebundenen Vektor*  $\mathbf{a}$  mit *Angriffspunkt*  $P$  läßt sich das *Moment*  $\mathbf{M}_0$  bezüglich eines Aufpunktes  $\mathbf{O}$  wie folgt definieren:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_{0P} \times \mathbf{a}$$

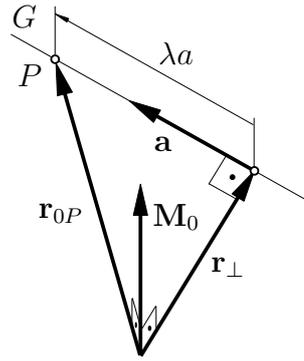
[Durch  $\mathbf{a}$  bezüglich  $\mathbf{O}$  erzeugtes Moment  $\mathbf{M}_0$ ]

Aus der Definition des Kreuzproduktes folgt, daß das Moment  $\mathbf{M}_0$  bei Verschiebung des Angriffspunktes von  $\mathbf{a}$  entlang einer durch  $P$  und parallel zu  $\mathbf{a}$  verlaufenden Geraden  $G$  gleich bleibt. Für einen Angriffspunkt  $P'$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0' &= \mathbf{r}_{0P'} \times \mathbf{a} = (\mathbf{r}_{0P} + \lambda \mathbf{e}_a) \times \mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{r}_{0P} \times \mathbf{a}}_{= \mathbf{M}_0} + \underbrace{\lambda \mathbf{e}_a \times \mathbf{a}}_{= 0, \text{ da } \mathbf{e}_a \parallel \mathbf{a}} \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_0' = \mathbf{M}_0$                       gleiches Moment für alle Angriffspunkte entlang  $G$ ! (Flächen  $A$  und  $A'$  sind gleich!)

Das Paar  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{a})$  mit  $\mathbf{M}_0 \perp \mathbf{a}$  definiert einen linienflüchtigen Vektor mit Wirkungslinie  $G$ .



Ist  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{a})$  mit  $\mathbf{M}_0 \perp \mathbf{a}$  gegeben, so kann die Lage von  $G$  wie folgt ermittelt werden:

- 1) Zerlege  $\mathbf{r}_{0P}$  in Anteile  $\parallel$  und  $\perp$  zu  $G$ :

$$\mathbf{r}_{0P} = \mathbf{r}_\perp + \lambda \mathbf{a} \quad \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{a} = 0$$

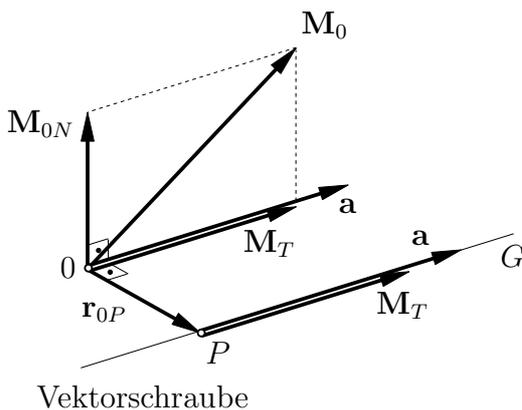
- 2) Bilde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{r}_{0P} \times \mathbf{a} = (\mathbf{r}_\perp + \lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times : \quad \mathbf{a} \times \mathbf{M}_0 &= \mathbf{a} \times (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}_\perp \underbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}_{= a^2} - \mathbf{a} \underbrace{(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{a})}_{= 0} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{r}_\perp &= \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_0}{a^2} \end{aligned}$$

### 1.6 Vektorwinder, Vektorschraube

Ist  $\mathbf{M}_0$  senkrecht auf  $\mathbf{a}$ , so läßt sich wie in 1.5 aus  $\mathbf{M}_0$  und  $\mathbf{a}$  ein linienflüchtiger Vektor konstruieren.

Steht  $\mathbf{M}_0$  *nicht* senkrecht auf  $\mathbf{a}$ , (was im allgemeinen der Fall ist,) so bezeichnet man das Paar  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{a})$  als einen Vektorwinder. In diesem Fall läßt sich  $\mathbf{M}_0$  in eine Komponente  $\mathbf{M}_T$  parallel zu  $\mathbf{a}$  und einer Komponente  $\mathbf{M}_{0N}$  senkrecht dazu (vgl. Anwendungen zu 1.4 d) zerlegen.



Den senkrechten Anteil kann man als Moment eines im Abstand

$$\mathbf{r}_{0P} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_{0N}}{a^2} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_0}{a^2}$$

verlaufenden linienflüchtigen Vektors  $\mathbf{a}$  mit Wirkungslinie  $G$  auffassen.

Raum für Notizen

Der parallele Anteil  $\mathbf{M}_T$  bleibt von der Wahl des Angriffs- oder Aufpunktes unberührt.  $\mathbf{M}_T$  ist damit ein **freier Vektor**.

Man erhält ein äquivalentes System zu einem allgemeinen Vektorwinder  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{a})$  einen linienflüchtigen Vektor  $\mathbf{a}$  mit Wirkungslinie  $G$  und einem Moment  $\mathbf{M}_T$  parallel zu  $\mathbf{a}$ .

Das Paar  $(\mathbf{M}_T, \mathbf{a})$  mit Wirkungslinie  $G$  bezeichnet man als **Vektorschraube**.

Führt man noch die „Steigung“

$$h = \frac{|\mathbf{M}_T|}{|\mathbf{a}|} \text{sign}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}_T) \quad \text{ein,}$$

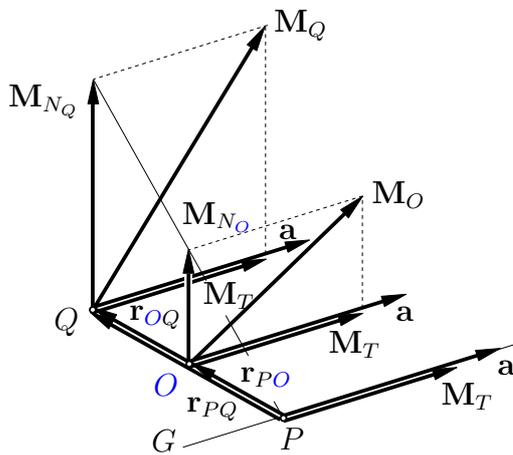
so läßt sich die Vektorschraube durch Angabe von

Wirkungslinie $G$	(2 Richtung + 2 Lage)	4 Größen
„Intensität“ $a$		1 Größe
Steigung $h$		1 Größe
$\Sigma$		6 Größen

angeben.

**Rechenregeln für Vektorwinder**

a) **Wechsel des Bezugspunktes**



Bei einem Wechsel des Bezugspunktes verändert sich das Moment. Mit

$$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_{P0} + \mathbf{r}_{0Q}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \mathbf{M}_T + (-\mathbf{r}_{PQ}) \times \mathbf{a} \\ &= \mathbf{M}_T - \mathbf{r}_{P0} \times \mathbf{a} - \mathbf{r}_{0Q} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{M}_Q &= \mathbf{M}_0 - \mathbf{r}_{0Q} \times \mathbf{a} \end{aligned}$$

b) **Addition von Vektorwindern:  $(\mathbf{M}_{0i}, \mathbf{a}_i)$**

Die Addition von Vektorwindern bezüglich eines gemeinsamen Aufpunktes ist definiert als Summe der entsprechenden Momente  $\mathbf{M}_{0i}$  und linienflüchtigen Vektoren  $\mathbf{a}_i$ :

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{M}_{0i}, \mathbf{a}_i) = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{0i}, \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \right)$$

## 2 Grundlagen der Statik

### 2.1 Begriff der Kraft

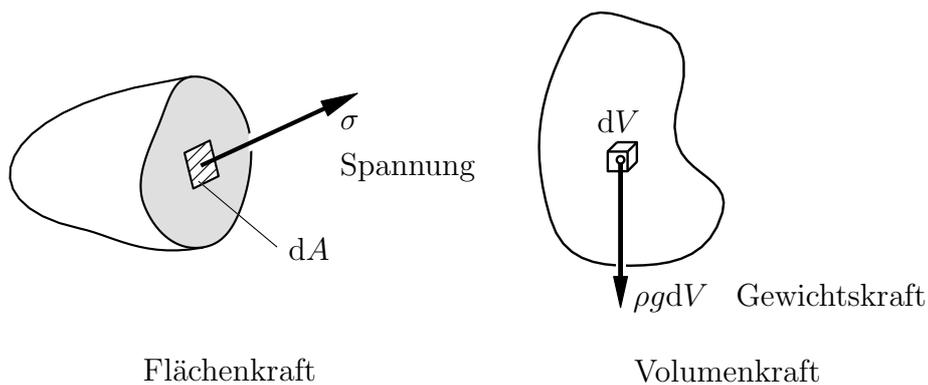
#### Erfahrungstatsachen:

- a) Kräfte können nicht unmittelbar, sondern nur auf dem Umwege ihrer Wirkungen beobachtet und gemessen werden.

<u>Wirkung</u>	<u>Beispiel</u>	<u>Maßeinheit</u>
Verformung	Federwaage	$1kp = \text{Gewichtskraft von } 1kg \text{ am Äquator}$
Beschleunigung	Kugelstoßen	$1N = 1kg \frac{m}{s^2}$

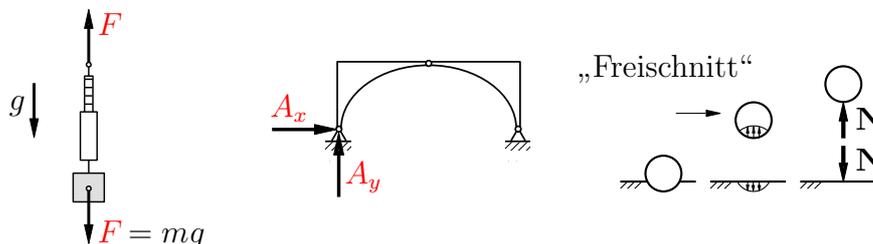
- b) Kräfte treten als Volumen- bzw. Flächenkräfte auf.

#### Beispiele:



Die resultierende Wirkung läßt sich jedoch in vielen Fällen als **Einzelkraft** deuten (Idealisierung).

#### Beispiele:



- c) Kräfte lassen sich als **gebundene Vektoren** auffassen. Eine Kraft wird demnach durch folgende Angaben gekennzeichnet:

- |                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| 1. Betrag (Intensität)        | } freier Vektor |
| 2. Richtung und Richtungssinn |                 |
| 3. Angriffspunkt              |                 |

## 2.2 Axiome der Statik

**Axiom** [griech. axioma „für recht halten“]:

Grundlegender Satz, der ohne Beweis einleuchtet, der nicht weiter bewiesen zu werden braucht (oder kann); Annahme als Grundlage eines wissenschaftlichen Systems.

**Prinzip** [lat. principium „Anfang, Ursprung, Grundlage“]:

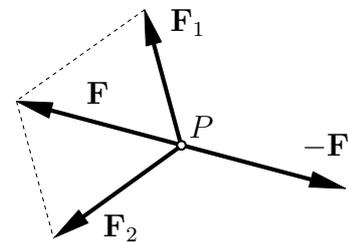
Grundsatz, Regel, Richtschnur

- I) **Parallelogrammaxiom** (Leonardo da Vinci 1452–1519, Simon Stevin 1548–1620)

Zwei Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$ , die am gleichen Punkt  $P$  angreifen, sind ihrer Summe

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$$

äquivalent.



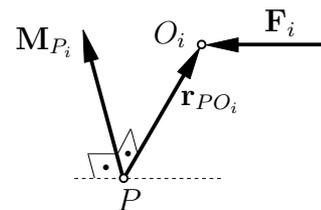
- II) **Trägheitsaxiom** (Beharrungsgesetz, Newton 1687)

Jeder Körper, auf den keine Kräfte einwirken, verharrt im Ruhezustand bzw. im Zustand der geradlinigen Bewegung. (bereits von Galilei 1638 formuliert)

- III) **Äquivalenzprinzip**

Zwei Kraftsysteme sind äquivalent, wenn sie bezüglich eines beliebig gewählten Aufpunktes das gleiche Moment erzeugen.

$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{P_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{PO_i} \times \mathbf{F}_i$$

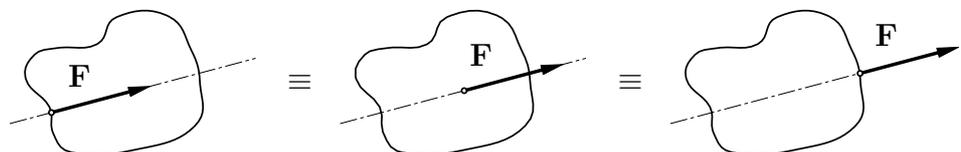


erzeugen.

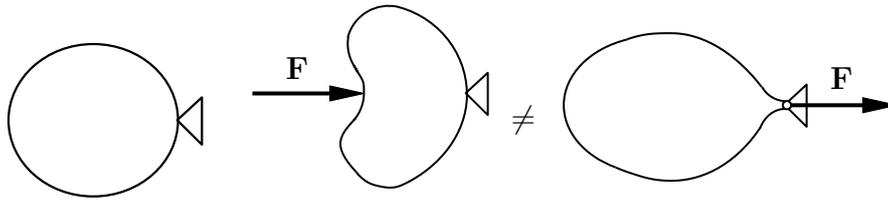
- IV) **Verschiebbarkeit von Kräften am starren Körper**

Am starren Körper bzw. an „erstarrten“ Systemen (s.u.) bleibt die Wirkung einer Kraft bei Verschiebung entlang ihrer Wirkungslinie erhalten.

starre Körper – alle drei Belastungen äquivalent



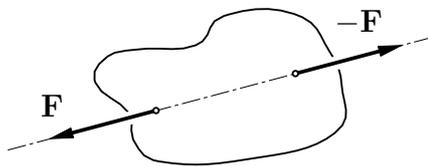
**Bemerkung:** Bei verformbaren Körpern ist i.a. auch der Angriffspunkt von Bedeutung!



V) **Gleichgewichtsaxiom**

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist und das an ihm angreifende Kräftesystem einer Nullkraft äquivalent ist.

**Beispiel:**

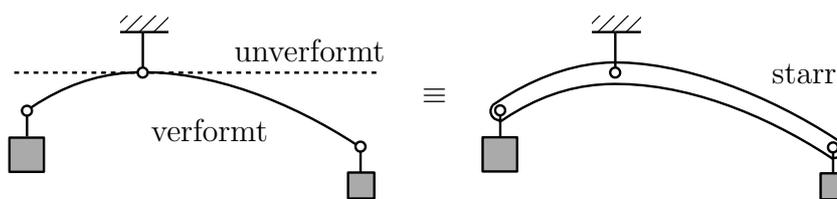


Zwei entlang der selben Wirkungslinie  $G$  angreifende, entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kräfte  $\mathbf{F}$  und  $-\mathbf{F}$  sind einer Nullkraft äquivalent.

VI) **Erstarrungsprinzip**

Ein im Gleichgewicht befindliches mechanisches System bleibt im Gleichgewicht, wenn beliebige Teilsysteme durch entsprechend geformte starre Teilsysteme ersetzt werden.

**Beispiel:**



VII) **Schnittprinzip**

In einem sich im Gleichgewicht befindenden mechanischen System befindet sich auch jedes „herausgeschnittene“ Teilsystem im Gleichgewicht.

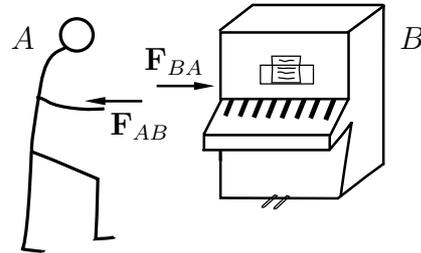
**Beachte:** Beim „Herausschneiden“ oder „Freischneiden“ eines Teilsystems sind dabei neben den angreifenden „eingepprägten“ Kräften auch die **Schnittkräfte** zu berücksichtigen.

Raum für Notizen

VIII) **Gegenwirkungsprinzip**

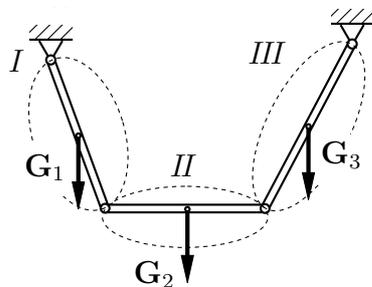
(actio = reactio, lex tertia von Newton, 1687)

Übt ein Körper  $A$  auf einen Körper  $B$  eine Kraft  $\mathbf{F}_{BA}$  aus, so übt der Körper  $B$  eine gleichgroße und entgegengesetzte Kraft  $\mathbf{F}_{AB}$  auf Körper  $A$  aus.



$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

**Beispiel: Körperkette**



Freischnitt

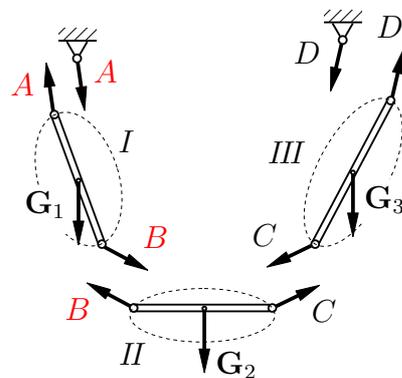
⇒

3 Teilsysteme

≡ Körper

$G_1, G_2, G_3$ : Gewichtskräfte (→ eingeprägte Kräfte)

**Freischnitt:**



jedes der Teilsysteme

$I$

$II$

$III$

ist im Gleichgewicht!

$A, B, C, D$ : Schnittkräfte treten aufgrund des Gegenwirkungsprinzipes immer **paarweise** auf.

Aufgrund des Schnittprinzipes sind die Teilsysteme  $I, II, III$  für sich genommen im Gleichgewicht!

Aufgrund des Schnittprinzips lassen sich Kräfte in folgende zwei Gruppen aufteilen:

- a) **eingeprägte Kräfte**, welche unabhängig vom Freischneiden auf das System einwirken.

**Beispiel:** Gewichtskräfte, Magnetkräfte, Luftwiderstandskräfte, Reibungskräfte, Federkräfte

**Merke:** Eingeprägte Kräfte leisten bzw. verbrauchen Arbeit!

- b) **Schnittkräfte**, welche beim Freischneiden des Systems in Teilsysteme entstehen.

**Merke:** Schnittkräfte leisten keine Arbeit. Schnittkräfte treten aufgrund von Bindungen (Lager, Stützen, Hängungen, Führungen) auf.

**Beachte:** Durch die Einführung von Schnittkräften kann die Statik eines zusammengesetzten mechanischen Systems auf die Statik entsprechender freier „Teilsysteme“ zurückgeführt werden.

## 2.3 Dimension und Einheit der Kraft

### Darstellung physikalischer Größen

Größe  $\equiv$  Maßzahl  $\times$  **Einheit** (muss im Ergebnis mit angegeben werden!)

**Beispiel:**

$$v = 3 \frac{m}{s}$$
$$m = 1kg$$

### Physikalische Grundgrößen der Mechanik

SI-System:

[Masse] = 1 kg [Kilogramm] („Masse des internationalen Kilogrammprototyps in Sevres in Paris“)

[Länge] = 1 m [Meter]

[Zeit] = 1 s [Sekunde]

restliche Größen werden durch physikalische Grundgesetze definiert.

Raum für Notizen

Für die **Kraft** gilt:

Die Änderung der Bewegungsgrößen (des Impulses = Masse  $\times$  Geschwindigkeit) ist gleich der Resultierenden der einwirkenden Kräfte, bzw.

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} .$$

$$F = ma \quad a \dots \text{Beschleunigung}$$

$$[\text{Kraft}] = 1 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{N}$$

(„Bewegungsaxiom“ von Newton)

### Einheit der Kraft im SI-System

1 Newton = 1 N = Kraft, die für die Beschleunigung von 1 kg auf  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  benötigt wird.

Weitere Einheit für Kraft [früher, TMS = Technisches Maßsystem]

$$1 \text{kp} = 1 \text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{N}$$

Kraft, welche von einem Körper der Masse 1 kg am Äquator als Gewichtskraft gemessen wird.

**Maßsysteme**

	MKS (SI)	TMS (alt)	fps
Länge	1 m	1 m	1 ft = 0,3038 m
Zeit	1 s	1 s	1 s
Masse	1 kg	1 TM = 1 kp $\frac{s^2}{m}$	1 lb = 0,453592 kg
Kraft	1 N = 1 kg $\frac{m}{s^2}$	1 kp = 9,80665 kg $\frac{m}{s^2}$	1 lbf = 4,44822 N

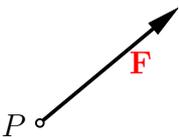
MKS (SI) Meter Kilogramm Sekunde (Standard International)

TMS (alt) Technisches Maßsystem

fps feet pound second

**2.4 Zeichnerische Darstellung von Kräften**

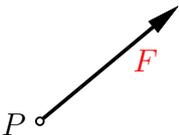
**allgemein:**



Pfeil und Symbol **F** kennzeichnen (unabhängig voneinander) Kraft nach Größe, Richtungssinn und Angriffspunkt.

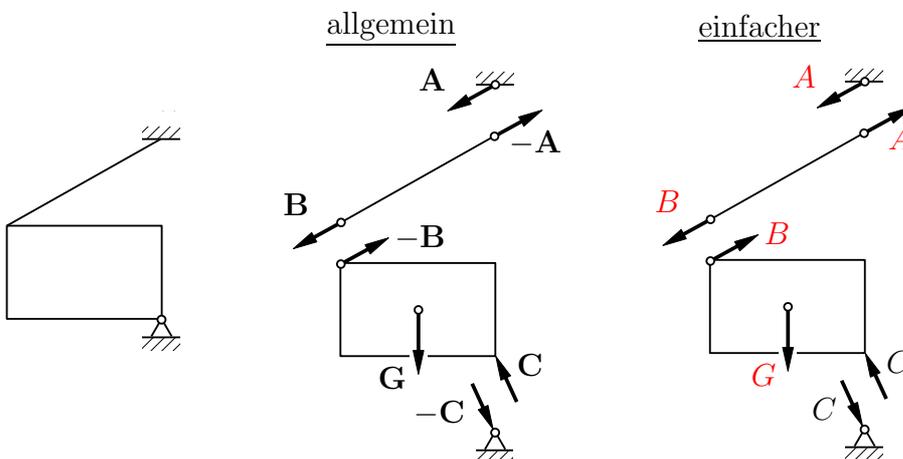
**vereinfachte Darstellung:** kein Vektorpfeil über **F**

**F** ist die Koordinate von **F** in Pfeilrichtung. Pfeil beschreibt Angriffspunkt und Richtung



Richtungssinn: **F** > 0 wie gezeichnet  
**F** < 0 entgegen gezeichneter Richtung

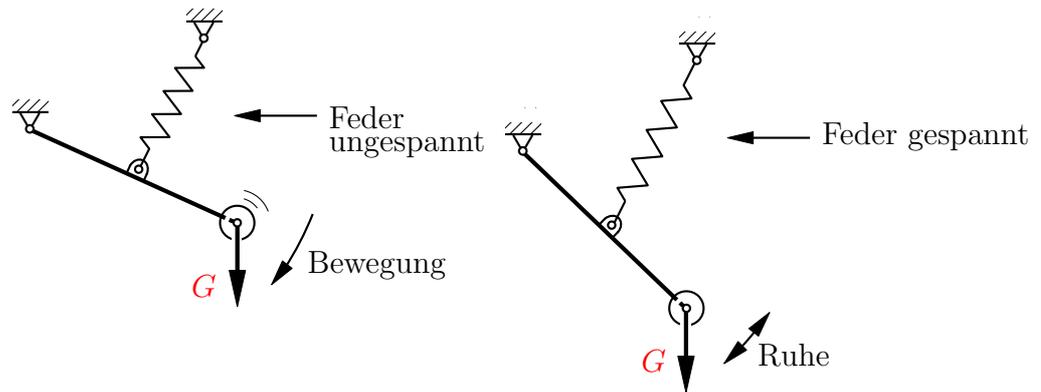
**Beispiel für Freischneiden:**



### 3 Gleichgewicht

Unter einer Gleichgewichtslage eines mechanischen Systems versteht man eine Konfiguration, bei der das System in Ruhe verharrt. Bei der Behandlung des Gleichgewichtes unterscheidet man zwei Teilprobleme:

- a) **Bestimmung der Konfiguration im Gleichgewicht**  
**Beispiel:**



- b) **Bestimmung der Kräfte in der Gleichgewichtskonfiguration**  
 Im allgemeinen (bei statisch nicht bestimmten Lagerungen) müssen beide Problemstellungen gleichzeitig gelöst werden. Im folgenden wird zunächst nur Teilproblem b) behandelt.

#### 3.1 Gleichgewichtsbedingungen

Aus dem Gleichgewichtsaxiom und dem Schnitt-, Äquivalenz- und Erstarungsprinzip folgen die Gleichgewichtsbedingungen:

Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn für jedes freigeschnittene Teilsystem die Summe der Kräfte und der Momente bezüglich eines beliebigen Aufpunktes verschwinden:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{0i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{0P_i} \times \mathbf{F}_i = 0 \tag{3.2}$$

bzw. in Komponenten

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \tag{3.4}$$

$$\tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (r_{yi} F_{zi} - r_{zi} F_{yi}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (r_{zi} F_{xi} - r_{xi} F_{zi}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (r_{xi} F_{yi} - r_{yi} F_{xi}) = 0 \quad (3.9)$$

Für ein allgemeines System erhält man somit **6 Gleichungen** für jedes freigeschnittene System.

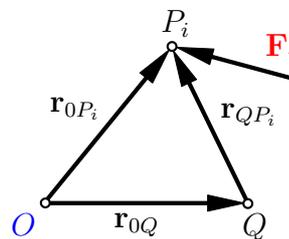
Ist das System **eben**, so läßt sich willkürlich die  $xy$ -Ebene in die Systemebene legen, und es folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0 \quad \text{Gleichgewichtsbedingungen für ebenes System} \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} &= \sum_{i=1}^n (r_{xi} F_{yi} - r_{yi} F_{xi}) = 0 \end{aligned}$$

Für **ebene Systeme** gelten also **3 Gleichungen** je freigeschnittenem System.

Die Momentengleichgewichtsbedingung ist zusammen mit der Kräftegleichgewichtsbedingung tatsächlich unabhängig vom Bezugspunkt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{QP_i} \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (-\mathbf{r}_{0Q} + \mathbf{r}_{0P_i}) \times \mathbf{F}_i \\ &= -\mathbf{r}_{0Q} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}_{=\mathbf{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{0P_i} \times \mathbf{F}_i}_{=\mathbf{M}_0} \\ \mathbf{M}_Q &= -\mathbf{r}_{0Q} \times \underbrace{\mathbf{F}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{M}_0}_{=0} = 0 \end{aligned}$$



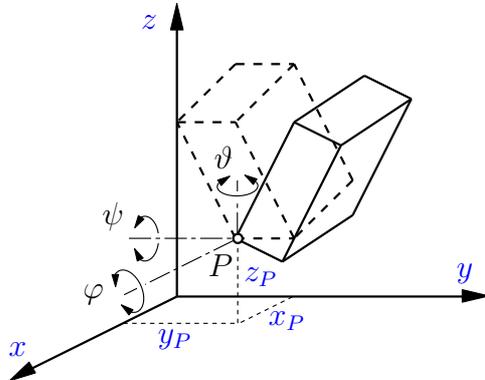
**Merke:** Durch die geschickte Wahl des Bezugspunktes läßt sich die Lösung des Gleichgewichtsproblems mitunter wesentlich vereinfachen!

**Tip:** Wähle Bezugspunkt dort, wo sich die Wirkungslinien von möglichst vielen unbekanntem Kräften schneiden! ⇒ entsprechende Kräfte treten bei der Momentengleichgewichtsbedingung nicht auf!

### 3.2 Lagerreaktionen und -wertigkeiten

Beachte: Ein *freier* Körper hat

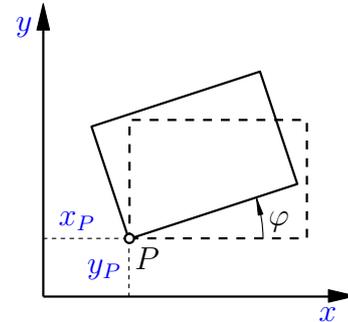
a) im Raum:



$f = 6$  Freiheitsgrade

z.B.: 3 Translation  $x_P, y_P, z_P$   
+ 3 Rotation  $\varphi, \psi, \vartheta$

b) in der Ebene:



$f = 3$  Freiheitsgrade

z.B.: 2 Translation  $x_P, y_P$   
+ 1 Rotation  $\varphi$

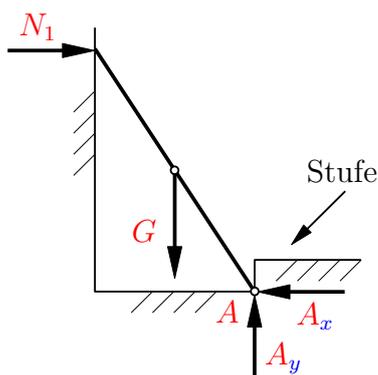
Durch Einführung von **Lagern** und **Gelenken** wird die Bewegungsfreiheit der Körper durch sog. **Bindungen** eingeschränkt.

**Wertigkeit** eines Lagers  $\equiv$  Anzahl der eingeschränkten Bewegungsmöglichkeiten  
 $\equiv$  Anzahl der Bindungen

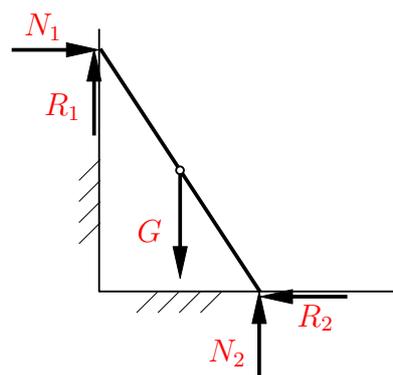
Durch die Einschränkung der Bewegung treten **Reaktions-** oder **Schnittkräfte** auf – je eingeschränkter Bewegungsmöglichkeit eine Schnittkraft bzw. ein Schnittmoment. Bei **idealen** (= reibungsfreien bzw. glatten) **Bindungen** zeigen die Reaktionskräfte und Momente nur in die gesperrten Richtungen. Nichtideale Bindungen enthalten dagegen auch Kraftkomponenten in den freien Richtungen.

**Beispiel:** Angelehnte Leiter

a) glatt



b) reibungsbehaftet



**Beispiele für Lagerreaktionen bei ebenen Systemen:**

Lagertyp	Symbol	mögliche Lagerreaktionen	Wertigkeit	mögliche Realisierung
verschiebbares Gelenklager			$g_i = 1$	
festes Gelenklager			$g_i = 2$	
feste Einspannung			$g_i = 3$	

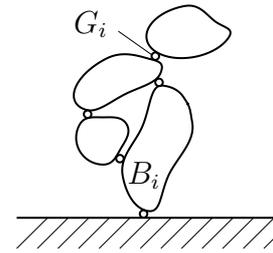
**Beispiele für Lagerreaktionen bei räumlichen Systemen:**

Lagertyp	Symbol	mögliche Lagerreaktionen	Wertigkeit	mögliche Realisierung
feste Einspannung			$g_i = 6$	
Kugelgelenk			$g_i = 3$	Gummilager (Fahrzeugbau)  3 Rotationen
Pendelstütze			$g_i = 1$	Fahrzeugaufhängung  5 Pendelstützen = „Lenker“
ebenes Gelenk			$g_i = 3$	

### 3.3 Systemfreiheitsgrade und statische Bestimmtheit

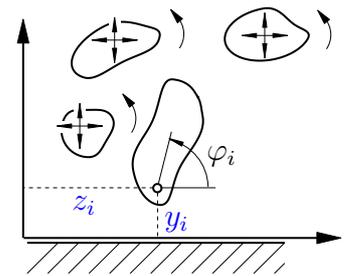
Betrachte ein System bestehend aus:

- $n_B$  **Körpern** (ohne Gestell)  $B_i$  („body“)
- $n_G$  **Gelenken** bzw. Lagern  $G_i$
- mit  $g_i$  **Lagerwertigkeiten**



Führe nun folgende Schritte durch:

- 1) **Trennen aller Lager und Gelenke**  
 $\Rightarrow$  es entsteht ein System bestehend aus  $n_B$  freien Körpern mit insgesamt

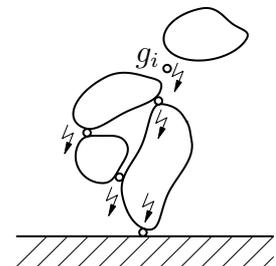


$$f_{\text{frei}} = 3n_B \quad \text{Freiheitsgraden für die ebene Bewegung}$$

$$6n_B \quad \text{Freiheitsgraden für die räumliche Bewegung}$$

- 2) **Hinzufügen der Gelenke und Lager**

$\Rightarrow$  je Gelenk bzw. Lager  $G_i$  werden  $g_i$  Bewegungsmöglichkeiten getilgt; insgesamt verbleiben nach Hinzufügen aller Gelenke und Lager



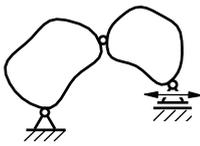
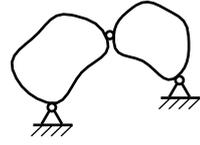
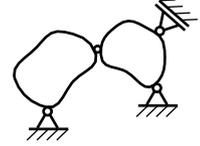
$$f = f_{n_B} - \sum_{i=1}^{n_G} g_i \quad \text{Systemfreiheitsgrade.}$$

Je nachdem, ob das System eben oder räumlich ist, erhält man daraus in Abhängigkeit der Anzahl der Körper

$$f_{\text{eben}} = 3n_B - \sum_{i=1}^{n_G} g_i \quad \text{Systemfreiheitsgrad für ebene Bewegung}$$

$$f_{\text{räumlich}} = 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} g_i \quad \text{Systemfreiheitsgrad für räumliche Bewegung}$$

Man unterscheidet nun folgende grundlegende Fälle von Lagerungen:

Fall	Anzahl von Freiheitsgraden	mögl. Systemeigenschaften	Bezeichnung in der Statik	Beispiel
1	$f > 0$	im System verbleiben noch Freiheitsgrade	<b>statisch unterbestimmt</b>	$n_B = 2$ $n_G = 3$ $\sum g_i = 5$  $f = 1$
2 (wird in Statik behandelt)	$f = 0$	alle Bewegungsmöglichkeiten sind unterbunden	<b>statisch bestimmt</b>	$n_B = 2$ $n_G = 3$ $\sum g_i = 6$  $f = 0$
3	$f < 0$	es treten mehr Lagerungen auf, als für die Einschränkung aller Bewegungsmöglichkeiten erforderlich	<b>statisch überbestimmt</b>	$n_B = 2$ $n_G = 4$ $\sum g_i = 7$  $f = -1$

### Bemerkungen:

- 1) In der Vorlesung Mechanik-Statik werden nur die **statisch bestimmten Fälle** behandelt.
- 2) **Statisch unterbestimmte Fälle** sind i.a. nicht im Gleichgewicht und werden in der **Dynamik** behandelt.
- 3) Die statisch **unbestimmten Fälle** bedürfen der Betrachtung von **Verformungen** und werden in der **Festigkeitslehre** behandelt.

### 3.4 Allgemeines Vorgehen zur Lösung von Gleichgewichtsproblemen

Die (algebraische) Lösung von Gleichgewichtsproblemen umfaßt i.a. folgende Schritte:

#### 1) Freischneiden:

→ **Trennen des Systems** in geeignete *Teilsysteme*, ggf. in einzelne Körper, durch „Aufschneiden“ von Gelenken und Auflagern

→ **Einzeichnen sämtlicher Kräfte und Momente**, und zwar der

a) *eingepprägten Kräfte* (Gewicht, Federn, später: Reibung)

b) *Reaktionskräfte und -momente*:

je Kontakt- oder Lagerstelle eine Reaktionskraft bzw. ein Reaktionsmoment pro *ingeschränkter Bewegungsmöglichkeit*

#### 2) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

Je Teilsystem

– im ebenen Fall 3 Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum M_{i0} &= 0\end{aligned}$$

– im räumlichen Fall 6 Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 & \sum M_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 & \sum M_{iy} &= 0 \\ \sum F_{iz} &= 0 & \sum M_{iz} &= 0\end{aligned}$$

#### 3) ggf. geometrische Bedingungen aufstellen

#### 4) Auflösung

Zählen von Gleichungen ( $n_{Glg}$ ) und Unbekannten ( $n_{Ubk}$ )

a) falls  $n_{Glg} = n_{Ubk}$

→ Lösungsstrategie überlegen

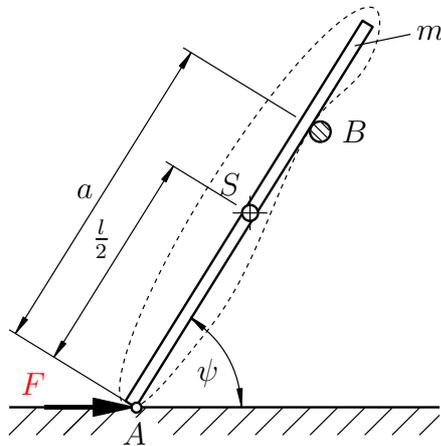
b) falls  $n_{Glg} < n_{Ubk}$  und noch zusammengesetzte Teilsysteme aus Schritt 1) vorhanden:

→ Teilsysteme weiter aufschneiden und mit 2) fortfahren

c) sonst: → Fehler:

System ist statisch unbestimmt, oder es wurden nicht alle Eigenschaften der Geometrie oder der Reaktionskräfte berücksichtigt.

**Beispiel:** Angelehnte Leiter



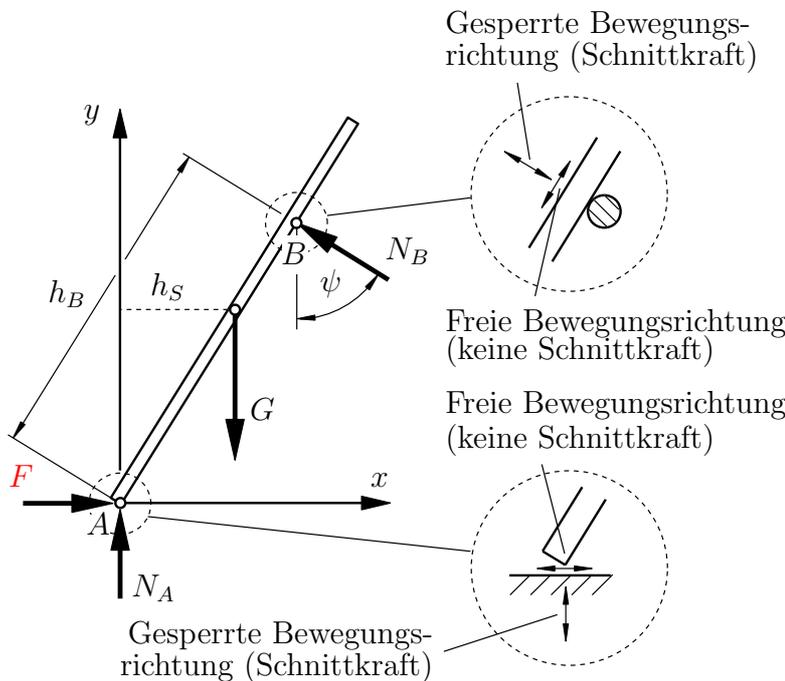
**Geg.:**  $a, l, m$

Boden und Führung B reibungsfrei

**Ges.:** Stützkraft  $F$

**Lösung:**

1) Freischneiden und Schnittkräfte eintragen



2) Gleichgewichtsbedingungen (positive Koordinatenrichtung  $x, y$  beachten!):

$$\sum F_x : \quad F - N_B \sin \psi = 0 \quad (3.10)$$

$$\sum F_y : \quad N_A + N_B \cos \psi - G = 0 \quad (3.11)$$

Raum für Notizen

Momentengleichgewicht bezüglich A:

(→ ausführlich mit Vektorelement, später skalare Äquivalente ausreichend)

$$\sum M_{A_z} = 0 \quad \mathbf{r}_{AS} = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{AB} = a \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = G \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_B = N_B \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{G} = G \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = G \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos \psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{N}_B = a N_B \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= a N_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a N_B \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum M_{A_z} : \underbrace{-G \frac{\ell}{2} \cos \psi}_{=h_S \perp G} + N_B \underbrace{a}_{=h_B \perp \mathbf{N}_B} = 0 \quad (3.12)$$

⇒ hätte auch sofort angegeben werden können!

3) **geometrische Bedingungen:** keine

4) **Auflösungsstrategie:**

(3.10), (3.11), (3.12): 3 Gleichungen für 3 Unbekannte  $F, N_A, N_B$

aus (3.12):

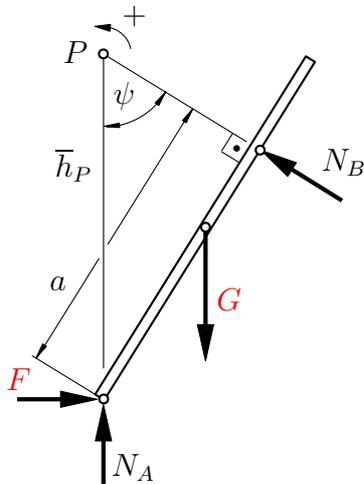
$$N_B = \frac{\ell}{2a} G \cos \psi$$

in (3.10):

$$F - \frac{\ell}{2a} G \cos \psi \sin \psi = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow F = \frac{\ell}{2a} G \cos \psi \sin \psi = \frac{\ell}{4a} G \sin 2\psi \quad (3.14)$$

**Einfachere Lösung:** Wahl des Bezugspunktes  $P$  so, daß Schnittkräfte  $N_A$  und  $N_B$  von vornherein eliminiert werden.



$$\bar{h}_P = \frac{a}{\sin \psi}$$

$$\sum M_P : F \bar{h}_P - G \frac{\ell}{2} \cos \psi = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{\bar{h}_P} G \frac{\ell}{2} \cos \psi$$

$$= \frac{\ell}{2a} G \sin \psi \cos \psi$$

$\Rightarrow$  identisch mit (3.14)

### 3.5 Reduktionsmöglichkeiten für Kraftsysteme

**Ziel:** „Reduktion“ eines an einem Körper angreifenden Systems von Kräften auf ein äquivalentes Minimalsystem.

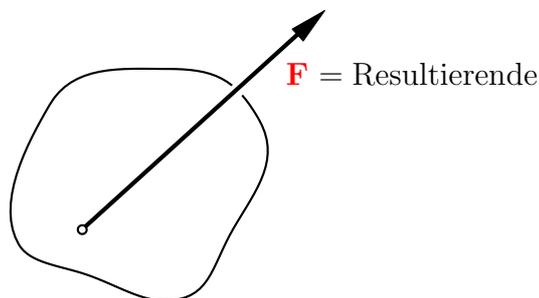
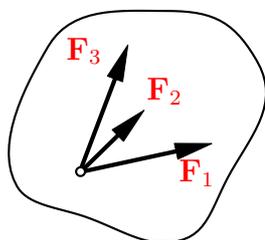
#### 3.5.1 Reduktion mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt = zentrales Kräftesystem

- a) „Lageplan“  $\Rightarrow$  Kräfte gebunden an Angriffspunkte bzw. Wirkungslinien

**Ausgangssituation**

**Reduktionsergebnis**

Lageplan



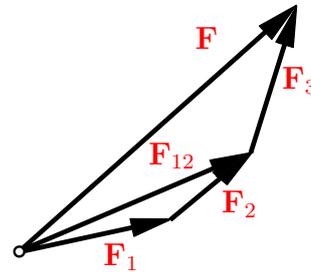
Raum für Notizen

b) „**Kräfteplan**“ (Kräftepolynom, Krafteck)

⇒ Fußpunkte der Kräfte werden sukzessive an die Spitzen der Vorgänger gereiht (Reihenfolge beliebig) (≡ mehrfache Anwendung der Parallelogrammregel)

Resultierende **F**:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}_{= \mathbf{F}_{12}} + \mathbf{F}_3$$

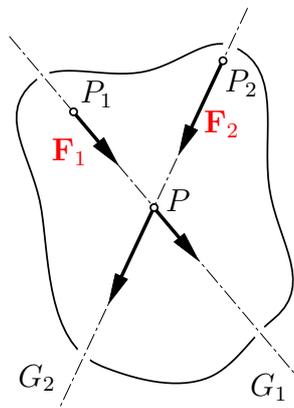


### 3.5.2 Zwei Kräfte am starren Körper, Reduktionsergebnis, Kräftepaar

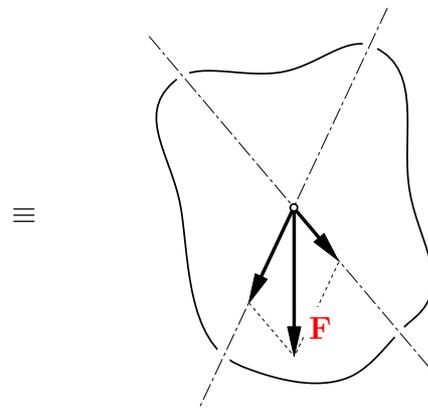
Ein Körper werde durch zwei Kräfte **F**<sub>1</sub>, **F**<sub>2</sub> belastet. Hierbei unterscheidet man drei Fälle

a)  $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{F}_2$

**Ausgangssituation**



**Reduktionsergebnis**

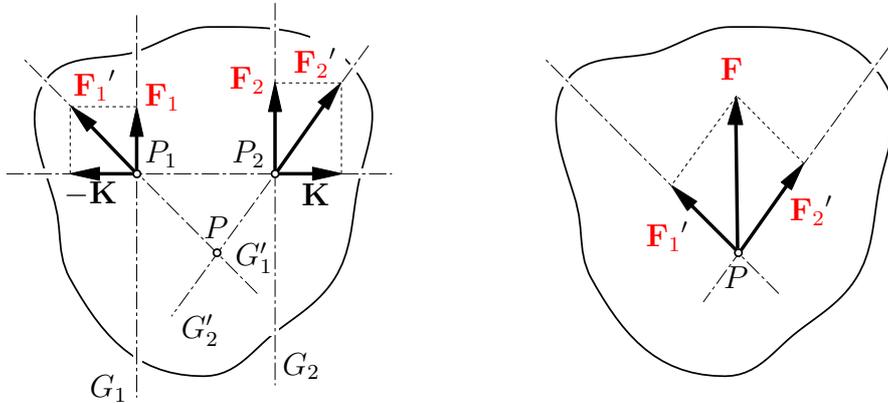


**Reduktionsschritte:**

- 1) Verschieben von **F**<sub>1</sub> und **F**<sub>2</sub> entlang ihrer Wirkungslinien  $G_1$  und  $G_2$  bis zum Schnittpunkt  $P$  der Wirkungslinien
- 2) Addieren von **F**<sub>1</sub> und **F**<sub>2</sub> nach der Parallelogrammregel
- 3) Ersetzen von **F**<sub>1</sub> und **F**<sub>2</sub> durch **Resultierende F**

b)  $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_1 \neq -\mathbf{F}_2$

⇒ Resultierende zweier nicht gleich groß und entgegengesetzt gerichteter Kräfte mit parallelen Wirkungslinien  $G_1$  und  $G_2$

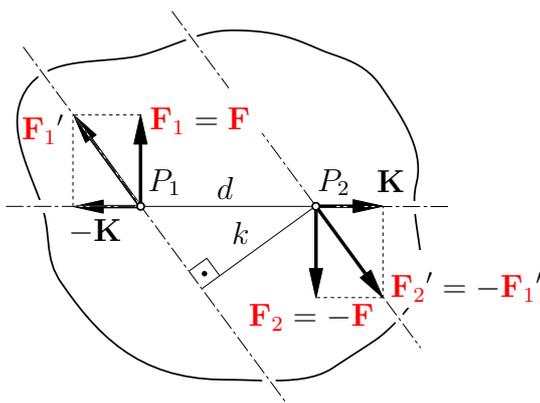


**Reduktionsschritte:**

- 1) Addition einer Nullkraft  $\mathbf{K}, -\mathbf{K}$
- 2) Bildung der Resultierenden  $\mathbf{F}_1'$  und  $\mathbf{F}_2'$  jeweils in  $P_1$  und  $P_2$  (→ weiter wie in a))
- 3) Verschiebung von  $\mathbf{F}_1'$  und  $\mathbf{F}_2'$  entlang der neuen Wirkungslinien  $G'_1$  und  $G'_2$
- 4) Bildung der Resultierenden  $\mathbf{F}$  in  $P$

c)  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$

⇒ Zwei parallele, gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte  
bisherige Konstruktion versagt:

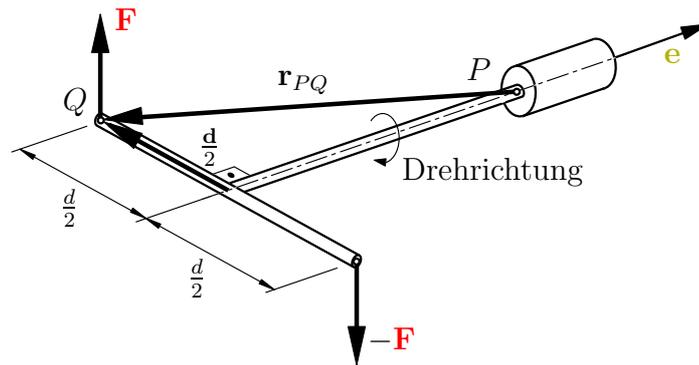


Resultierende  $\mathbf{F}_1'$  und  $\mathbf{F}_2'$  ebenfalls parallel!

Zwei gleichgroße, parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  sind nicht weiter reduzierbar. Man bezeichnet  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  als ein **Kräftepaar**. Die physikalische Wirkung eines Kräftepaars ist die eines reinen **Moments**.

Raum für Notizen

**Beispiel:** Geg.: Kräftepaar  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$



Es entsteht ein Moment mit

a) **Betrag** = Kraft  $\times$  Hebelarm

$$= 2F \frac{d}{2} = Fd \tag{3.15}$$

b) **Richtung:** „um“  $\mathbf{e}$

Dies zusammengefasst ergibt vektoriell

$$\mathbf{M} = Fd\mathbf{e}$$

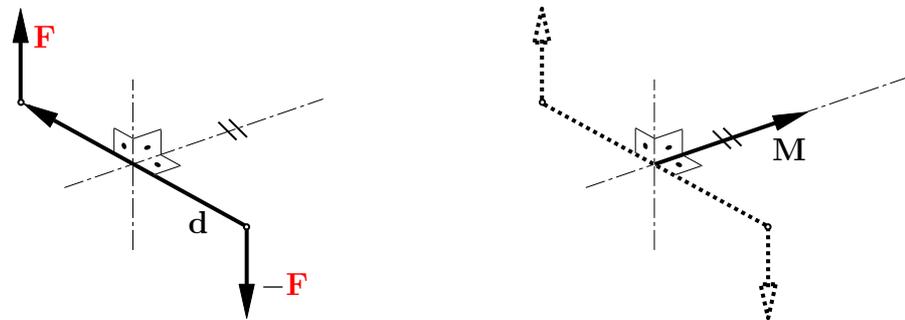
Nun gilt für den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \frac{\frac{\mathbf{d}}{2} \times \mathbf{F}}{\left| \frac{\mathbf{d}}{2} \right| |\mathbf{F}| \sin 90^\circ} \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{\frac{\mathbf{d}}{2} \times \mathbf{F}}{\left| \frac{\mathbf{d}}{2} \right| \cdot |\mathbf{F}|} = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{F}}{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{F}|}$$

Damit wird (aus voriger Beziehung  $\mathbf{M} = Fd\mathbf{e}$ )

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$$

Damit stimmt das Moment im physikalischen mit dem Moment im vektoriellen Sinne überein! D.h. ein Kräftepaar entspricht in seiner Wirkung einem freien Moment



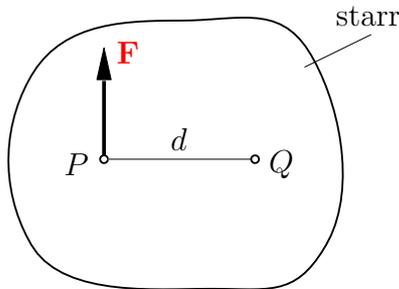
$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$$

**freies Moment:** Vektor ist frei verschiebbar im Raum

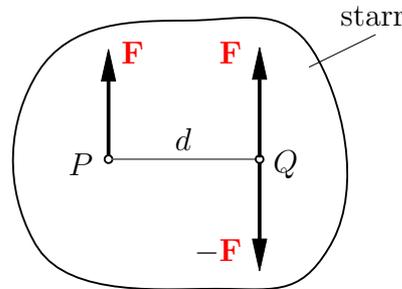
### 3.5.3 Moment einer Einzelkraft

Ist nur eine Einzelkraft  $\mathbf{F}$  mit Angriffspunkt  $P$  gegeben, so läßt sich ihr Moment  $M_Q$  bzgl. eines Angriffspunktes  $Q$  wie folgt ermitteln:

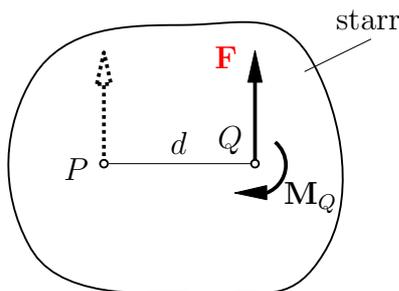
a) Ausgangssituation



b) Hinzufügen einer Nullkraft  $\mathbf{F}, -\mathbf{F}$



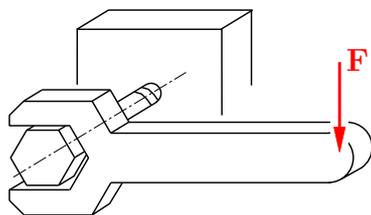
c) Reduktion auf eine Einzelkraft  $\mathbf{F}$  bezüglich  $Q$  und ein freies Moment  $M_Q = dF$



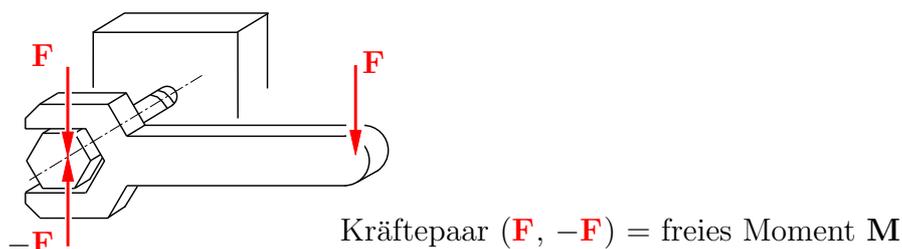
**Beachte:** Während ein Kräftepaar grundsätzlich einen *freien Vektor* darstellt, ist das Kräftepaar  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  bzw. Moment  $M_Q$ , welches für einen bestimmten Aufpunkt berechnet wird, nach Betrag und Richtung abhängig von der Wahl von  $Q$ .

**Beispiel:** Moment beim Anziehen einer Schraube

a) Ausgangssituation

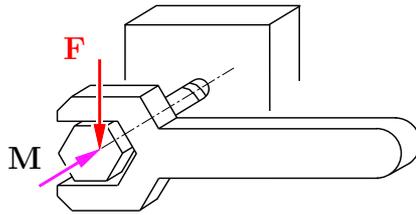


b) Hinzufügen einer Nullkraft  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  an der Schraubenachse



Raum für Notizen

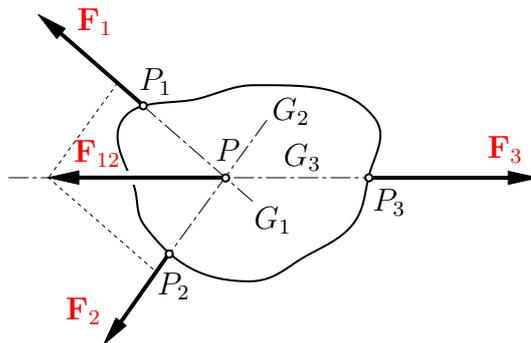
c) Äquivalente Belastung an der Schraubenachse



3.5.4 Gleichgewichtsbedingungen bei drei Kräften

- Drei Kräfte am starren Körper sind entweder einer Einzelkraft oder einem Kräftepaar äquivalent.
- Drei Kräfte sind im **Gleichgewicht** genau dann, wenn ihre Summe verschwindet und sich ihre Wirkungslinien schneiden.

Lageplan



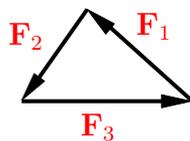
Verschieben des Angriffspunktes von  $F_1$  und  $F_2$  und Bilden der Resultierenden  $F_{12}$ . Damit  $F_3$  und  $F_{12}$  im Gleichgewicht sind, muß gelten

$$F_3 = -F_{12} \quad .$$

Die Wirkungslinien von  $F_3$  und  $F_{12}$  müssen kollinear sein!

⇒ Wirkungslinie von  $F_3$  verläuft ebenfalls durch  $P$ .

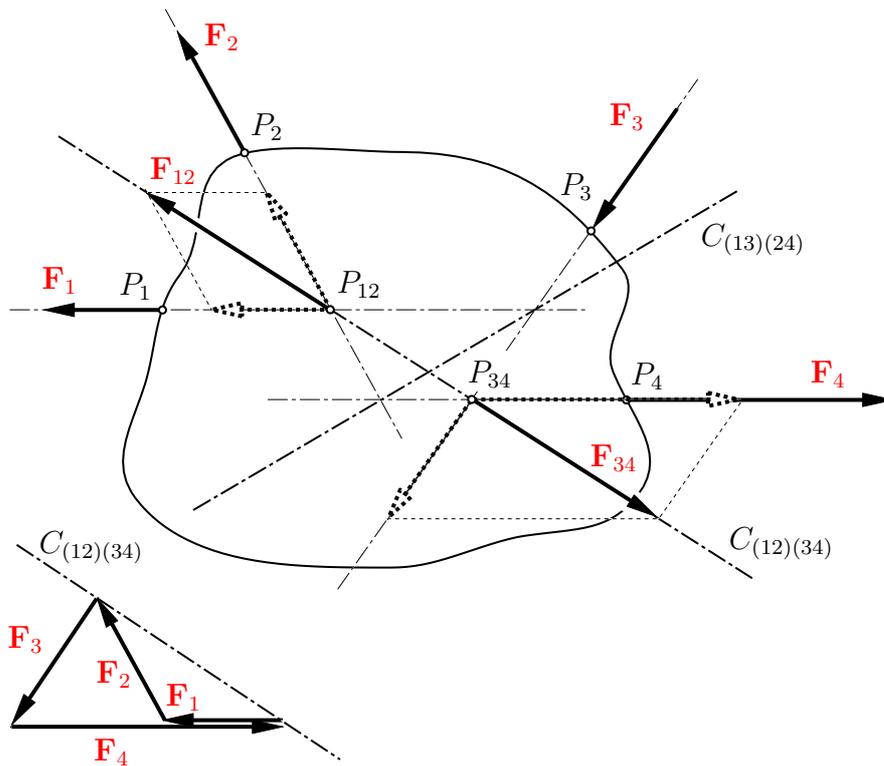
Kräfteplan



### 3.5.5 Gleichgewichtsbedingungen bei vier Kräften (CULMANNsche Methode)

Vier Kräfte in der Ebene sind im Gleichgewicht genau dann, wenn ihre Summe verschwindet und wenn die Resultierenden von je zwei Kräftepaaren auf einer gemeinsamen Wirkungslinie, der CULMANN-Geraden, liegen.

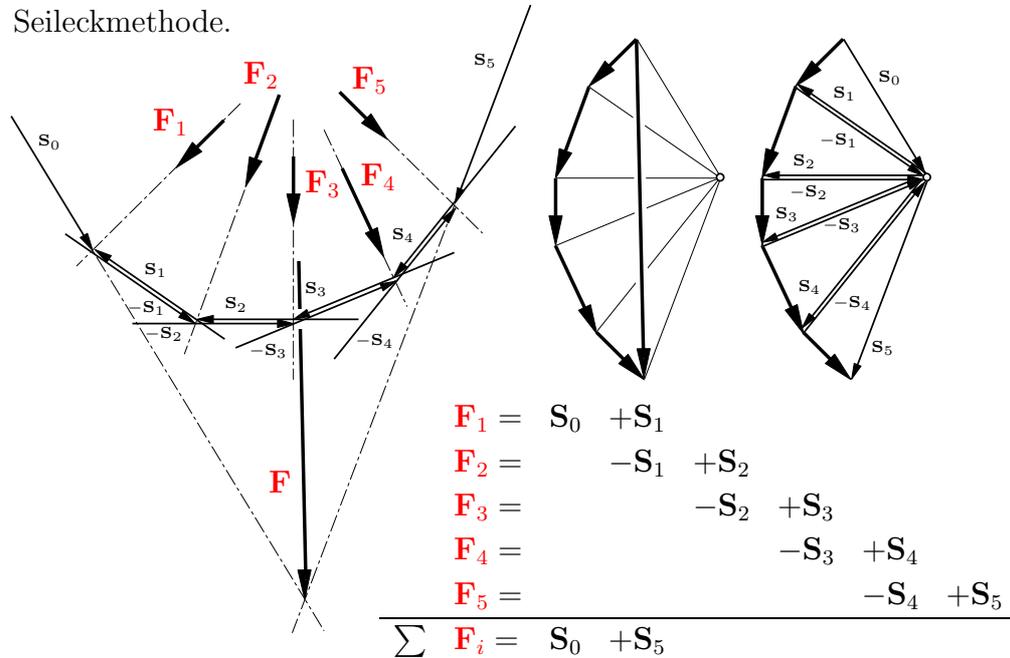
#### Lageplan



Verschiebt man jeweils  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $F_3$  und  $F_4$  bis zu deren gemeinsamen Schnittpunkten  $P_{12}$  bzw.  $P_{34}$ , so entstehen die beiden Resultierenden  $F_{12}$  und  $F_{34}$ . Damit diese im Gleichgewicht sind, müssen sie eine gemeinsame Wirkungslinie  $C_{(12)(34)}$ , die **CULMANNsche-Gerade**, aufweisen.

### 3.5.6 Gleichgewichtsbedingungen bei mehr als vier Kräften - Die Seileckmethode

Auch bei mehr als vier Kräften könnte man durch wiederholte Anwendung der CULMANNschen Konstruktion das Gleichgewichtsproblem graphisch lösen. Eine elegantere Methode ist jedoch die im folgenden beschriebene Seileckmethode.



⇒ Wirkung von  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_5$  entspricht der Wirkung von  $\mathbf{S}_0$  und  $\mathbf{S}_5$ .  
 ⇒ Zwei Kräfte! Resultierende wie in 3.5.2

- 1) Zeichnen des Lageplans. Hier braucht die Größe der Kräfte nicht maßstäblich eingezeichnet zu werden.
- 2) Zeichnen des Kraftecks in einem gewählten Kraftmaßstab. Dem Krafteck kann die Resultierende nach Größe und Richtung entnommen werden.
- 3) Wahl eines Pols und Zeichnen der Polstrahlen. Man wählt den Pol im Hinblick auf die Zeichengenauigkeit zweckmäßigerweise so, dass die Polstrahlen weder zu spitze noch zu stumpfe Winkel miteinander bilden. Ferner darf der Pol nicht auf der Wirkungslinie einer Kraft liegen.
- 4) Die Parallelen zu den Polstrahlen, also die Seilstrahlen, werden in den Lageplan eingezeichnet, und zwar so, dass zwei Polstrahlen, die im Krafteck eine Kraft einschließen, sich im Lageplan auf der Wirkungslinie dieser Kraft schneiden.
- 5) Der Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles ergibt im Lageplan einen Punkt der Wirkungslinie der Resultierenden.

## 4 Fachwerke

**Definition:** Unter einem *idealen Fachwerk* versteht man ein *unver-schiebliches Tragwerk* von  $n_S$  *masselosen Stäben*, welche an  $n_U$  *Kno-ten* drehbar und reibungsfrei miteinander verbunden sind.

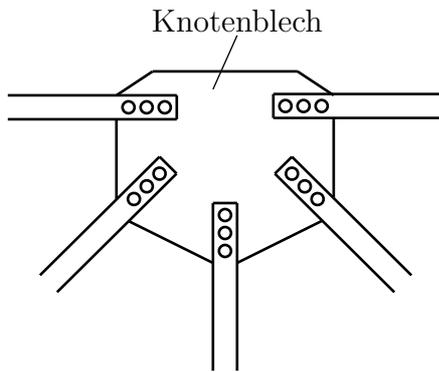
**Folge:** Stäbe sind nur auf Zug („+“) oder Druck („-“) belastet.

**Graphische Darstellung:**

	Zug („+“)	Druck („-“)
a) auf Stäbe bezogen		
b) auf Knoten bezogen		

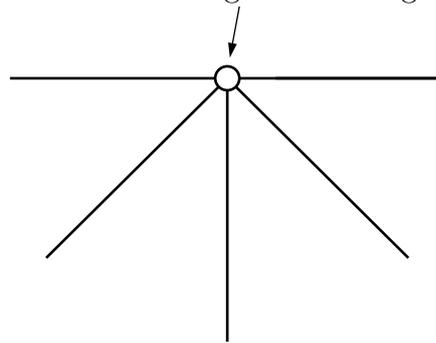
**Idealisierung:**

a) reales System

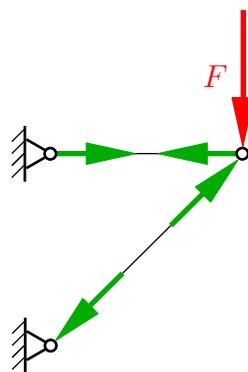
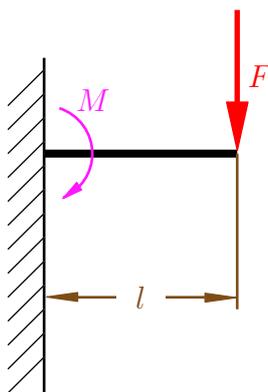


b) Idealisierung

Knoten = reibungsfreies Drehgelenk



**Vorteil von Fachwerken:** Vermeidung von Biegebeanspruchungen:



Raum für Notizen

### 4.1 Statische Bestimmtheit

**Betrachtungsweise 1:** Zählen von Unbekannten und Gleichungen.

1) Unbekannte:

$$n_S \times 1 \text{ Stabkräfte} \\ + n_A \text{ Auflagerkräfte}$$

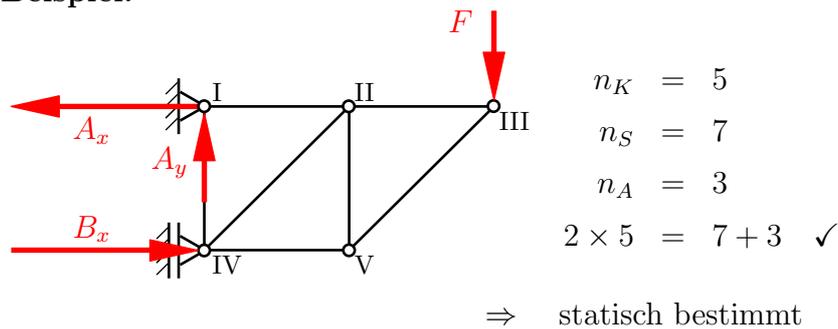
2) Gleichungen:

- a) **eben** je Knoten 2 Gleichungen ( $\sum F_x, \sum F_y$ )  $2n_K$
- b) **räumlich** je Knoten 3 Gleichungen ( $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ )  $3n_K$

**Statische Bestimmtheit** gegeben, wenn

- a) **eben**  $2n_K = n_S + n_A$
- b) **räumlich**  $3n_K = n_S + n_A$

**Beispiel:**

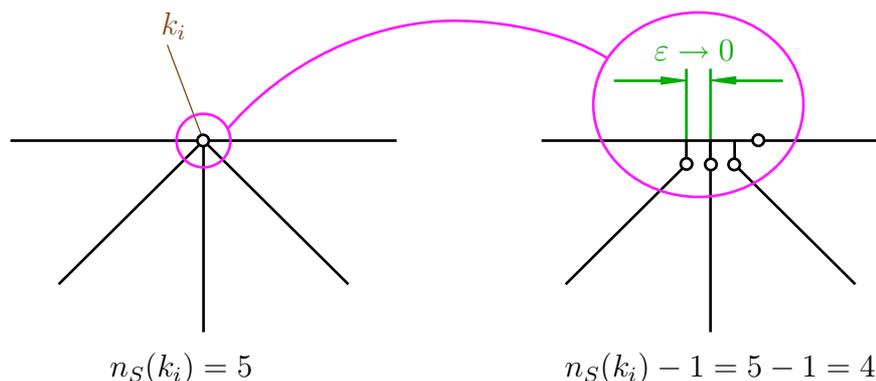


**Betrachtungsweise 2:** Zählen von Freiheitsgraden

**Achtung!** Für die Zählung von Freiheitsgraden müssen Knoten mit mehr als zwei Stäben mehrfach gezählt werden!

Knoten  $k_i$  mit  $n_S(k_i)$  Stäben zählt wie  $n_S(k_i) - 1$  Einzelknoten!

**Beispiel:**



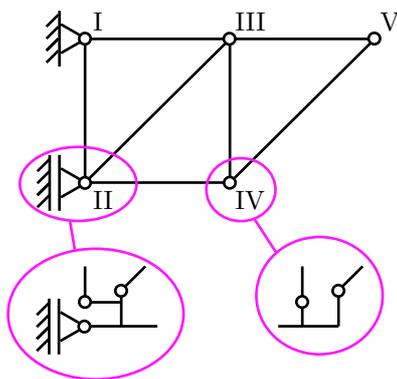
Es ist für statische Bestimmtheit notwendig:

a) eben  $f = 3n_S - \sum_{i=1}^{n_K} g_i = 0$

b) räumlich  $f = 5n_S - \sum_{i=1}^{n_K} g_i = 0$

(Zur Definition der Lagerwertigkeit  $g_i$  siehe Abschnitt 3.2 auf Seite 22.)

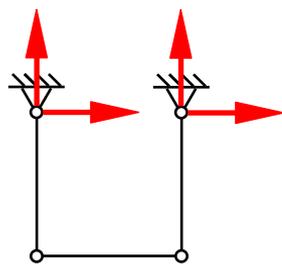
Beispiel:



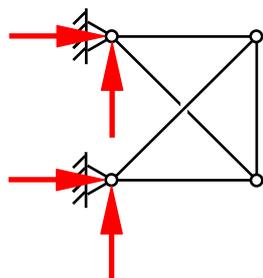
$$\begin{aligned} n_S &= 7 \\ g_I &= 1 \times 2 + 2 \\ g_{II} &= 2 \times 2 + 1 \\ g_{III} &= 3 \times 2 \\ g_{IV} &= 2 \times 2 \\ g_V &= 1 \times 2 \end{aligned}$$

$$f = 3 \times 7 - 4 - 5 - 6 - 4 - 2 = 21 - 21 = 0 \quad \checkmark$$

weitere Beispiele:



$$\begin{aligned} n_K &= 4 \\ n_S &= 3 \\ n_A &= 4 \\ 2n_K - n_S - n_A &= 8 - 3 - 4 = 1 > 0 \\ \Rightarrow &\text{statisch unterbestimmt!} \end{aligned}$$

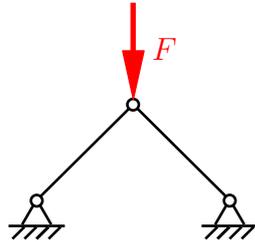


$$\begin{aligned} n_K &= 4 \\ n_S &= 5 \\ n_A &= 4 \\ 2n_K - n_S - n_A &= 8 - 5 - 4 = -1 < 0 \\ \Rightarrow &\text{statisch unbestimmt!} \end{aligned}$$

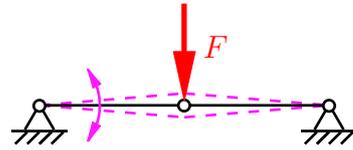
Raum für Notizen

**Bemerkung:** Die hier aufgestellten Bedingungen sind für statische Bestimmtheit notwendig, aber nicht hinreichend! Je nach Geometrie kann ein formal statisch bestimmtes Fachwerk „wackelig“ sein.

**Beispiel:**



statisch bestimmt und starr



statisch bestimmt, aber wackelig

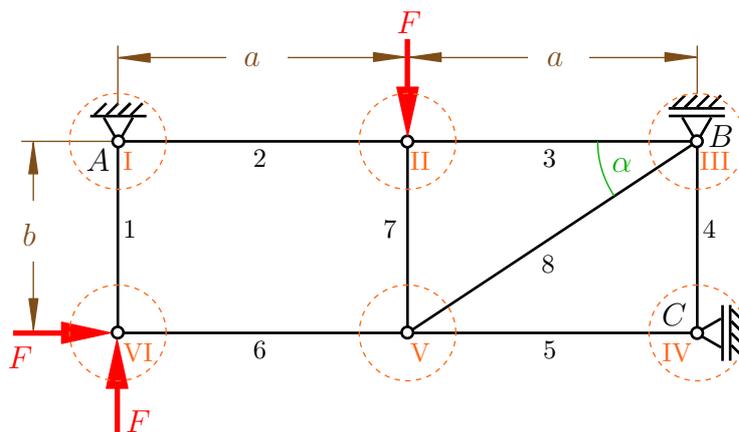
## 4.2 Ermittlung der Stabkräfte

### 4.2.1 Knotenpunktverfahren

**Prinzip:**

- 1) Freischneiden aller Knoten
- 2) Einzeichnen aller Stabkräfte als Zugkräfte
- 3) ggf. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen für das gesamte Fachwerk zur Ermittlung der Auflagerreaktionen
- 4) Aufstellen von je 2 Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten

**Beispiel:**

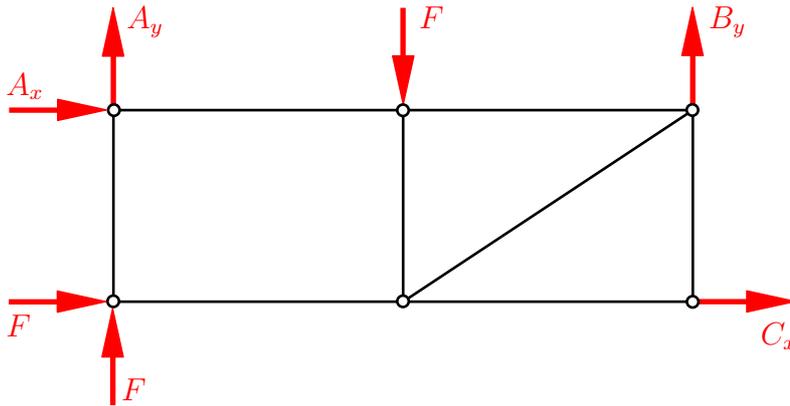


**Überprüfung der Statischen Bestimmtheit:**

$$g_1 = 4 \quad , \quad g_2 = 4 \quad , \quad g_3 = 5 \quad , \quad g_4 = 3 \quad , \quad g_5 = 6 \quad , \quad g_6 = 2$$

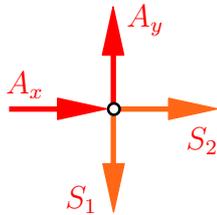
$$\sum g_i = 24 \quad , \quad 3 \times n_S = 3 \times 8 = 24 \quad \checkmark$$

**Ersetzen der Lager durch Kräfte:**

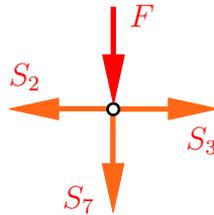


**Knotenfreischnitte:**

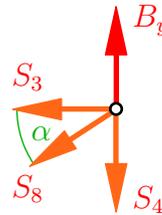
Knoten I:



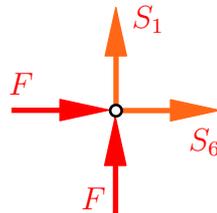
Knoten II:



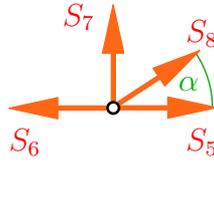
Knoten III:



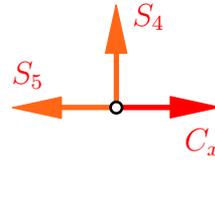
Knoten VI:



Knoten V:



Knoten IV:



**Gleichgewichtsbedingungen:**

	$A_x$	$A_y$	$B_y$	$C_x$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$F$	
I →	$A_x$					$+S_2$								$=0$
↑		$A_y$			$-S_1$									$=0$
II →						$-S_2$	$+S_3$							$=0$
↑											$-S_7$		$-F$	$=0$
III →							$-S_3$						$-S_8 \cos \alpha$	$=0$
↑			$B_y$					$-S_4$					$-S_8 \sin \alpha$	$=0$
IV →				$C_x$					$-S_5$					$=0$
↑										$+S_4$				$=0$
V →									$+S_5$	$-S_6$			$+S_8 \cos \alpha$	$=0$
↑											$+S_7$	$+S_8 \sin \alpha$		$=0$
VI →										$+S_6$			$+F$	$=0$
↑					$+S_1$								$+F$	$=0$

$6 \times 2 = 12$  Gleichungen für 12 Unbekannte  $A_x, A_y, B_y, C_x, S_1, \dots, S_8$

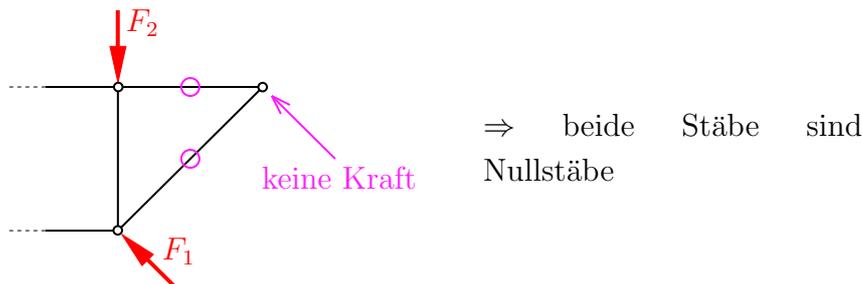


### 4.2.2 Nullstäbe

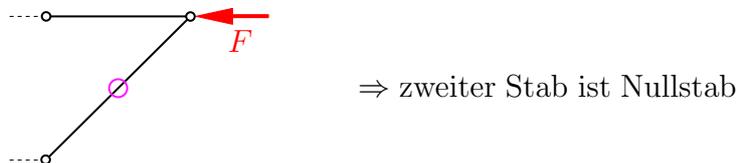
Wie aus dem vorherigen Abschnitt ersichtlich, existieren in Fachwerken bei einer gegebenen Belastung Stäbe, in denen **keine** Kräfte auftreten. Solche Stäbe werden als **Nullstäbe** bezeichnet. Nullstäbe können vor der Berechnung der Stab- und Lagerkräfte entfernt werden.

Man erkennt sie anhand von drei Konfigurationen:

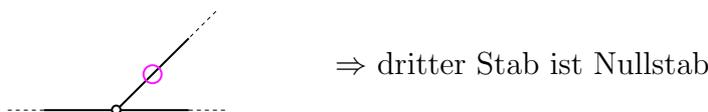
#### 1) unbelasteter Knoten mit zwei Stäben



#### 2) belasteter Knoten mit zwei Stäben + Wirkungslinie der Kraft kollinear mit einem Stab



#### 3) Knoten mit drei Stäben, von denen zwei kollinear sind



### 4.2.3 Einfache Fachwerke

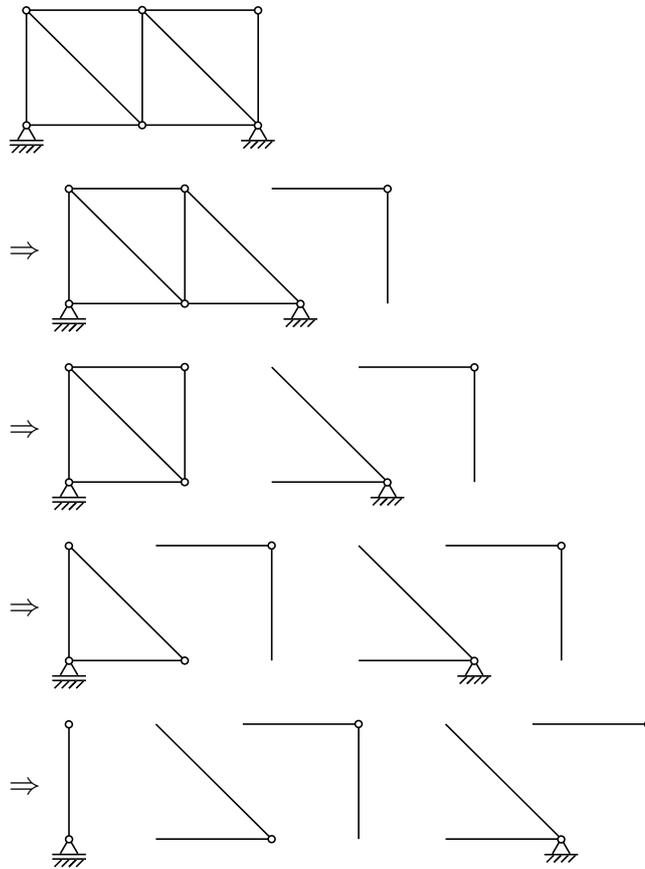
Fachwerke, die sich durch sukzessives Entfernen von Knoten mit zwei Stäben samt den zugehörigen Stäben vollständig abbauen („abbrechen“) lassen, heißen **„einfache Fachwerke“**.

einfache Fachwerke           ≡ „abbrechbar“  
nicht einfache Fachwerke   ≡ nicht „abbrechbar“

Raum für Notizen

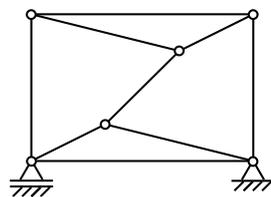
**Beispiel:**

a) **abbrechbares Fachwerk**



**Bemerkung:** Bei abbrechbaren Fachwerken lassen sich durch Aufstellen und Lösen der Gleichgewichtsbedingungen an den entfernten Knoten sämtliche Kräfte rekursiv bestimmen!

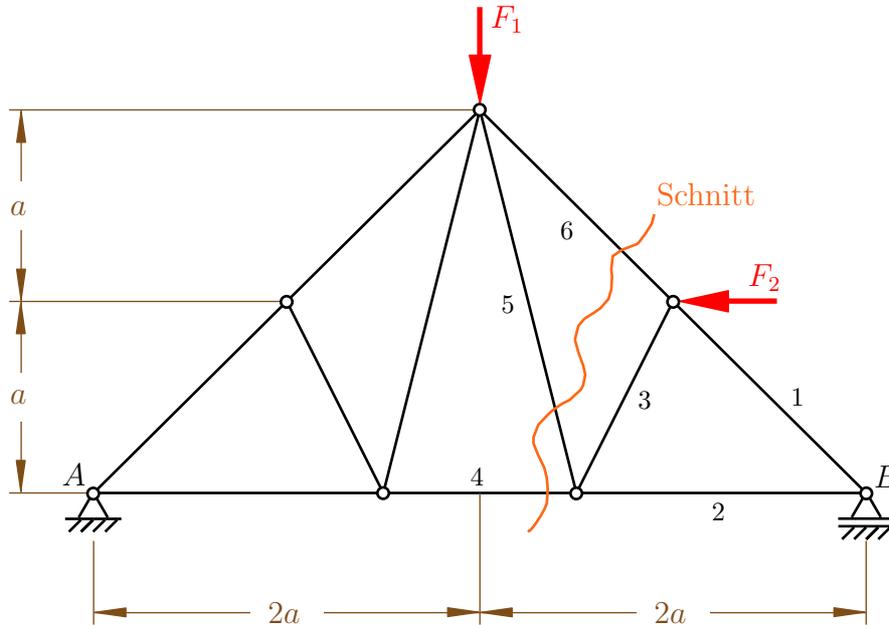
b) **nicht abbrechbares Fachwerk**



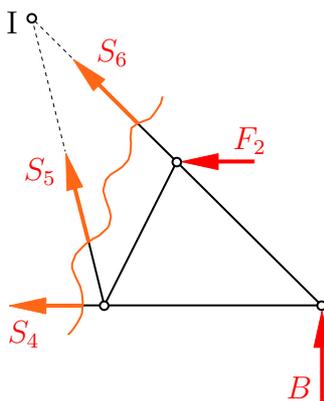
alle Knoten verbinden drei Stäbe

### 4.2.4 Ritterscher Schnitt

Für ebene einfache Fachwerke eignet sich das nach Karl Wilhelm Ritter (\* Basel 1847, † Zürich 1906) benannte Verfahren des **Ritterschen Schnitts**.



**Grundidee:** Schnitt des Fachwerks in zwei Teile, wobei je Schnitt maximal drei unbekannte Stabkräfte auftreten.

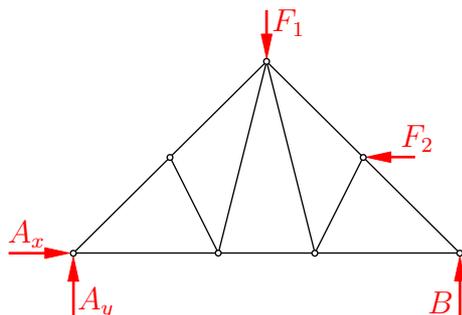


$$\overset{\curvearrowright}{I}: \quad B \cdot 2a - S_4 \cdot 2a - F_2 \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow S_4 = B - \frac{F_2}{2}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{4}F_2 - \frac{1}{2}F_2$$

$$S_4 = \frac{1}{2}F_1 - \frac{3}{4}F_2$$



$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad B \cdot 4a + F_2 \cdot a - F_1 \cdot 2a = 0$$

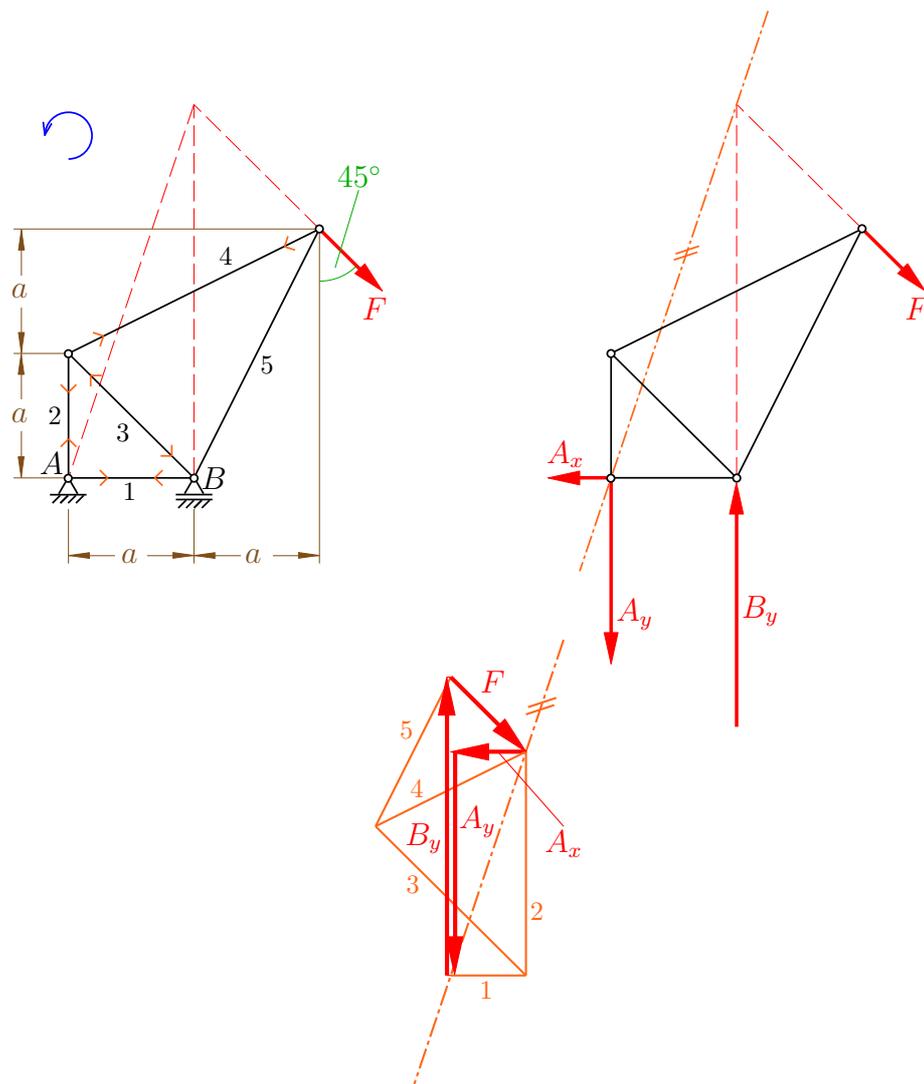
$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{4}F_2$$

### 4.2.5 Cremona-Plan

Für die graphische Ermittlung der Kräfte innerhalb eines Fachwerkes eignet sich auch das folgende nach Luigi Cremona (\* Pavia 1830, † Rom 1903) bezeichnete Schema („Cremona-Plan“).

- 1.) Ermittlung der Lagerreaktionen des gesamten Fachwerkes durch globalen Freischnitt
- 2.) Festlegen eines Umlaufsinnns und Nummerieren aller Stäbe
- 3.) Einzeichnen der Kraftecke für eingeprägte Kräfte und Lagerkräfte
- 4.) Beginnend an einem Knoten mit zwei Unbekannten Stabkräften, Krafteck unter Berücksichtigung des Umlaufsinnns (ohne Pfeile!) einzeichnen; Pfeilrichtung im Lageplan einzeichnen
- 5.) Angabe aller Stabkräfte mit Vorzeichen in Tabelle

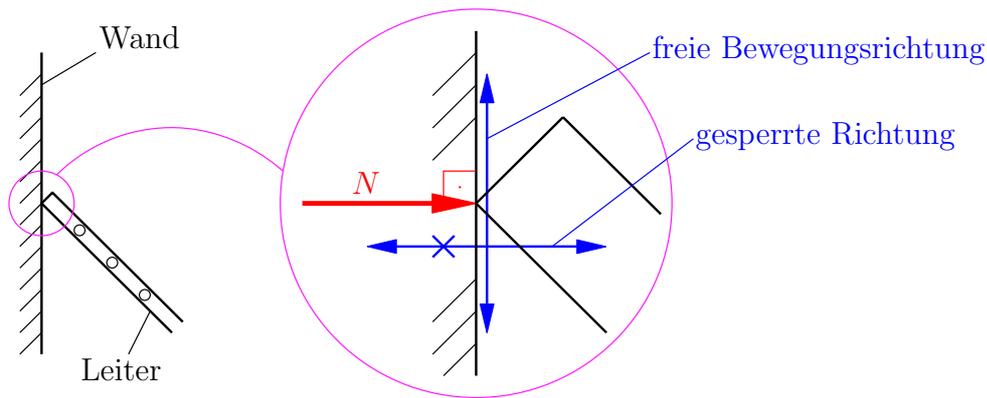
**Beispiel** (Gross, Hauger, Schnell):



## 5 Reibung

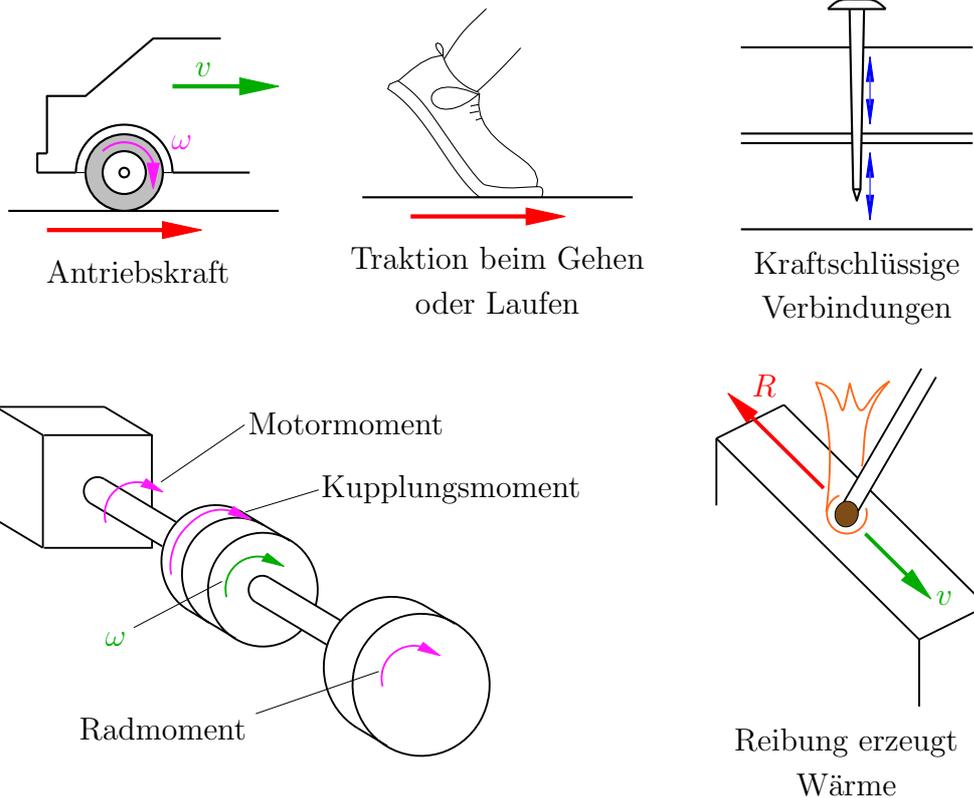
Bei den bisherigen Ausführungen wurde stets vom Idealfall ausgegangen, dass die Berührungsflächen zwischen den Körpern ideal glatt waren. Die Folge war, dass die Kräfte nur in Richtung der gesperrten Bewegungsfreiheitsgrade wirkten.

### Beispiel:



Nunmehr sollen reibungsbehaftete Berührungsflächen betrachtet werden, welche für technische Systeme von großer Bedeutung sind.

### Beispiele:

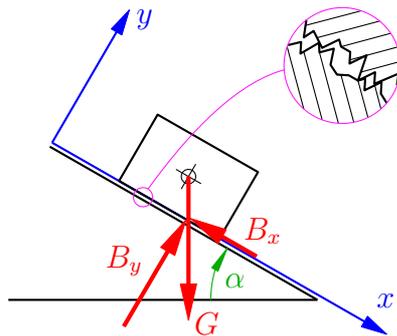


Raum für Notizen

**Experiment:** Ein Quader wird auf eine schiefe Ebene gelegt, deren Neigungswinkel  $\alpha$  langsam vergrößert wird.

**Ergebnis:** Bis zu einem bestimmten Reibungswinkel  $\alpha_{max}$  bleibt der Quader in Ruhe, er „haftet“. Bei Winkeln größer als  $\alpha_{max}$  **gleitet** der Quader, d.h. er befindet sich nicht mehr im statischen Gleichgewicht, und seine Bewegung erfolgt nach den Gesetzen der **Dynamik** (Kinetik).

**Haften:**  $\alpha < \alpha_{max}$

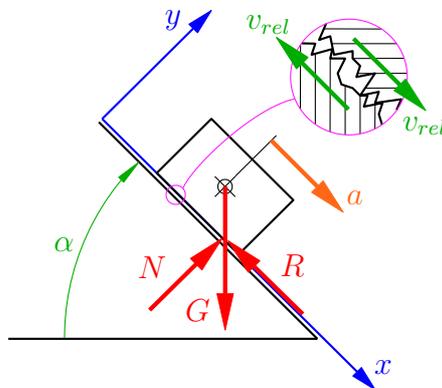


**Gleichgewichtsbedingung:**

$$B_x = G \sin \alpha$$

Kein Gleiten an der Berührungsfläche, wirkt wie formschlüssige Verbindung. Kontaktflächen nehmen die Tangentialkräfte  $B_x$  auf.

**Gleiten:**  $\alpha > \alpha_{max}$



Reibungskraft  $R = f(N, v_{rel})$

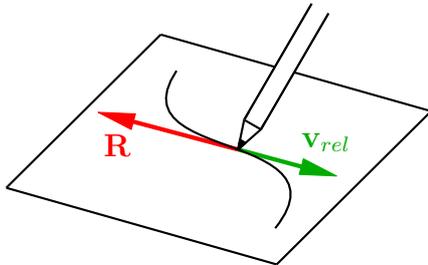
Rauhigkeiten können statische Tangentialkraft nicht mehr aufnehmen, d.h. es tritt Gleiten auf, und es besteht somit keine Verbindung in Tangentialrichtung.

Im Falle des **Haftens** ist die horizontale Kraft eine **Reaktionskraft**, welche sich aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen ergibt; diese „verbraucht“ **keine Leistung**.

Im Falle des **Gleitens** ist die horizontale Kraft eine eingeprägte Kraft, deren Wert sich aus den Reibungsgesetz  $R = f(N, v_{rel})$  ergibt. Es wird **Leistung** verbraucht.

Aus experimentellen Messungen sind folgende Eigenschaften für **trockene Reibung** näherungsweise erfüllt:

- a) Die Gleitreibung wirkt immer entgegengesetzt zur Relativgeschwindigkeit zwischen den gleitenden Flächen.



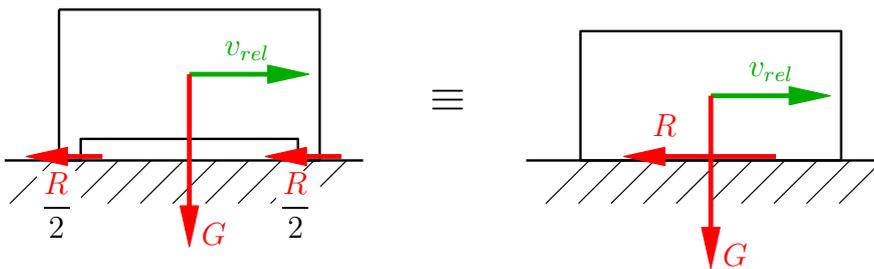
$$\mathbf{R} = -|\mathbf{R}| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|}$$

- b) Die Gleitreibung ist proportional zur Normalkraft und unabhängig von der Größe der Kontaktfläche.

**Reibkraftgesetz für Gleitreibung:**

$$R = \mu N \quad \text{Coulombsches Gleitreibungsgesetz}$$

$\mu$  ... Gleitreibungskoeffizient



- c) Zwischen dem Grenzfall der Reibung und der Gleitreibung tritt ein Unterschied auf.

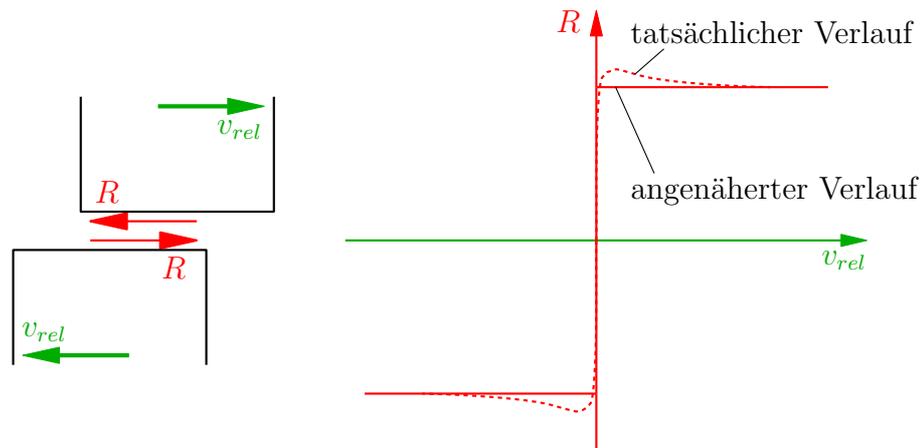
Haftung:  $R < \mu_0 N$

Haftgrenze:  $R = \mu_0 N$      $\mu_0$  ... Haftreibungskoeffizient

Gleiten:  $R = \mu N$      $\mu$  ... Gleitreibungskoeffizient

Raum für Notizen

d) Der Betrag der Gleitreibungskraft ist unabhängig vom Betrag der Gleitgeschwindigkeit.



Damit läßt sich die Reibungskraft bei Gleitungen näherungsweise durch die folgenden Funktionen darstellen:

$$R = \mu N \text{sign}(v_{rel}) \quad (\text{eindimensional})$$

$$\mathbf{R} = -\mu N \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} \quad (\text{mehrdimensional})$$

**Typische Werte für einige Werkstoffpaarungen:**

Werkstoffpaarung	Haftreibungskoeffizient	Gleitreibungskoeffizient
Stahl/Eis	0,03	0,015
Stahl/Stahl	0,15 ... 0,5	0,1 ... 0,4
Holz/Holz	0,5	0,3
Autoreifen/Asphalt	0,7 ... 0,9	0,5 ... 0,8

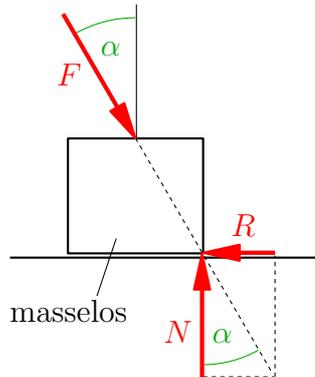
**Zusammenfassung der Unterschiede zwischen Haften und Gleiten:**

- 1) Beim Haften ist die Tangentialkraft eine Reaktionskraft, welche aus den Gleichgewichtsbedingungen (und nicht als  $R = \mu_0 N$ ) zu ermitteln ist; beim Gleiten ist die Tangentialkraft eine tatsächliche eingeprägte Kraft, welche immer mechanische Energie in Wärmeenergie umwandelt.
- 2) Die Koeffizienten für den Grenzfall der Haftung ( $\mu_0$ ) und der Gleitreibung sind im allgemeinen unterschiedlich ( $\mu_0 > \mu$ ).

## 5.1 Haftungskegel, Haftungswinkel

**Experiment:** Eine Kraft  $F$  wird unter einem *Neigungswinkel*  $\alpha$  auf einen zweiten haftenden Körper eingepreßt.

**Frage:** Unter welchem kleinsten Neigungswinkel  $\rho_0$  (dem sogenannten *Haftungswinkel*) beginnt der Körper zu gleiten?



Es ist aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$R = F \sin \alpha \quad (5.1)$$

$$N = F \cos \alpha \quad (5.2)$$

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen (5.1) und (5.2) bleiben erfüllt, solange die Haftbedingung

$$R \leq \mu_0 N \quad (5.3)$$

erfüllt ist.

Im Grenzfall der Haftung gilt

$$R = \mu_0 N. \quad (5.4)$$

Einsetzen von (5.1) und (5.2) in (5.3) liefert die Haftungsbedingung für den Neigungswinkel  $\alpha$ :

$$\Rightarrow F \sin \alpha \leq \mu_0 F \cos \alpha$$

Der Quader ist unabhängig vom Betrag von  $F$  im Gleichgewicht, solange die Bedingung

$$\tan \alpha \leq \mu_0 \quad (5.5)$$

erfüllt ist. Nach Einführung des Haftungswinkels

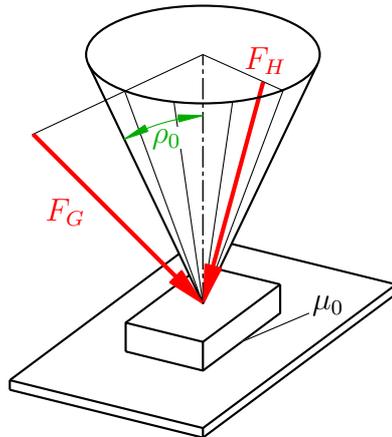
$$\tan \rho_0 = \mu_0 \quad \rho_0 \dots \text{Haftungswinkel} \quad (5.6)$$

lautet die Haftbedingung (5.5)

$$\begin{aligned} |\tan \alpha| &\leq \tan \rho_0 \\ \alpha &\leq \rho_0 \end{aligned}$$

Raum für Notizen

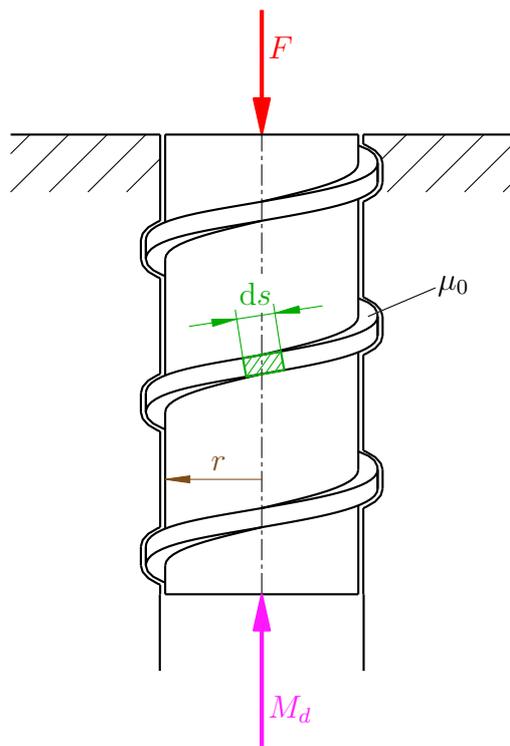
Dies bedeutet **geometrisch**, dass die angreifende Kraft  $F$  innerhalb eines Kegels mit halben Öffnungswinkel  $\rho_0$  liegen muss, damit Haften auftritt.



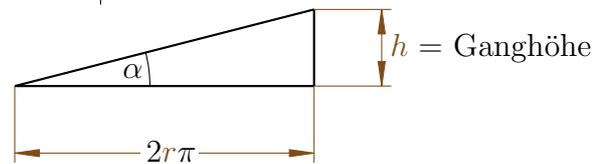
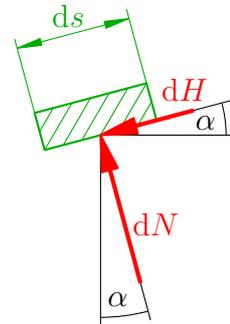
$F_H$  innerhalb des Haftungskegels  
 $\Rightarrow$  **Haften**

$F_G$  ausserhalb des Haftungskegels  
 $\Rightarrow$  **Gleiten**

### 5.2 Schraubenverbindungen



**Frage:** Für welche Momente  $M_d$  ist Gleichgewicht möglich?



Statisches Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \downarrow: \quad F &= \int (dN \cos \alpha - dH \sin \alpha) \\ &= \cos \alpha \int dN - \sin \alpha \int dH \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright: \quad M_d &= \int (r dN \sin \alpha + r dH \cos \alpha) \\ &= r \sin \alpha \int dN + r \cos \alpha \int dH \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$(5.7) \cdot r \cos \alpha + (5.8) \cdot \sin \alpha \Rightarrow Fr \cos \alpha + M_d \sin \alpha = r \int dN \quad (5.9)$$

$$(5.7) \cdot r \sin \alpha - (5.8) \cdot \cos \alpha \Rightarrow Fr \sin \alpha - M_d \cos \alpha = -r \int dH \quad (5.10)$$

**Haftbedingung:**

$$|dH| \leq \mu_0 |dN| \quad \text{bzw.} \quad \int |dH| \leq \mu_0 \int |dN| \quad (5.11)$$

Einsetzen von (5.9) & (5.10) in (5.11) führt zu

$$\underbrace{\left| \frac{M_d}{r} \cos \alpha - F \sin \alpha \right|}_{= \int dH} \leq \mu_0 \underbrace{\left( \frac{M_d}{r} \sin \alpha + F \cos \alpha \right)}_{= \int dN}.$$

**Fall 1:**  $\frac{M_d}{r} \cos \alpha - F \sin \alpha \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} (\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha) \leq F (\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} \leq \underbrace{\frac{\mu_0 + \tan \alpha}{1 - \mu_0 \tan \alpha}}_{\tan \rho_0} F$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} \leq \frac{\tan \rho_0 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \rho_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} \leq \tan(\rho_0 + \alpha) F \quad (5.12)$$

**Fall 2:**  $\frac{M_d}{r} \cos \alpha - F \sin \alpha < 0$

$$\Rightarrow F \sin \alpha - \frac{M_d}{r} \cos \alpha \leq \mu_0 \left( \frac{M_d}{r} \sin \alpha + F \cos \alpha \right)$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} (\mu_0 \sin \alpha + \cos \alpha) \geq (-\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha) F$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} \geq \frac{-\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha}{\mu_0 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - \mu_0}{1 + \mu_0 \sin \alpha} F$$

$$\Rightarrow \frac{M_d}{r} \geq \tan(\alpha - \rho_0) F \quad (5.13)$$

Raum für Notizen

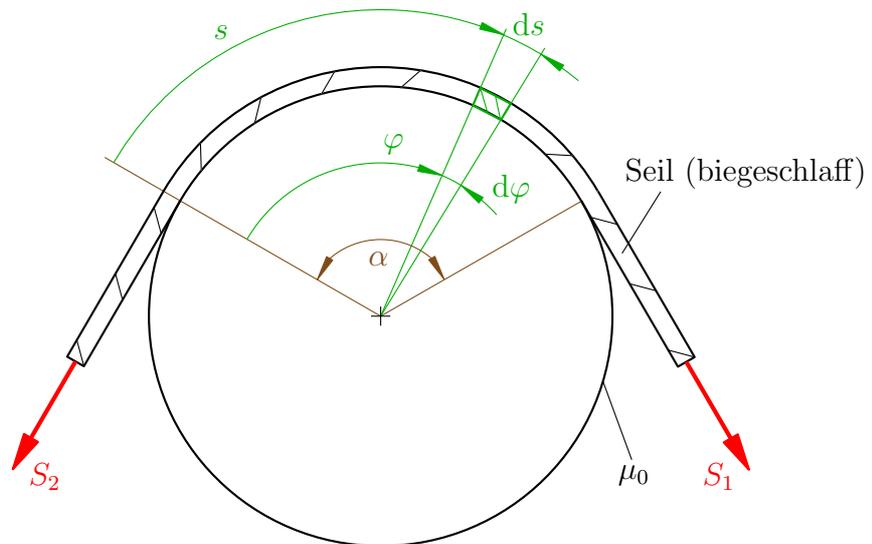
Zusammenfassen der Bedingungen (5.12) und (5.13) liefert

$$F \tan(\alpha - \rho_0) \leq \frac{M_d}{r} \leq F \tan(\alpha + \rho_0) \quad (5.14)$$

**Beachte:** Für  $\alpha < \rho_0$  ist  $\tan(\alpha - \rho_0) < 0$ , und damit ist Bedingung (5.14) automatisch für  $M_d \geq 0$  erfüllt.

⇒ Gleichgewicht auch für  $M_d = 0$  möglich, d.h. **Schraube hält** bzw. es tritt **Selbsthemmung** auf.

### 5.3 Seilreibung

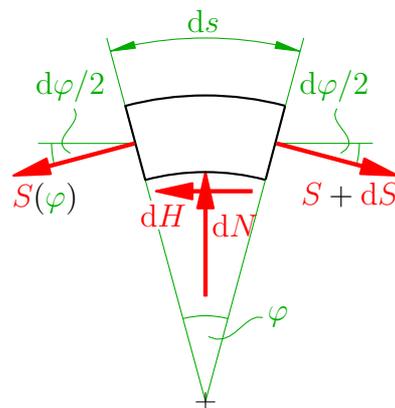


#### a) Haften

Fall 1:  $S_1 > S_2$

ges.: Haftbedingung in Abhängigkeit von  $S_1, S_2, \alpha$  und  $\mu_0$ .

Betrachte infinitesimales Seilstückchen:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \uparrow: \quad & dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \\ \rightarrow: \quad & -dH + (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} - S \cos \frac{d\varphi}{2} = 0 \end{aligned}$$

für kleine Winkel:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx d\varphi \left[ -\frac{1}{6}d\varphi^3 + \dots \right] \\ \cos \varphi &\approx 1 \underbrace{\left[ -\frac{1}{2}d\varphi^2 + \dots \right]}_{\text{vernachlässigbar}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dH = dS \quad (5.15)$$

$$dN = Sd\varphi + \underbrace{\frac{dSd\varphi}{2}}_{\text{vernachlässigbar, da von 2. Ordnung}} \quad (5.16)$$

Haftbedingung am infinitesimalen Element:

$$dH \leq \mu_0 dN \quad (5.17)$$

Einsetzen von (5.15) & (5.16) in (5.17):

$$\begin{aligned} \Rightarrow dS &\leq \mu_0 S d\varphi \\ \text{für } S \geq 0 : \quad \frac{dS}{S} &\leq \mu_0 d\varphi \\ \int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} &\leq \mu_0 \int_0^\alpha d\varphi \\ \ln \frac{S_1}{S_2} &\leq \mu_0 \alpha \\ \Rightarrow S_1 &\leq S_2 e^{\mu_0 \alpha} \end{aligned} \quad (5.18)$$

(Euler-Eytelwein Formel für den Haftungsfall)

Fall 2:  $S_1 < S_2$

Vertauschen von  $S_1$  und  $S_2$  in Gleichung (5.18):

$$\Rightarrow S_2 \leq S_1 e^{\mu_0 \alpha} \quad \Rightarrow S_1 \geq S_2 e^{-\mu_0 \alpha} \quad (5.19)$$

(Haftbedingung beim Ziehen nach links)

Zusammengefasst ergibt sich folgende Bedingung für Haften:

$$S_2 e^{-\mu_0 \alpha} \leq S_1 \leq S_2 e^{\mu_0 \alpha} \quad (5.20)$$

(Haftbedingung für ein auf einem Kreiszyylinder aufgelegtes Seilstück)

Raum für Notizen

b) **Gleiten** (Seil rutscht nach rechts)  
 In diesem Fall ist die Reibungskraft

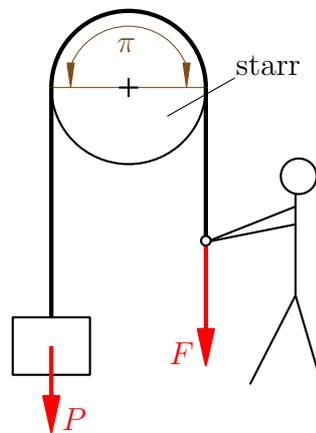
$$dH = \mu_0 dN \tag{5.21}$$

Gleitreibung: Analoges Vorgehen wie im Haftreibungsfall liefert den Zusammenhang

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha} \tag{5.22}$$

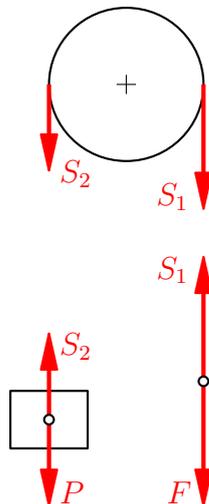
(Euler-Eytelwein Formel für den Gleitfall)

**Beispiel:**



geg.:  $P, \mu_0$   
 ges.:  $F_{\min}, F_{\max}$  für Gleichgewicht

Freischneiden:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$S_2 = P, \quad S_1 = F$$

$$F_{\min} : S_1 \geq S_2 e^{-\mu_0\alpha}$$

$$\Rightarrow F_{\min} = P e^{-\mu_0\pi}$$

$$F_{\max} : S_1 \leq S_2 e^{\mu_0\alpha}$$

$$\Rightarrow F_{\max} = P e^{\mu_0\pi}$$

Zahlenwerte:

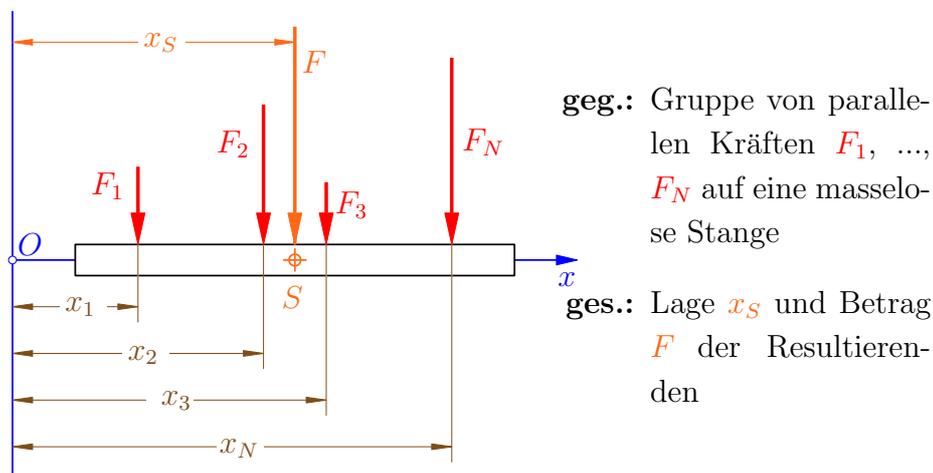
$$\begin{aligned}
 P &= 100 \text{ kg} & \mu_0\pi &\cong 1,57 \\
 \mu_0 &= 0,5 & \Rightarrow e^{-\mu_0\pi} &= 0,2 & \Rightarrow F_{\min} &= 20 \text{ kp} \\
 & & e^{\mu_0\pi} &= 4,8 & F_{\max} &= 480 \text{ kp}
 \end{aligned}$$

## 6 Verteilte Kräfte, Schwerpunkt, Massenmittelpunkt

### 6.1 Schwerpunkt einer Gruppe von parallelen Kräften

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, wie man zwei, drei, vier Kräfte  $F_i$  graphisch auf eine Einzelkraft, die Resultierende  $F$ , bzw. ein Einzelmoment reduzieren kann. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips auf mehrere (ggf. unendlich viele) verteilte Lasten führt zum Begriff des *Schwerpunkts einer Gruppe von Kräften*.

#### Beispiel 1:



Damit  $F$  äquivalent zum System von Kräften  $F_1, \dots, F_N$  ist, muss ihr Betrag gleich der Summe der Beträge der Kräfte  $F_i$  und ihr Moment bezüglich eines beliebigen Aufpunktes  $O$  gleich der Summe der Momente der Kräfte  $F_i$  bzgl.  $O$  sein:

$$\downarrow: \quad F = \sum_{i=1}^N F_i$$

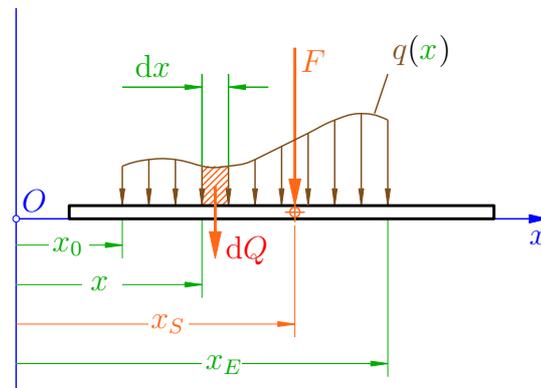
$$\curvearrowright: \quad F x_S = \sum_{i=1}^N x_i F_i \Rightarrow$$

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^N x_i F_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$$

Das System von Kräften  $F_i$  kann somit durch eine Einzelkraft  $F$  ersetzt werden, welche im Punkt  $S$  angreift. Man bezeichnet  $S$  als den *Kräftemittelpunkt* oder den *Schwerpunkt* des Kräftesystems  $F_i$  und  $x_S$  als die entsprechende *Schwerpunktskoordinate* in Richtung der  $x$ -Achse.

Raum für Notizen

Der vorstehende Zusammenhang läßt sich ohne weiteres auf **kontinuierlich verteilte, parallele Lasten** verallgemeinern.



**Linienlast** (Streckenlast)

$$q(x) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} = \frac{dQ}{dx}$$

Last am Balkenelement:

$$dQ = q(x)dx$$

$Q$ : Last entlang des Stückes  $(x_0, x)$

**Beispiele:** Eigengewicht (Kette), Wind-, Schneelast, Beladungen „Sandhaufen“

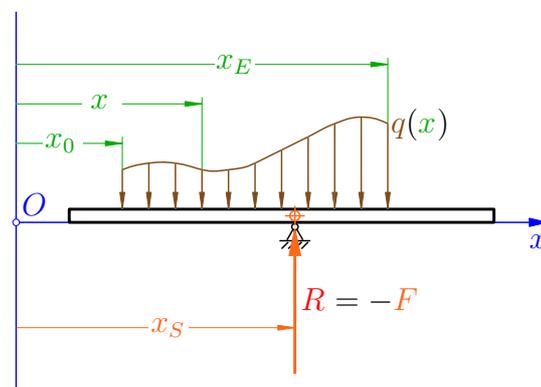
**Resultierender Kraftwinder:**

$$\downarrow: F = \int_{x_0}^{x_E} dQ = \int_{x_0}^{x_E} q(x)dx$$

$$\curvearrow: Fx_S = \int_{x_0}^{x_E} \underbrace{x dQ}_{dM_0(x)} = \int_{x_0}^{x_E} x q(x)dx$$

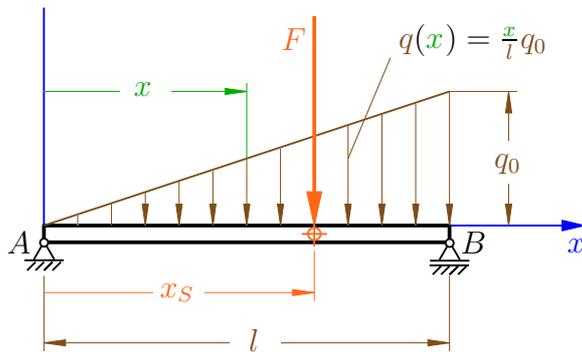
$$\Rightarrow \boxed{x_S = \frac{\int_{x_0}^{x_E} x q(x)dx}{\int_{x_0}^{x_E} q(x)dx}} \quad \text{Schwerpunkt } S$$

**Wichtig:** Da sich die Streckenlast  $q(x)$  durch eine äquivalente Einzelkraft  $F$  ersetzen läßt, wird sie durch eine entsprechende gegengerichtete Kraft  $R$  im Gleichgewicht gehalten.



Lagert man die Stange drehbar im Schwerpunkt  $S$ , so befindet sie sich im Gleichgewicht, d.h. sie „wippt“ nicht.

**Beachte:** Werden innere Kräfte nicht gesucht, so ist die Streckenlast der im Schwerpunkt angreifenden resultierenden Einzelkraft **vollständig** äquivalent.

**Beispiel 2:** Balken mit dreieckförmiger Streckenlast

Bestimme die Lage und den Betrag der Resultierenden  $F$

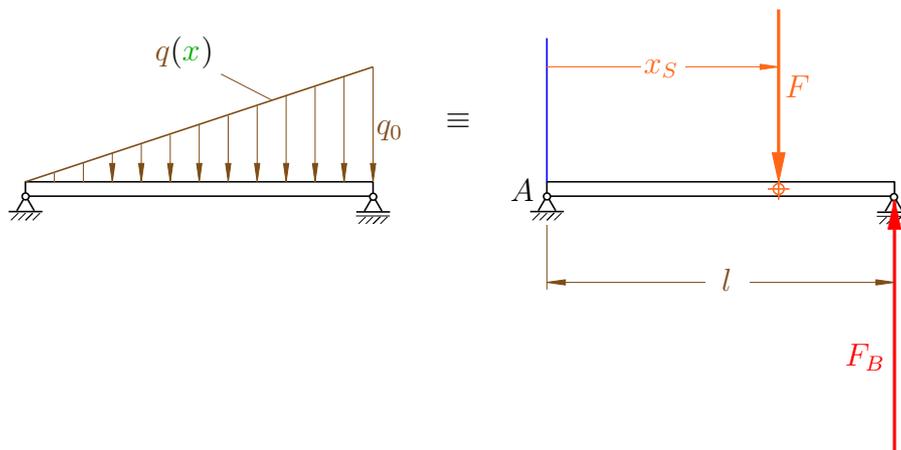
a) Betrag: 
$$F = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l \frac{x}{l} q_0 dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l x dx = \frac{1}{2} \frac{q_0}{l} l^2$$

$$F = \frac{1}{2} q_0 l \equiv \text{Dreiecksfläche}$$

b) Lage: 
$$x_S = \frac{1}{F} \int_0^l q(x) x dx = \frac{2}{q_0 l} \frac{q_0}{l} \int_0^l x x dx = \frac{2}{l^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{2}{3} l$$

**Anwendung:** Bestimmung der Lagerkraft in  $B$ 

Durch die Äquivalenz von Streckenlast und Resultierender kann man erstere durch letztere ersetzen.



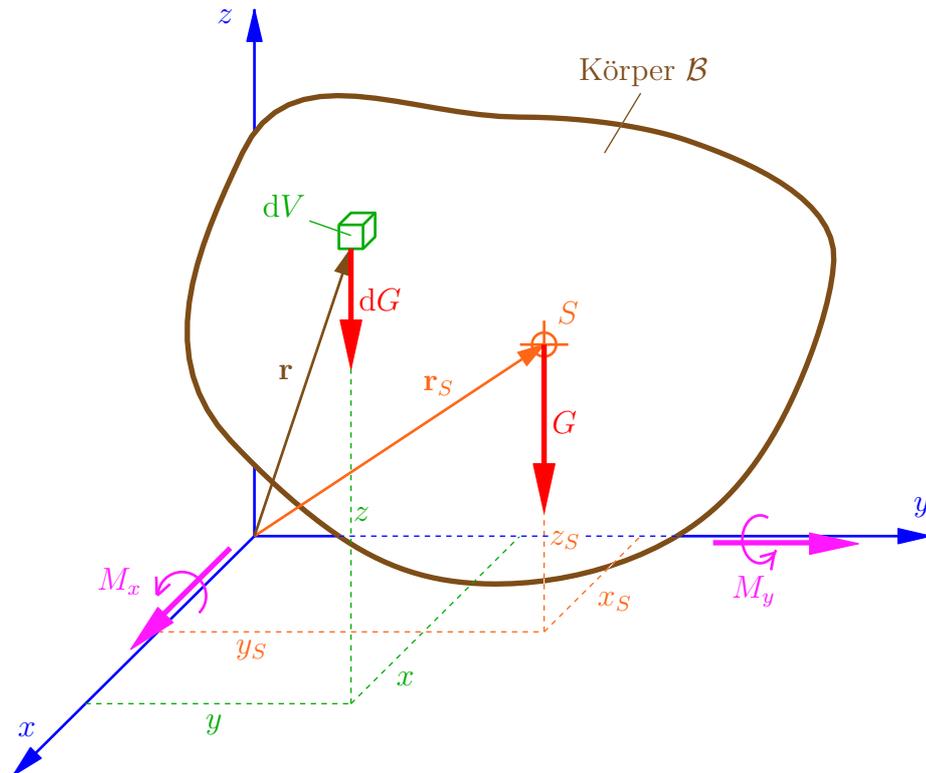
Somit folgt für die Lagerkraft  $F_B$  aufgrund des Momentengleichgewichts bzgl.  $A$ :

$$\overset{\curvearrowright}{A}: F x_S - F_B l = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{F x_S}{l} = \frac{\frac{1}{2} q_0 l \frac{2}{3} l}{l} = \frac{1}{3} q_0 l$$

Raum für Notizen

### 6.2 Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers



- geg.:  $\rho$  ..... Dichte  $\equiv \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$   
 $\gamma = g\rho$  ..... spezifisches Gewicht  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$   
 $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ... Erdbeschleunigung (Wert am Äquator)  
 ges.: Resultierende  $G$

**Idee:** Zerlege Körper in (unendlich viele) infinitesimale Volumenelemente

**Gewichtskraft je Volumenelement:**

$$dG = \gamma dV = g \underbrace{\rho dV}_{=dm} = g dm$$

$dm$  ... Masse des infinitesimalen Volumenelements

**Resultierende:**

a) Betrag:  $G = \int_B dG = \int_B g\rho dV$

b) Lage:  $\curvearrowright \sum M_x : -G y_S = - \int_B dG y = - \int_B g\rho y dV$   
 $\Rightarrow y_S = \frac{1}{G} \int_B g\rho y dV$

$\curvearrowright$  um  $y$ -Achse:  $G x_S = \int_B dG x$   
 $\Rightarrow x_S = \frac{1}{G} \int_B g\rho x dV$

bei Wirkung der Gravitation z.B. in  $y$ -Richtung auch

$$z_S = \frac{1}{G} \int_B g \rho z dV$$

$x_S, y_S, z_S$ : Koordinaten des „Schwerpunktes“

### Anschauliche Bedeutung des Schwerpunkts:

Lagert man den Körper drehbar im Schwerpunkt, so befindet er sich in jeder Orientierung im Gleichgewicht.

Aus der Definition des Schwerpunkts ergeben sich die folgenden Spezialfälle:

a)  $\boxed{g = \text{const.}}$   $G = g \int_B \rho dV = gm$

$$x_S = \underbrace{\frac{g}{G}}_{= \frac{1}{m}} \int_B x \rho dV = x_M; \quad x_M = \frac{1}{m} \int_B x \rho dV$$

$$y_S = y_M; \quad y_M = \frac{1}{m} \int_B y \rho dV$$

$$z_S = z_M; \quad z_M = \frac{1}{m} \int_B z \rho dV$$

$x_M, y_M, z_M$ : Koordinaten des „Massenmittelpunktes“

b)  $\boxed{g = \text{const.}, \rho = \text{const.}}$   $\rho = \frac{m}{V}$

$$x_S = x_M = \frac{\rho}{m} \int_B x dV = \frac{1}{V} \int_B x dV = x_V$$

$x_V, y_V, z_V$ : Koordinaten des „Volumenschwerpunktes“

### Vektordarstellung der Schwerpunktskoordinate:

Fasst man die Koordinaten zu Vektoren

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_V = \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

zusammen, so lauten die Formeln für Schwerpunkt, Massen- und Volumenmittelpunkt kompakt

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{G} \int_B g \mathbf{r} \rho dV \quad \text{Schwerpunkt}$$

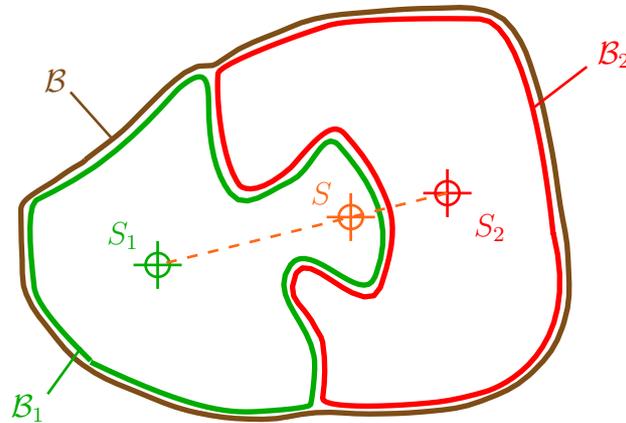
$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} dV \quad \text{Massenmittelpunkt}$$

$$\mathbf{r}_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \quad \text{Volumenmittelpunkt}$$

Raum für Notizen

### 6.3 Grundregeln für die Berechnung von Massenmittelpunkten und Schwerpunkten

#### 6.3.1 Zusammensetzung von Teilkörpern zu Gesamtkörpern

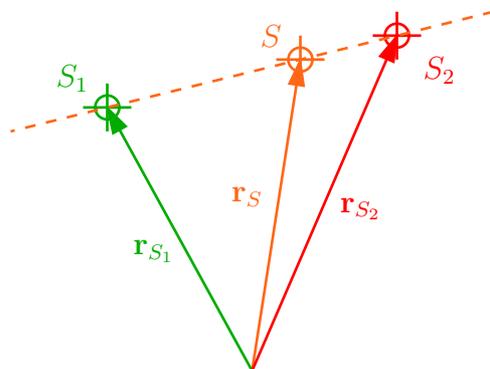


Setzt man einen Körper  $B$  aus zwei Teilkörpern  $B_1$  und  $B_2$  zusammen, so ergibt sich für den resultierenden Gesamtschwerpunkt:

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{G} \int_B g \mathbf{r} \rho dV = \frac{1}{G} \left( \underbrace{\int_{B_1} g \mathbf{r} \rho dV}_{G_1 \mathbf{r}_{S_1}} + \underbrace{\int_{B_2} g \mathbf{r} \rho dV}_{G_2 \mathbf{r}_{S_2}} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_S = \frac{G_1 \mathbf{r}_{S_1} + G_2 \mathbf{r}_{S_2}}{G_1 + G_2}$$

Der Gesamtschwerpunkt  $\mathbf{r}_S$  ergibt sich als Linearkombination der Teilschwerpunkte.



$\Rightarrow$  Der Schwerpunkt muss auf der Verbindungslinie zwischen den Teilschwerpunkten liegen.

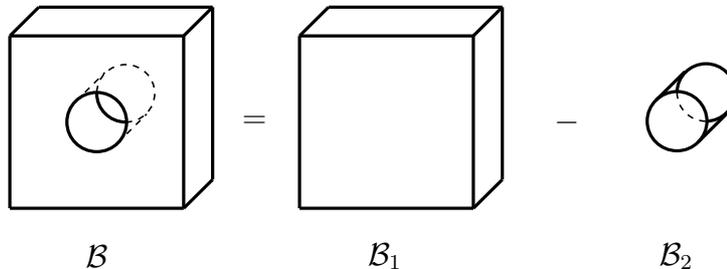
Verallgemeinerung auf  $n_B$  Teilkörper:

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum G_i \mathbf{r}_{S_i}}{\sum G_i}$$

### 6.3.2 Berücksichtigung von „Löchern“ bzw. ausgestanzten Teilen

Vorgangsweise identisch mit 6.3.1, sofern man für die ausgestanzten „Teile“ („Löcher“) negative Gewichte, Massen bzw. Volumina annimmt.

**Beispiel:** Gelochte Platte  $\mathcal{B} = \text{volle Platte } \mathcal{B}_1 - \text{Bohrung } \mathcal{B}_2$

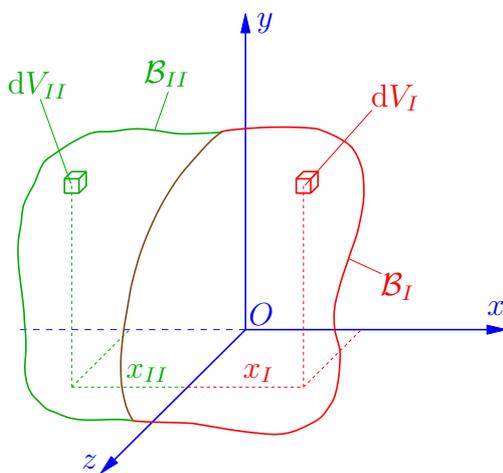


Für den Gesamtschwerpunkt folgt damit

$$\mathbf{r}_S = \frac{G_1 \mathbf{r}_{S_1} - G_2 \mathbf{r}_{S_2}}{G_1 - G_2}$$

### 6.3.3 Symmetrieachsen bzw. Ebenen

Ist ein Körper symmetrisch zu einer Ebene, so läßt sich durch Festlegen des Ursprungs (Koordinatenursprung) auf dieser Ebene folgendes feststellen:



Der Körper besteht aus zwei spiegelbildlichen Teilkörpern  $\mathcal{B}_I$  und  $\mathcal{B}_{II}$ , und zu jedem Teilchen  $dV_I$  mit den Koordinaten  $x_I, y_I, z_I$  existiert ein „antipodales“ Teilchen  $dV_{II}$  mit den Koordinaten  $x_{II}, y_{II}, z_{II}$ , wobei

$$x_{II} = -x_I$$

$$y_{II} = y_I$$

$$z_{II} = z_I$$

Für die  $x$ -Koordinaten des Schwerpunktes erhält man somit

$$x_S = \frac{1}{G} \int_{\mathcal{B}} \rho g x dV = \frac{1}{G} \left[ \int_{\mathcal{B}_I} \rho g x_I dV_I + \int_{\mathcal{B}_{II}} \rho g x_{II} dV_{II} \right].$$

Mit  $x_{II} = -x_I$ ,  $\mathcal{B}_{II} = \mathcal{B}_I$  und  $dV_{II} = dV_I$  folgt

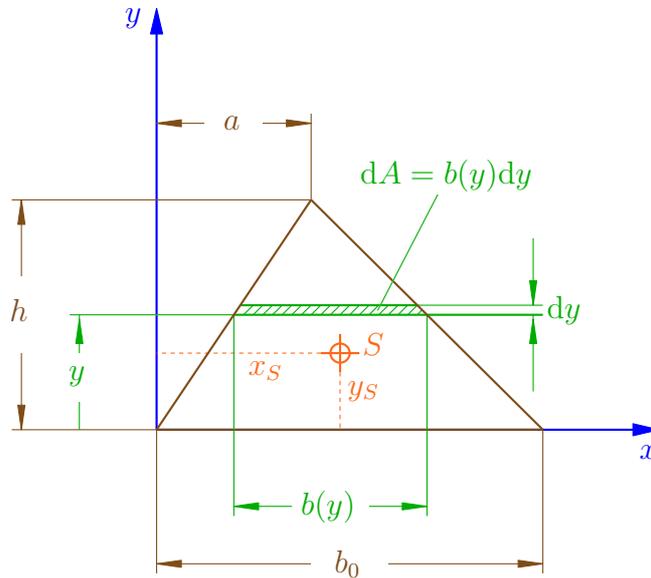
$$x_S = \frac{1}{G} \left[ \int_{\mathcal{B}_I} \rho g x_I dV_I - \int_{\mathcal{B}_I} \rho g x_I dV_I \right] = 0!$$

Weist der Körper eine Symmetrieebene auf, so liegt der Schwerpunkt stets auf dieser Ebene!

Raum für Notizen

### 6.4 Flächenschwerpunkt

Beispiel: Dreieck



ges.: Koordinaten  $x_S$ ,  $y_S$  des Flächenschwerpunktes

Bestimmung von  $y_S$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_A y \, dA$$

**Tip:** Wähle Flächenelement  $dA$  stets so, dass zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Schwerpunkt von  $dA$  ist ad hoc bekannt
- Das Integral über  $dA$  ist lösbar

$$b(y) = ?$$

Strahlensatz:

$$\frac{b(y)}{h - y} = \frac{b_0}{h} \quad \Rightarrow \quad b(y) = \frac{b_0}{h}(h - y)$$

Fläche:

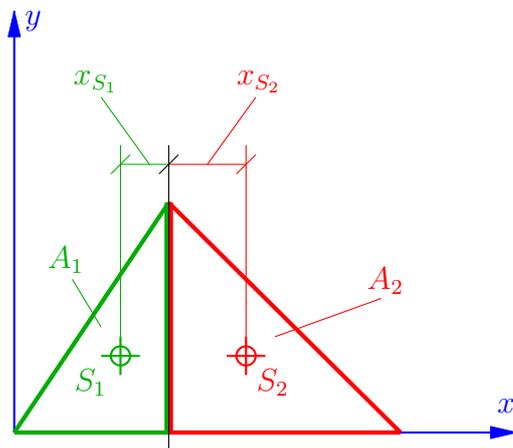
$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_0^h b(y) dy = \int_0^h \frac{b_0}{h}(h - y) dy \\ &= \frac{b_0}{h} \int_0^h (h - y) dy = -\frac{b_0}{h} \frac{1}{2} [(h - y)^2]_0^h \\ A &= \frac{1}{2} \frac{b_0}{h} h^2 = \frac{1}{2} b_0 h \end{aligned}$$

Schwerpunktskoordinaten  $y_S$ :

$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{\frac{1}{2}b_0h} \int_0^h y \frac{b_0}{h}(h-y) dy \\
 &= \frac{2}{h^2} \int_0^h y(h-y) dy = \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{2}hy^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^h \\
 &= \frac{2}{h^2} \underbrace{\left[ \frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3 \right]}_{= \frac{1}{6}h^3} \\
 y_S &= \frac{1}{3}h
 \end{aligned}$$

### Bestimmung von $x_S$

z.B. durch Zerlegung in zwei Teildreiecke



Für beide Teildreiecke gilt:

$$\begin{aligned}
 x_{S_1} &= \frac{1}{3}a \\
 x_{S_2} &= \frac{1}{3}(b_0 - a) \\
 A_1 &= h \frac{a}{2} \\
 A_2 &= h \frac{b_0 - a}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{A_1 \frac{2}{3}a + A_2 \left( a + \frac{1}{3}(b_0 - a) \right)}{\underbrace{A_1 + A_2}_{= A = \frac{1}{2}b_0h}}
 \end{aligned}$$

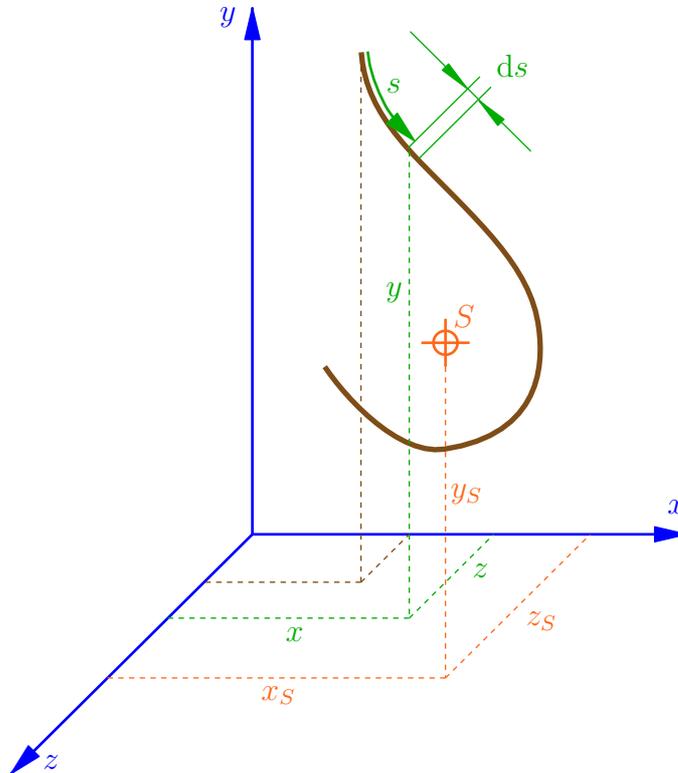
$$x_S = \frac{\frac{ha}{2} \frac{2}{3}a + \frac{h(b_0 - a)}{2} \left( a + \frac{1}{3}(b_0 - a) \right)}{\frac{1}{2}b_0h}$$

$$x_S = \frac{\frac{2}{3}a^2 + (b_0 - a) \left( \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b_0 \right)}{b_0}$$

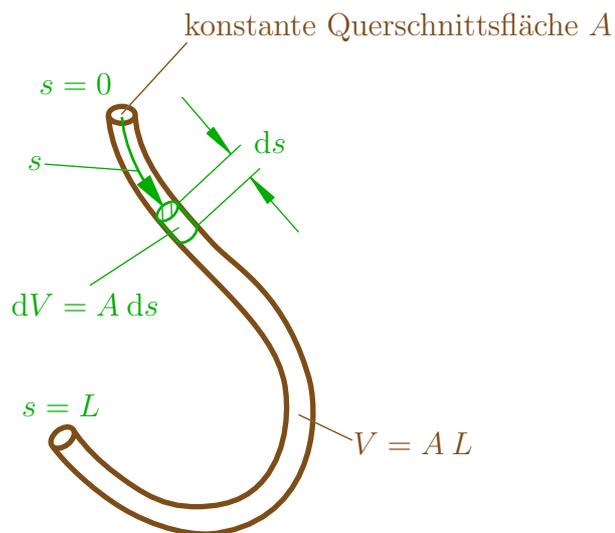
Raum für Notizen

### 6.5 Linienschwerpunkt

#### 1) Linienmodell



#### 2) Volumenmodell



Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten

$$x_S = \frac{1}{V} \int_V x dV = \frac{1}{AL} \int x A ds = \frac{1}{L} \int_0^L x ds$$

Analog

$$y_S = \frac{1}{L} \int_0^L y ds$$

$$z_S = \frac{1}{L} \int_0^L z ds$$

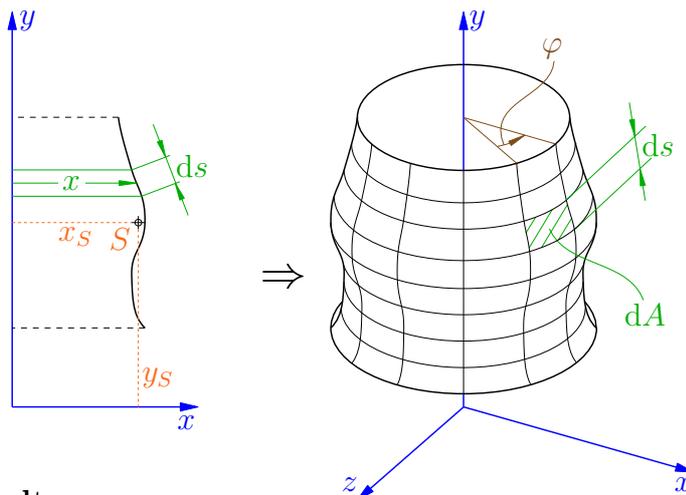
 $x_S, y_S, z_S$ : Koordinaten des Linienschwerpunktes

## 6.6 Formeln von Pappus und Guldin

Pappus von Alexandria: griech. Mathematiker um 300

Guldin, Habakuk Paul: \* St.Gallen 1577, † Graz 1643,  
Professor in Wien und Graz

### 1. Formel von Pappus und Guldin

geg.: Linie in der Ebene  $\Rightarrow$  Rotation um  $y$ -Achse

#### Flächeninhalte:

Flächenelement:  $dA = \underbrace{ds}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{\varphi x}_{\text{Breite}}$ 

Streifen entlang der Linie:

$$A_{\text{Streifen}} = \int_0^L dA = \int_0^L \varphi x ds = \varphi \underbrace{\int_0^L x ds}_{Lx_S}$$

$$A_{\text{Streifen}} = \varphi L x_S$$

 $x_S$  ... Linienschwerpunkt

#### Rotationsfläche:

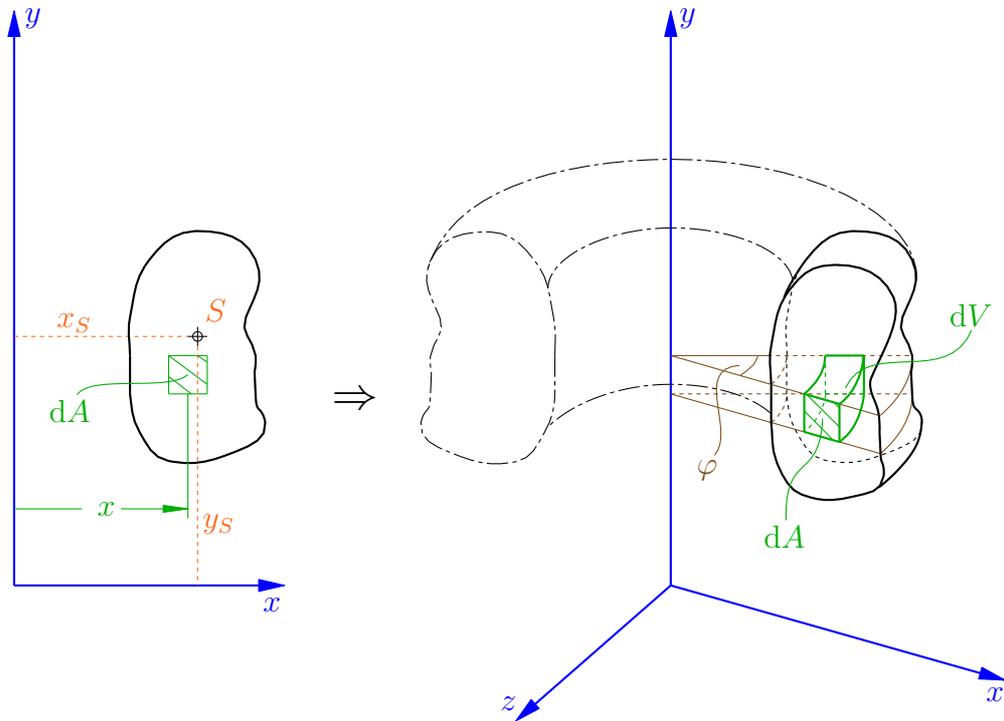
$$A = 2\pi L x_S$$

Formel von Pappus und Guldin zur Bestimmung der Oberfläche eines Rotationskörpers

Raum für Notizen

## 2. Formel von Pappus und Guldin

geg.: Fläche  $\Rightarrow$  Rotation um  $y$ -Achse



### Volumeninhalt:

Volumenelement:  $dV = dA\varphi x$   $\varphi x$ ....Bogenelement

Segment:

$$V_{Segment} = \int_V dV = \int_A \varphi x dA = \varphi \underbrace{\int_A x dA}_{Ax_S}$$

$$V_{Segment} = \varphi Ax_S$$

$x_S$  ... Koordinate des Schwerpunktes der Fläche

### Rotationskörper:

$$V = 2\pi Ax_S$$

Formel von Pappus und Guldin zur Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers

## 7 Balkenstatik

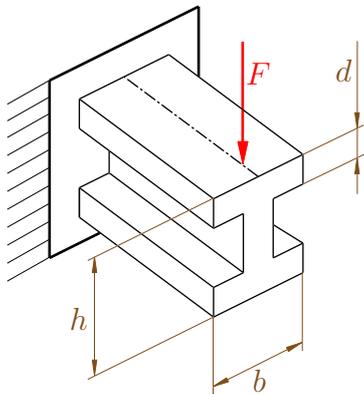
**Bisher:** Ermittlung der Schnittkräfte und -momente nur an Lagern und Stäben.

**Nunmehr:** Bestimmung der Schnittkräfte und -momente innerhalb von Körpern, hier: *eindimensionale Körper* („Balken“)

**Anwendung:**

- a) Dimensionierung von Bauteilen aufgrund der auftretenden und zulässigen Spannungen

**Beispiel:**



geg.:  $F$

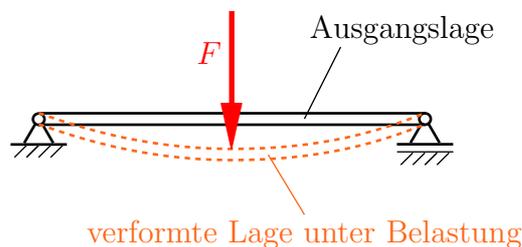
ges.:  $b, d, h$  so, dass Träger nicht bricht

**Lösung:**

- 1.) Ermittlung der Stelle, an der die größten Belastungen auftreten (Statik)
- 2.) Dimensionierung des Querschnittes, so dass der Träger hält (Festigkeitslehre)

- b) Ermittlung von Durchbiegungen ( $\rightarrow$  Elastostatik bzw. Festigkeitslehre)

**Beispiel:**



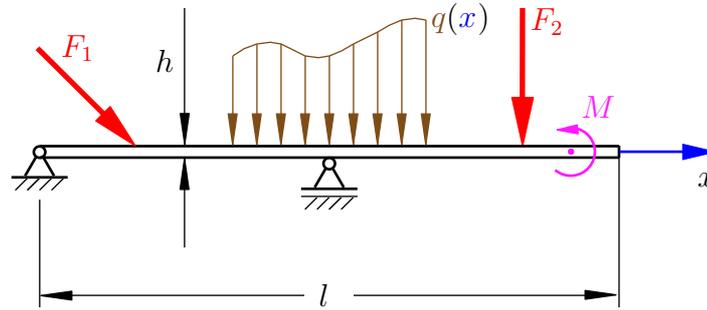
**Schritte zur Berechnung der Verformung:**

- 1.) Berechnung der Schnittreaktionen entlang des Balkens (Statik)
- 2.) Ermittlung der Verformung als Funktion der Schnittreaktionen und des „Widerstandes“ des Balkenquerschnitts (Flächenträgheitsmoment) (Festigkeitslehre)

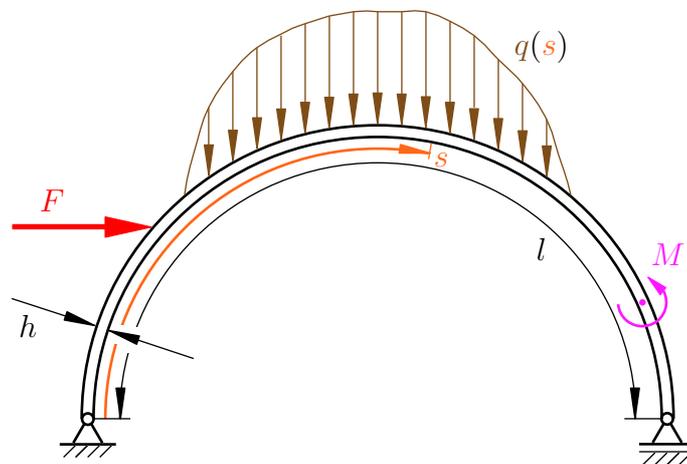
Raum für Notizen

Arten von „Balken“:

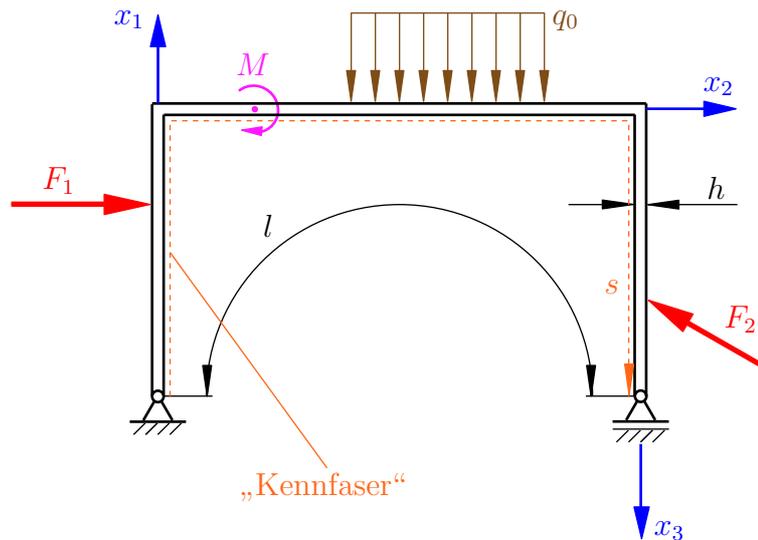
1) gerader Balken



2) gekrümmter Balken (Bogenträger)

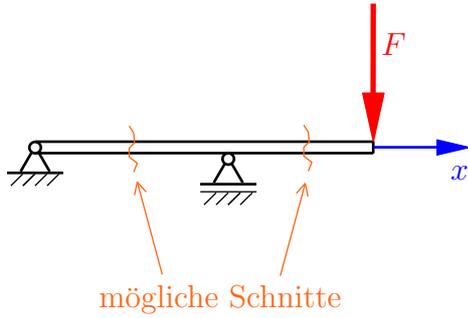


3) Rahmenträger



### 7.1 Schnittreaktionen beim geraden, ebenen Balken

Beispiel:

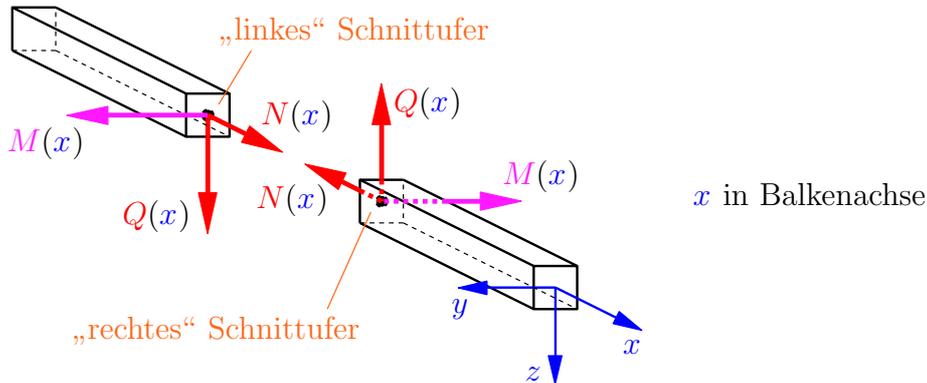


**Beachte:** Je nach Lage des Schnittes entstehen unterschiedliche Schnittkräfte und -momente!

Allgemein: Wähle beliebige Lage des Schnittes als Funktion der „Balkenkoordinate“  $x$

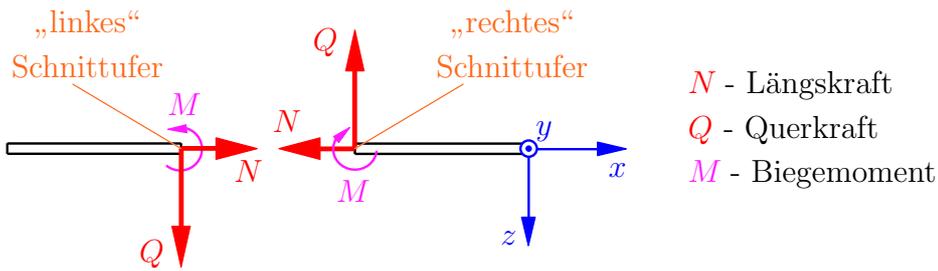
#### Konvention für Koordinatensysteme und Schnittgrößen

##### 1) Koordinatensystem



$x$  in Balkenachse

##### 2) Schnittreaktionen



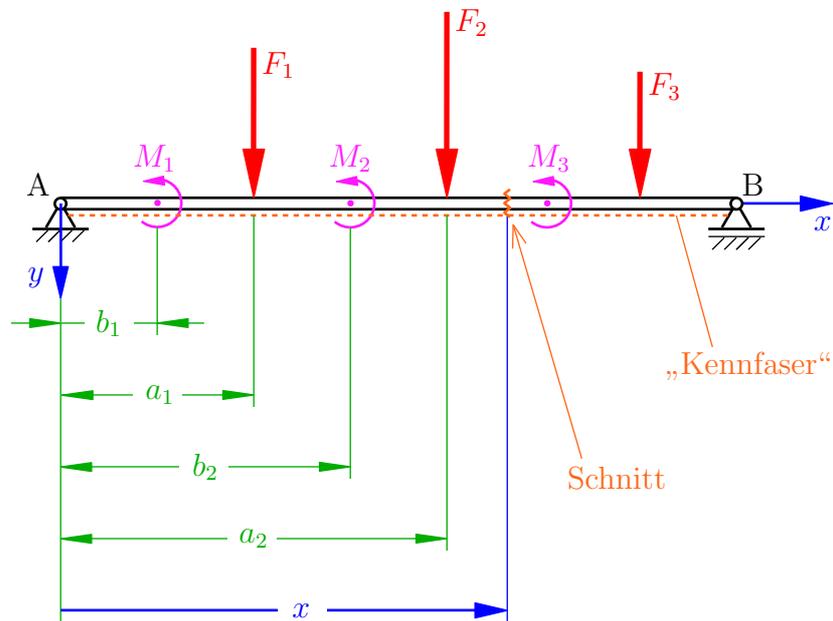
$N$  - Längskraft  
 $Q$  - Querkraft  
 $M$  - Biegemoment

**Vereinbarung:** Positive Schnittreaktionen zeigen am linken Schnittufer in positive Koordinatenrichtung

Raum für Notizen

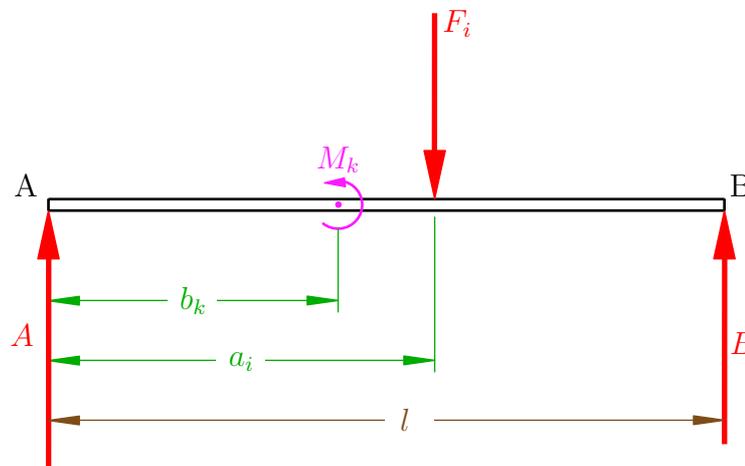
### 7.2 Schnittgrößenverlauf bei Einzellasten

Beispiel:



ges.: Schnittreaktionen an einer allgemeinen Stelle  $x$

#### 1.) Ermittlung der Auflagerkräfte



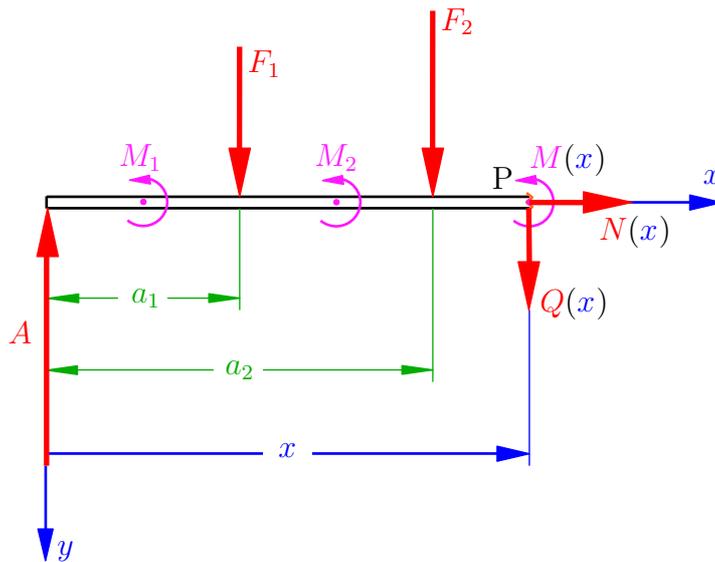
$$\sum M_A : \quad Bl + \sum_{k=1}^{n_M} M_k - \sum_{i=1}^{n_F} F_i a_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{-M_1 - M_2 - M_3 + \sum F_i a_i}{l}}$$

$$\sum F_z : \quad A + B - \sum F_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \sum F_i (l - a_i)}{l}}$$

## 2.) Ermittlung des Schnittgrößenverlaufes



Freischnitt linker Balkenteil:

$$\sum F_z : \quad Q(x) = A - F_1 - F_2$$

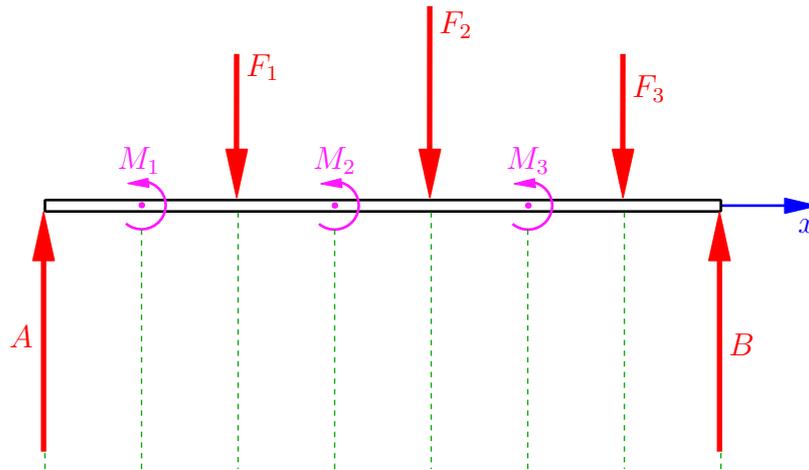
$$\sum M_P : \quad M(x) = Ax - \sum F_i(x - a_i) - M_1 - M_2$$

**Beachte:** Es gilt Abschnittsweise

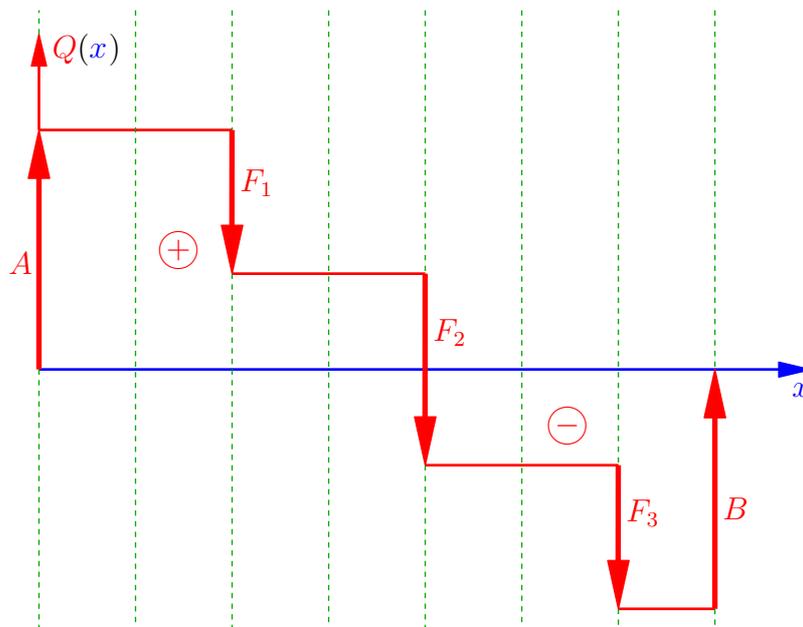
$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Raum für Notizen

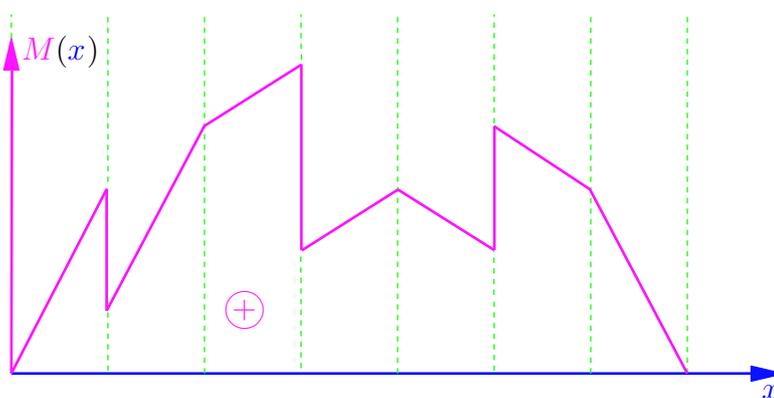
**graphische Auftragung:**



$Q(x)$ -Linie:

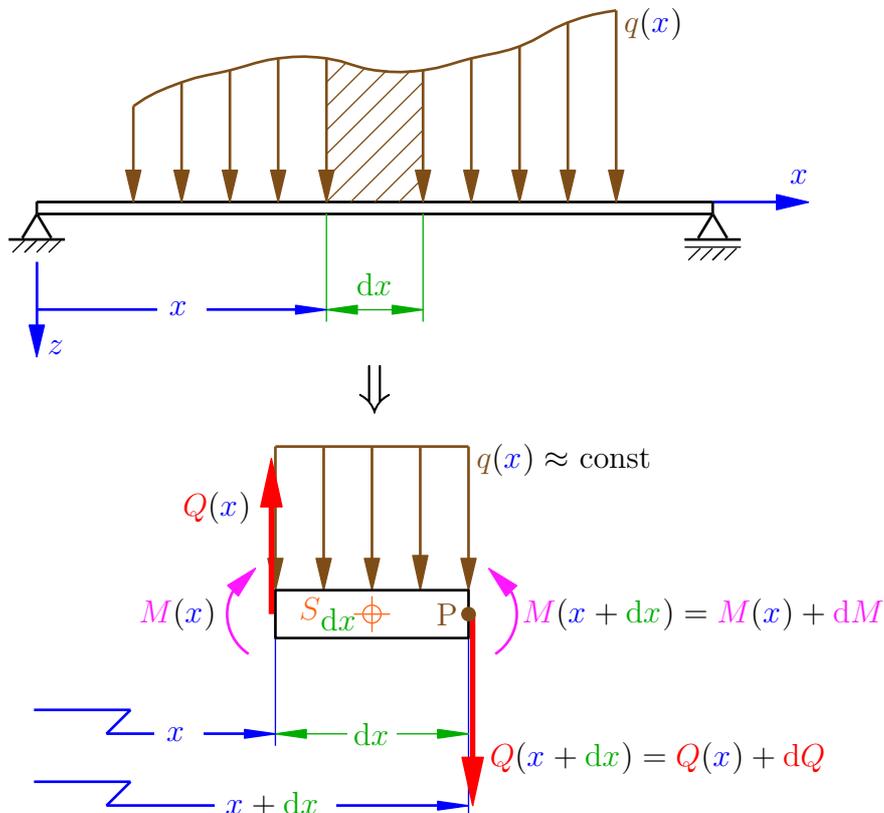


$M(x)$ -Linie:



### 7.3 Schnittgrößenverlauf bei kontinuierlichen Lasten

#### 1) Betrachtungen am infinitesimalen Balkenelement



$S_{dx}$ : lokaler Schwerpunkt der Streckenlast am infinitesimalen Balkenelement

Schnittgrößenbilanz am infinitesimalen Balkenelement:

$$\downarrow: -Q(x) + q(x)dx + Q(x) + dQ(x) = 0$$

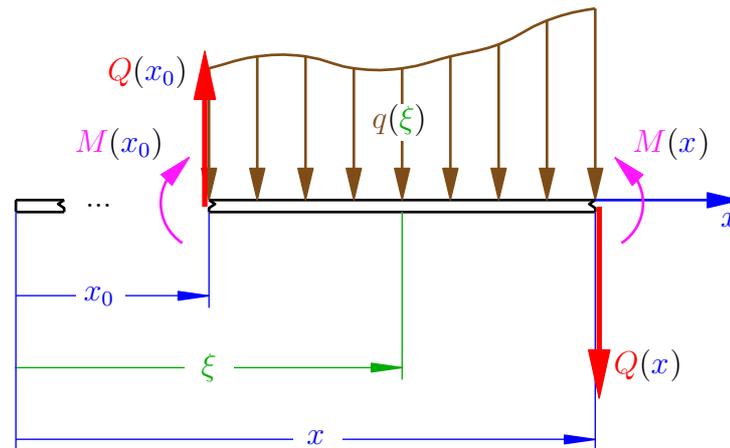
$$\Rightarrow \boxed{q(x) = -\frac{dQ(x)}{dx}} \quad (7.1)$$

$$\widehat{P}: -M(x) - Q(x)dx + q(x)dx \frac{dx}{2} + M(x) + dM(x) = 0 \quad (7.2)$$

$q(x)dx \frac{dx}{2}$  ... vernachlässigbar, da 2. Ordnung

$$\Rightarrow \boxed{Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}} \quad (7.3)$$

2) Schnittgrößenverlauf an endlichen Balkenabschnitten



Integration der Differentialgleichungen (7.1) und (7.3) liefert

- bei bestimmter Integration:

$$(7.1) \quad \rightarrow \quad Q(x) = Q(x_0) - \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi \quad (7.4)$$

$$(7.3) \quad \rightarrow \quad M(x) = M(x_0) + \int_{x_0}^x Q(\xi) d\xi \quad (7.5)$$

- bei unbestimmter Integration:

$$Q(x) = - \int q(\xi) d\xi + C_1$$

$$M(x) = \int Q(\xi) d\xi + C_2$$

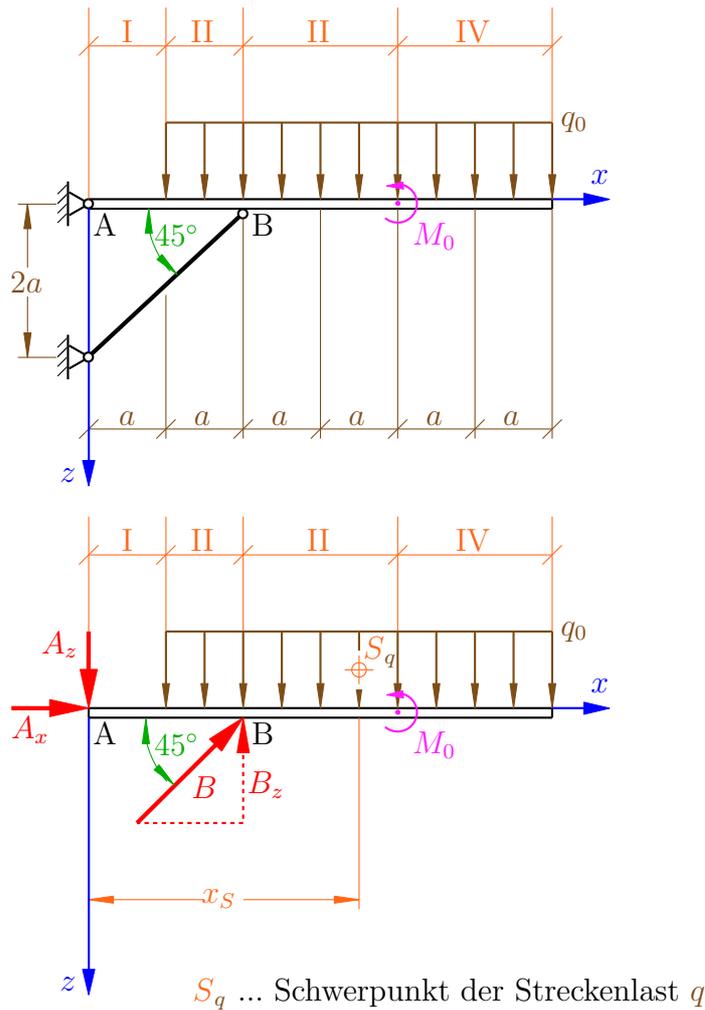
Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  müssen hier noch bestimmt werden!

**Beachte:** Bestimmte oder unbestimmte Integration ist nur in Bereichen mit stetigen Funktionsverläufen  $q(x)$ ,  $Q(x)$  zulässig. Einzellasten müssen gesondert berücksichtigt werden.

7.4 Schnittgrößenverlauf bei Mehrfeldbelastung

**Definition:**

Ein **Feld** bezeichnet einen Balkenabschnitt, in dem die Belastung durch eine kontinuierliche Funktion beschrieben wird. Einzelne Felder eines Balkens werden also durch Einzelbelastungen (Kräfte oder Momente), Knicke bzw. Sprünge in den Streckenlasten oder Auflager voneinander getrennt.

**Beispiel:** Durch Pendelstütze fixierter Balken

**Bestimmung des Querkraft- und Momentenverlaufs** (ohne Normalkräfte)

**Auflagerkräfte**

$$\overset{\curvearrowright}{M}_A: B_z 2a + M_0 - (5aq_0)x_S = 0$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{35}{4}aq_0 - \frac{M_0}{2a} \quad (7.6)$$

$$\left[ B = \sqrt{2}B_z = \frac{35}{2\sqrt{2}}aq_0 - \frac{M_0}{\sqrt{2}a} \right]$$

$$\uparrow: A_z - B_z + 5aq_0 = 0$$

$$\Rightarrow A_z = B_z - 5aq_0 = \frac{15}{4}aq_0 - \frac{M_0}{2a} \quad (7.7)$$

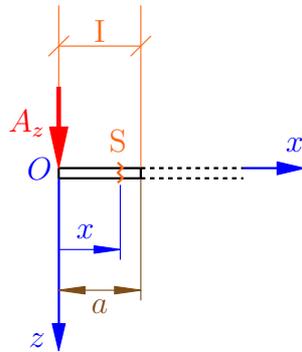
$$\rightarrow: A_x + B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow A_x = -B_z = -\frac{35}{4}aq_0 + \frac{M_0}{2a} \quad (7.9)$$

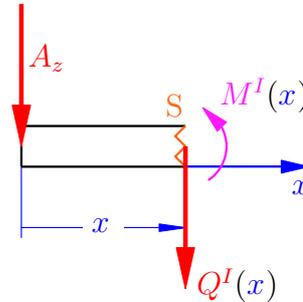
Raum für Notizen

**Schnittgrößenverläufe in den einzelnen Feldern** (ohne Normalkräfte)

**Feld I:**  $0 \leq x < a$



**Schnittreaktionen an der Stelle S:**

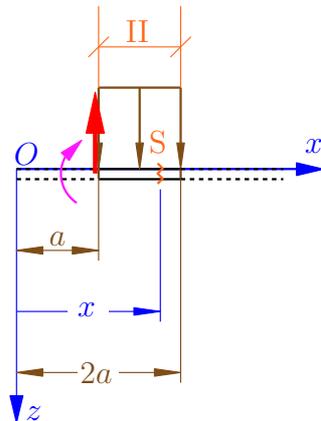


Gleichgewicht am linken Balkenabschnitt:

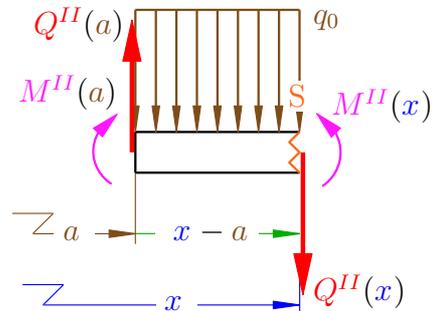
$$Q^I(x) = -A_z \tag{7.10}$$

$$M^I(x) = -A_z x \tag{7.11}$$

**Feld II:**  $a \leq x < 2a$



**Schnittreaktionen an der Stelle S:**



**Querkraft:**  $dQ = -q_0 dx$

$$\rightsquigarrow \int_{Q^II(a)}^{Q^II(x)} dQ = - \int_a^x \underbrace{q(\xi)}_{=q_0=const} d\xi$$

$$\Rightarrow Q^II(x) = \underbrace{Q^II(a)}_{=C_1} - q_0(x - a) \tag{7.12}$$

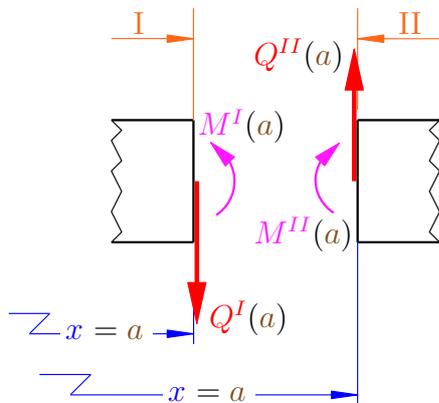
**Moment:**  $dM = Q dx$

$$\rightsquigarrow \int_{M^II(a)}^{M^II(x)} dM = \int_a^x Q(\xi) d\xi = Q^II(a)(x - a) - \frac{1}{2} q_0(x - a)^2$$

$$\Rightarrow M^II(x) = \underbrace{M^II(a)}_{=C_2} + \underbrace{Q^II(a)}_{=C_1}(x - a) - \frac{1}{2} q_0(x - a)^2 \tag{7.13}$$

**Ermittlung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  ( $Q^I(a)$ ,  $M^I(a)$ )**

Übergangsbedingung Feld I  $\rightleftharpoons$  Feld II:



Aus dem Prinzip aktio = reaktio an den korrespondierenden Flanken folgen die Bedingungen

$$Q^{II}(a) = Q^I(a) \quad (7.14)$$

$$M^{II}(a) = M^I(a) \quad (7.15)$$

Übergangsbedingungen für Unstetigkeit in der Streckenlast

Auswertung von (7.14), (7.15) mit (7.10)  $\div$  (7.13) liefert

$$C_1 \equiv Q^{II}(a) = -A_z$$

$$C_2 \equiv M^{II}(a) = -A_z a$$

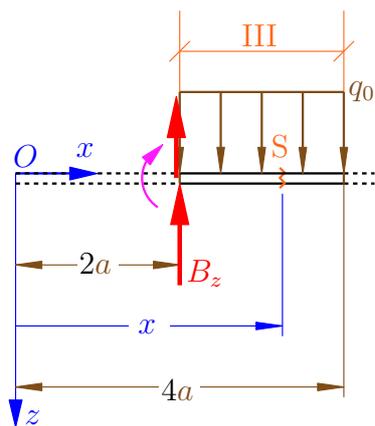
Daraus ergeben sich die Querkraft  $Q^{II}(x)$  und das Moment  $M^{II}(x)$ :

$$Q^{II}(x) = -A_z - q_0(x - a) \quad (7.16)$$

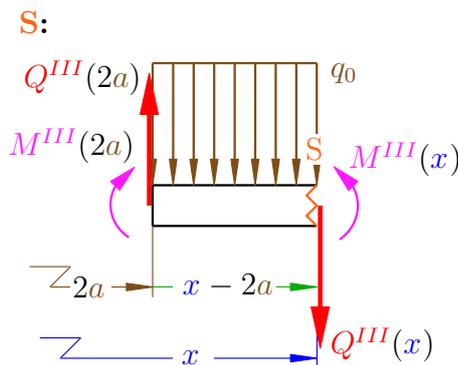
$$M^{II}(x) = -A_z a - A_z(x - a) - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2$$

$$M^{II}(x) = -A_z x - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2 \quad (7.17)$$

**Feld III:  $2a \leq x < 4a$**



**Schnittreaktionen an der Stelle S:**



analog zu Feld II...

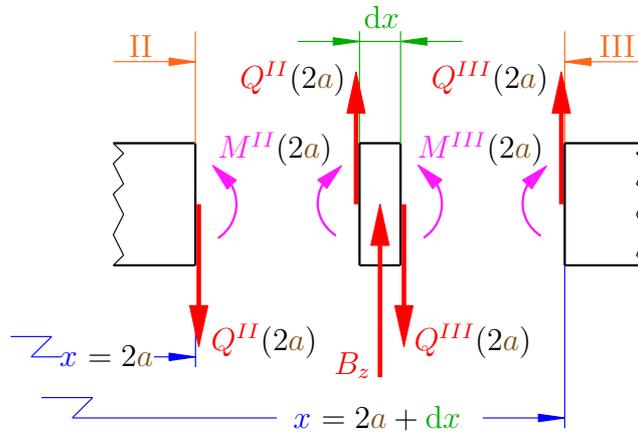
$$Q^{III}(x) = \underbrace{Q^{III}(2a)}_{=C_3} - q_0(x - 2a) \quad (7.18)$$

$$M^{III}(x) = \underbrace{M^{III}(2a)}_{=C_4} + \underbrace{Q^{III}(2a)}_{=C_3}(x - 2a) - \frac{1}{2}q_0(x - 2a)^2 \quad (7.19)$$

Raum für Notizen

**Ermittlung der Konstanten  $C_3$  und  $C_4$  ( $Q^{III}(2a)$ ,  $M^{III}(2a)$ )**

Übergangsbedingungen Feld II  $\rightleftharpoons$  Feld III:



Kräfte- und Momentengleichgewicht am unendlich dünnen Scheibchen  $dx$ :

$Q^{III}(2a) = Q^{II}(2a) + B_z$	(7.20)
$M^{III}(2a) = M^{II}(2a)$	(7.21)

Übergangsbedingungen für eine Einzelkraft

Mit (7.20) und (7.21) sowie (7.16)  $\div$  (7.19) erhält man:

$$C_3 \equiv Q^{III}(2a) = \underbrace{-A_z - aq_0 + B_z}_{=Q^{II}(2a)}$$

$$C_4 \equiv M^{III}(2a) = \underbrace{-A_z 2a - \frac{1}{2}q_0 a^2}_{=M^{II}(2a)}$$

und damit

$$Q^{III}(x) = -A_z - q_0 a + B_z - q_0(x - 2a)$$

$$= -A_z + B_z - q_0(x - a)$$

$$M^{III}(x) = -2A_z a - \frac{1}{2}q_0 a^2 + (-A_z - q_0 a + B_z)(x - 2a)$$

$$- \frac{1}{2}q_0(x - 2a)^2$$

$$= -A_z x + B_z(x - 2a)$$

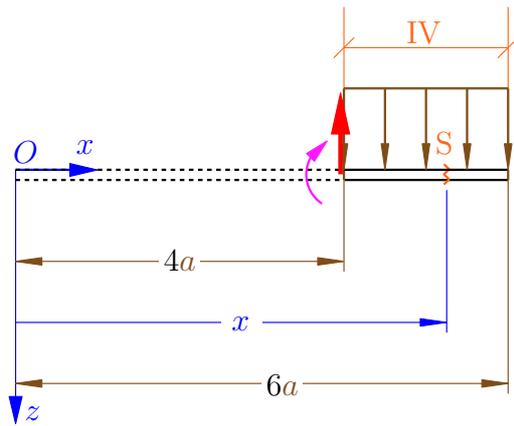
$$- \frac{1}{2}q_0(a^2 + 2ax - 4a^2 + x^2 - 4ax + 4a^2)$$

bzw.

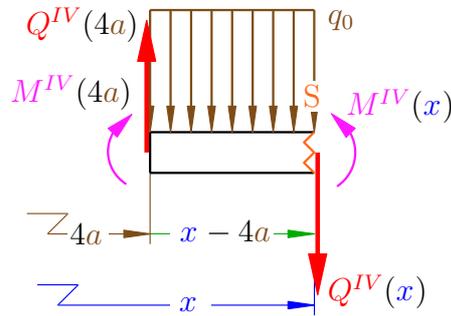
$$Q^{III}(x) = -A_z + B_z - q_0(x - a) \tag{7.22}$$

$$M^{III}(x) = -A_z x + B_z(x - 2a) - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2 \tag{7.23}$$

Feld IV:  $4a \leq x \leq 6a$



Schnittreaktionen an der Stelle S:



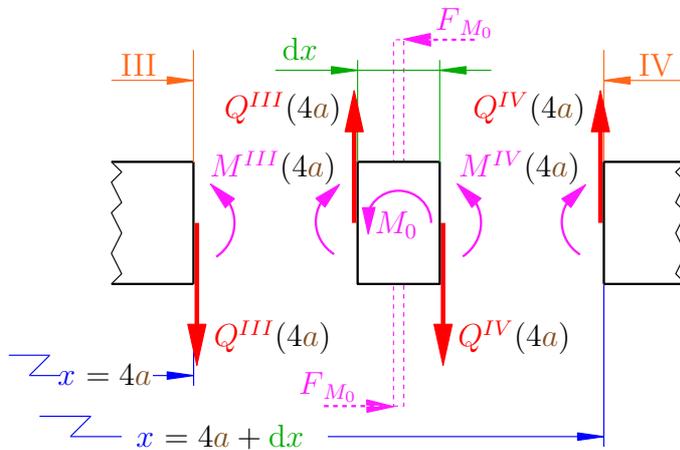
analog zu Feld II + III...

$$Q^{IV}(x) = \underbrace{Q^{IV}(4a)}_{=C_5} - q_0(x - 4a) \tag{7.24}$$

$$M^{IV}(x) = \underbrace{M^{IV}(4a)}_{=C_6} + \underbrace{Q^{IV}(4a)}_{=C_5}(x - 4a) - \frac{1}{2}q_0(x - 4a)^2 \tag{7.25}$$

Ermittlung der Konstanten  $C_5$  und  $C_6$  ( $Q^{IV}(4a)$ ,  $M^{IV}(4a)$ )

Übergangsbedingungen Feld III  $\rightleftharpoons$  Feld IV:



Kräfte- und Momentengleichgewicht am unendlich dünnen Scheibchen  $dx$ :

$Q^{IV}(4a) = Q^{III}(4a)$	(7.26)
$M^{IV}(4a) = M^{III}(4a) - M_0$	(7.27)

Übergangsbedingungen für Einzelmoment

Aus (7.18)  $\div$  (7.23) folgt:

$$C_5 \equiv Q^{IV}(4a) = -A_z + B_z - 3q_0a$$

$$C_6 \equiv M^{IV}(4a) = -4A_z a + 2B_z a - \frac{9}{2}q_0a^2$$

Raum für Notizen

Damit ergibt sich

$$Q^{IV}(x) = -A_z + B_z - q_0(x - a) \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned} M^{IV}(x) &= -4A_z a + 2B_z a - \frac{9}{2}q_0 a^2 \\ &\quad + (-A_z + B_z - 3q_0 a)(x - 4a) - \frac{1}{2}q_0(x - 4a)^2 \\ &= -A_z x + B_z(x - 2a) \\ &\quad - \frac{1}{2}q_0 \underbrace{(9a^2 - 6ax - 24a^2 + x^2 - 8ax + 16a^2)}_{=x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2} - M_0 \end{aligned}$$

$$M^{IV}(x) = -A_z x + B_z(x - 2a) - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2 - M_0 \tag{7.29}$$

**Zusammenfassung der Schnittgrößenverläufe:**

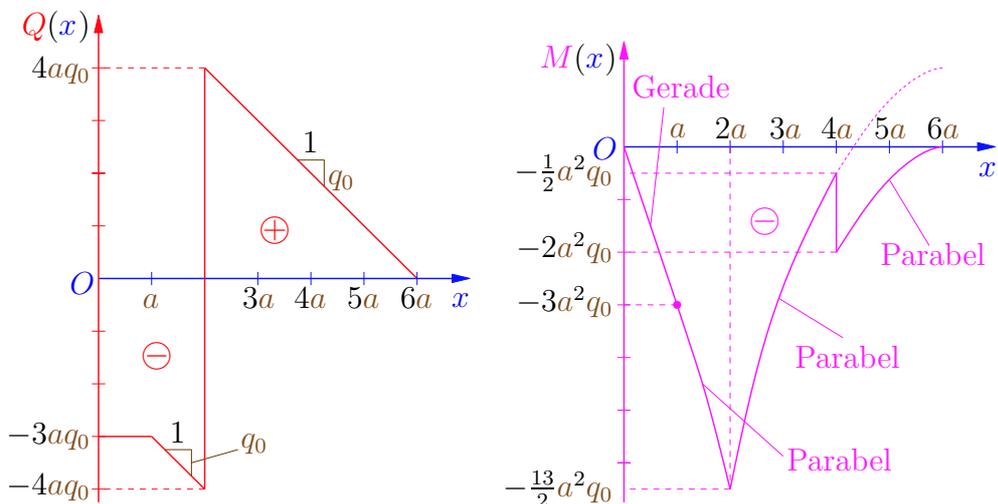
1) ohne Elimination der Auflagerkräfte...

Feld	Querkraft $Q(x)$	Moment $M(x)$
I	$-A_z$	$-A_z x$
II	$-A_z - q_0(x - a)$	$-A_z x - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2$
III	$-A_z - q_0(x - a) + B_z$	$-A_z x - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2 + B_z(x - 2a)$
IV	$-A_z - q_0(x - a) + B_z$	$-A_z x - \frac{1}{2}q_0(x - a)^2 + B_z(x - 2a) - M_0$

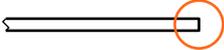
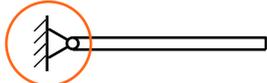
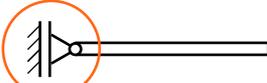
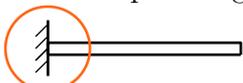
2) nach Elimination der Auflagerkräfte...

Feld	Querkraft $Q(x)$	Moment $M(x)$
I	$-\left(\frac{15}{4}q_0 a - \frac{M_0}{2a}\right)$	$-\left(\frac{15}{4}q_0 a - \frac{M_0}{2a}\right) x$
II	$-\frac{11}{4}q_0 a + \frac{M_0}{2a} - q_0 x$	$-\frac{1}{2}q_0 \left[x + \left(\frac{11}{4}a - \frac{M_0}{2a q_0}\right)\right]^2 + \frac{105}{32}a^2 q_0 - \frac{11}{8}M_0 + \frac{M_0^2}{8a^2 q_0}$
III	$q_0(6a - x)$	$-\frac{1}{2}q_0(x - 6a)^2 + M_0$
IV	$q_0(6a - x)$	$-\frac{1}{2}q_0(x - 6a)^2$

**Schnittgrößenverläufe für den Fall:  $M_0 = \frac{3}{2}a^2 q_0$**



**Häufige Randbedingungen für Schnittgrößenverläufe**

Lager bzw. Randbedingungen	$Q$	$N$	$M$
freies Ende 	0	0	0
festes Drehgelenk 	keine	keine	0
vertikal verschiebbares Drehgelenk 	0	keine	0
horizontal verschiebbares Drehgelenk 	keine	0	0
„Gerber“ - Gelenk 	keine	keine	0
feste Einspannung 	keine	keine	keine

**Legende:**

„0“ - Schnittgröße verschwindet stets an dieser Stelle

„keine“ - keine Aussage über die Schnittgröße aufgrund der Lagerung möglich

**qualitative Übergangsbedingungen**

	Sprung im $q(x)$	Einzelkraft	Einzelmoment
$Q(x)$	Knick	Sprung	stetiger Übergang
$M(x)$	stetiger Übergang	Knick	Sprung

### 7.5 Föppl- bzw. Unstetigkeitssymbole

Wie aus dem vorherigen Abschnitt ersichtlich, ist die rechnerische Bestimmung des Schnittgrößenverlaufes innerhalb von Balken mit Mehrfeldbelastung bereits nach 2 Feldern sehr aufwendig. Im Endergebnis tritt jedoch ein einheitliches Muster für die Schnittgrößenverläufe auf, das sich mit Hilfe des nach **Föppl** (1854 - 1924) genannten Klammersymbols „ $\langle f(x) \rangle^n$ “ für unstetige Funktionsverläufe sehr einfach und kompakt angeben lässt.

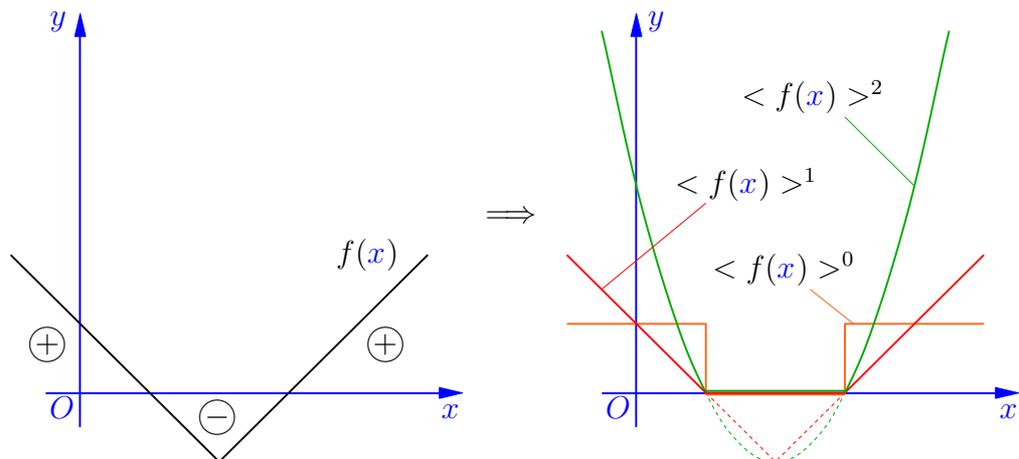
Es ist

$$\langle f(x) \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \leq 0 \\ f(x)^n & \text{für } f(x) > 0 \end{cases}$$

und speziell

$$\langle f(x) \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \leq 0 \\ 1 & \text{für } f(x) > 0 \end{cases}$$

**Beispiele:**



Insbesondere gelten für spezielle Funktionen

$$f(x) = ax - b$$

$$\langle ax - b \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \frac{a}{b} \\ (ax - b)^n & \text{für } x > \frac{a}{b} \end{cases}$$

die **Integrations- und Differentiationsregel**

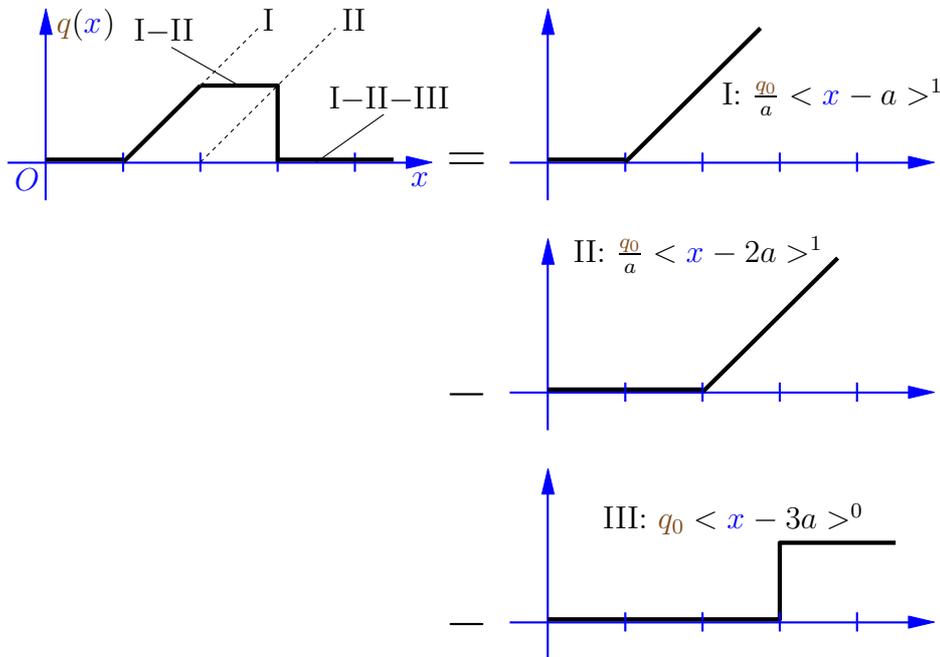
$$\int \langle ax - b \rangle^n dx = \frac{1}{a(n+1)} \langle ax - b \rangle^{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} \langle ax - b \rangle^n = an \langle ax - b \rangle^{n-1}$$

Mit den Föppl-Symbolen lassen sich die bei Mehrfeldbelastungen auftretenden unstetigen Übergänge wie folgt beschreiben:

- 1) Unstetige Streckenlasten lassen sich durch Zuschalten bzw. Abziehen von Föppl-Symbolen für den gesamten Wertebereich von  $x$  darstellen.

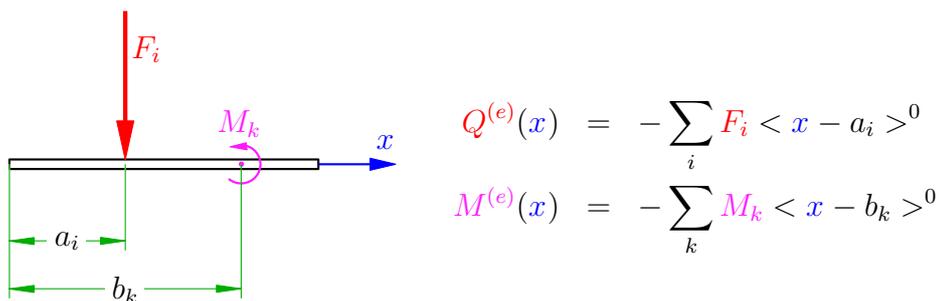
**Beispiel:**



Einheitliche Funktion zur Beschreibung von  $q(x)$ :

$$q(x) = \frac{q_0}{a} \langle x - a \rangle^1 - \frac{q_0}{a} \langle x - 2a \rangle^1 - q_0 \langle x - 3a \rangle^0$$

- 2) Einzelbelastungen werden durch Sprungfunktionen berücksichtigt.



Damit lassen sich Querkraft und Momentenverlauf wie folgt kompakt angeben:

$$Q(x) = - \int_0^x q(\xi) d\xi + Q^{(e)}(x)$$

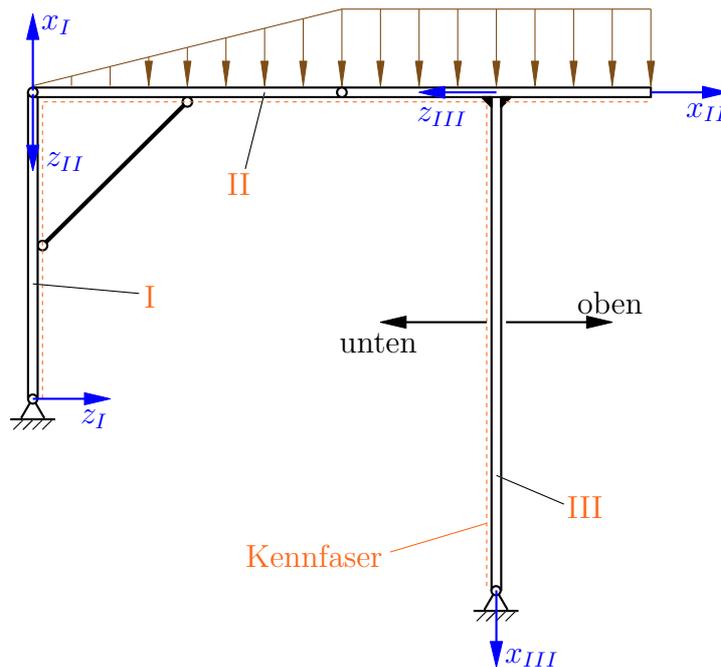
$$M(x) = \int_0^x Q(\xi) d\xi + M^{(e)}(x)$$

**Vorteil:** Endgültige Formeln lassen sich geschlossen darstellen ohne Aufstellung und Auflösung der Übergangsbedingungen.

### 7.6 Schnittgrößen bei Rahmen und Bögen (Zusatz Balkenstatik)

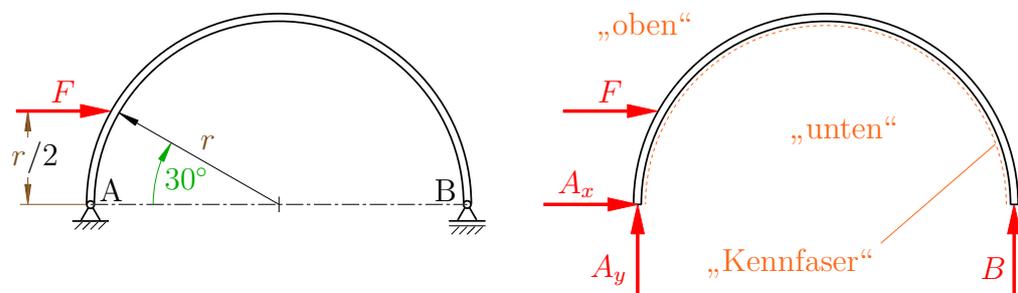
Die für gerade Balken hergeleiteten Formeln lassen sich leicht auf Rahmen und Bögen verallgemeinern, indem man eine „**Kennfaser**“ zur Vereinbarung der Richtungen der Koordinatenachsen einführt und die Träger anschließend abschnittsweise durchrechnet.

#### Beispiel 1: Rahmenträger



Lösen der Schnittkraftverteilung nach Trennen der Balkenabschnitte I, II, III und Ermitteln der Schnittreaktionen der einzelnen geraden Balkenabschnitte.

#### Beispiel 2: Kreisbogenträger



## 1) Ermittlung der Schnittreaktionen

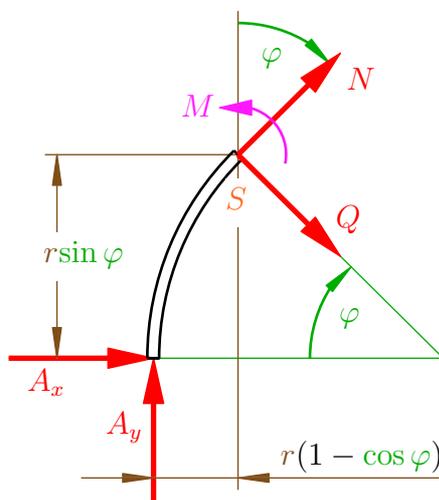
Gleichgewichtsbedingungen:

$$\overset{\curvearrowright}{A} : \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}F}$$

$$\uparrow : \Rightarrow \boxed{A_y = -\frac{1}{4}F}$$

$$\rightarrow : \Rightarrow \boxed{A_x = -F}$$

## 2) Schnittkräfte

**Abschnitt 1:**  $0 < \varphi < \varphi^*$ 

$$\sin \varphi^* = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

$$x : N + A_y \cos \varphi + A_x \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N(\varphi) = \left( \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos \varphi \right) F} \quad \text{Normalkraftverlauf}$$

$$z : Q + \underbrace{A_x}_{-F} \cos \varphi - \underbrace{A_y}_{-\frac{1}{4}F} \sin \varphi = 0$$

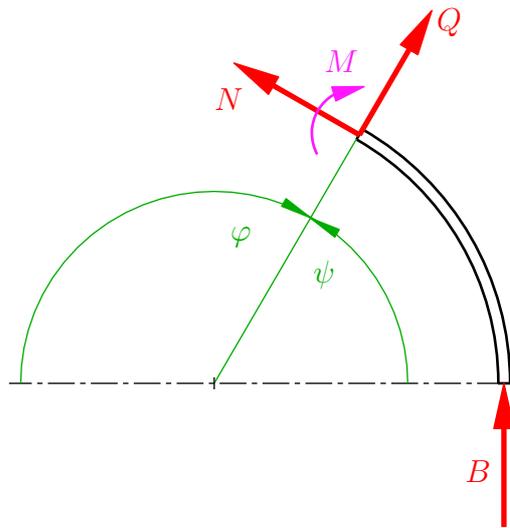
$$\Rightarrow \boxed{Q(\varphi) = \left( \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right) F} \quad \text{Querkraftverlauf}$$

$$\overset{\curvearrowright}{S} : M(\varphi) + \underbrace{A_x}_{-F} r \sin \varphi - \underbrace{A_y}_{-\frac{1}{4}F} r(1 - \cos \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M(\varphi) = r \left( \sin \varphi - \frac{1}{4} (1 - \cos \varphi) \right) F} \quad \text{Momentenverlauf}$$

Raum für Notizen

**Abschnitt 2:**  $\varphi^* < \varphi < 180^\circ$



$$N(\psi) = -\frac{1}{4}F \cos \psi$$

$$Q(\psi) = -\frac{1}{4}F \sin \psi$$

$$M(\psi) = \frac{1}{4}(1 - \cos \psi)rF$$

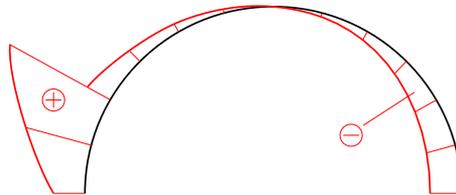
$$\Rightarrow N(\varphi) = \frac{1}{4}F \cos \varphi$$

$$Q(\varphi) = -\frac{1}{4}F \sin \varphi$$

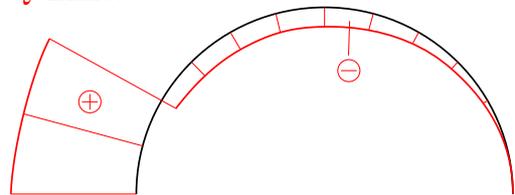
$$M(\varphi) = \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi)rF$$

**Schnittgrößenverläufe:**

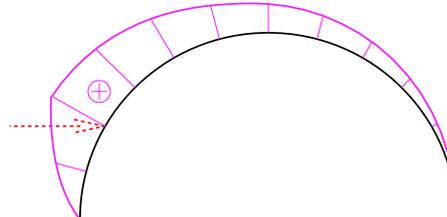
*N*-Linie:



*Q*-Linie:



*M*-Linie:



## 8 Balkenbiegung

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde stets vorausgesetzt, dass die Körper unverformbar, bzw. dass die Verformungen der Körper vernachlässigbar sind (= *Stereostatik*). Ausgehend von der Balkenstatik soll nun die Frage beantwortet werden, welche Verformungen sich aufgrund der bestehenden Belastungen ergeben. Hierzu werden einige Grundbegriffe der sogenannten Elastostatik eingeführt, mit denen diese Fragestellung beantwortet werden kann. Nähere Betrachtungen zur Elastostatik findet man später in der Technischen Mechanik II sowie in der Technischen Mechanik III, wo auch der mehrachsige Spannungszustand beleuchtet wird.

Um die inneren Beanspruchungen von Bauteilen oder die Verteilung von Belastungen in statisch überbestimmten Strukturen ermitteln zu können, benötigt man

- a) die Verteilung der **Verformungen** innerhalb des Bauteils
- b) die **Stoffgesetze**, welche den Zusammenhang zwischen den inneren Beanspruchungen und den sich hieraus ergebenden Verformungen liefern.

Sowohl Verformungen als auch Stoffgesetze können innerhalb eines Bauteils variieren. Die gesuchten Zusammenhänge zwischen Verformungen und Belastungen können daher zunächst nur an sehr kleinen herausgeschnittenen Volumenelementen des Bauteils formuliert werden.

In der Idealisierung des Bauteils als **Kontinuum** (lat. *continuum* „das lückenlos bzw. ununterbrochen Fortlaufende“) werden diese Volumenelemente als unendlich klein (=infinitesimal) angenommen. Die makroskopischen Eigenschaften folgen dann aus einer (mathematischen) Integration über das Volumen des Bauteils.

Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Vorgehens ist, dass innerhalb des Bauteils nirgends abrupte Änderungen auftreten, sei es im Material (z.B. Korngrenzen bei Stahl, Fügengrenzen zwischen verschiedenen Stoffen) oder in der Geometrie (z.B. Risse, Kerben, usw.). Obwohl diese Voraussetzungen bei realen Systemen nicht immer vorliegen, liefert der vorliegende Kontinuumsmechanische Ansatz für viele technische Anwendungen hinreichend genaue Ergebnisse. Man kann sogar bei nicht kontinuierlichen physikalischen Eigenschaften ein Kontinuumsmodell ansetzen und Diskontinuitäten durch empirische Korrekturverfahren (Kerbfaktor, Nennspannung für Rissbildung) berücksichtigen (→ Werkstofftechnik, Maschinenelemente). Daher kann der Kontinuumsmechanische Ansatz als fundamental für die Auslegung von Bauteilen betrachtet werden.

### 8.1 Spannungen

Beim Grenzübergang zu immer kleiner werdenden Volumenelementen müssen auch die auf dieses Teilchen wirkenden absoluten Kräfte gegen Null streben, da sich sonst das Teilchen mit unendlicher Beschleunigung bewegen würde.

Unendlich kleine Kräfte sind aber technisch nicht handhabbar. Daher bezieht man die Resultierende  $\Delta F$  der auf eine Fläche  $\Delta A$  wirkenden Belastung auf die Größe dieser Fläche und erhält daraus den Begriff der **Spannung**  $\underline{\sigma}$  als Grenzübergang.

$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (\text{Definition Spannung}) \tag{8.1}$$

Aus der Definition der Spannung ergeben sich folgende zwei wichtige Eigenschaften:

#### Eigenschaften der Spannung

**Eigenschaft 1** Die Spannung ist ein **Vektor** mit möglichen Komponenten sowohl in Richtung der Flächennormalen als auch innerhalb der Fläche.

**Eigenschaft 2** Die **Dimension** der Spannung ist **Kraft pro Fläche**. Dabei sind die üblichen Einheiten:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{cases} \text{N/mm}^2 \\ \text{Pa} = \text{N/m}^2 \end{cases} \quad (\text{Pascal})$$

$$1 \text{ N/mm}^2 = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}$$

Die Zerlegung des Spannungsvektors in den Richtungen normal und tangential zur Fläche führt zu den fundamentalen Begriffen der Normal- und Schubspannungen (siehe Tab. 8.1 und Abb. 8.1).

Richtung	Bezeichnung
normal zur Schnittfläche	Normalspannung $\underline{\sigma}$ (eine Komponente)
tangential zur Schnittfläche	Schubspannung $\underline{\tau}$ (zwei Komponenten!)

Tabelle 8.1: Spannungszerlegung normal und tangential zur Schnittfläche

Zur eindeutigen Richtungsbezeichnung der Normal- und Schubspannung setzt man in die Schnittfläche ein Koordinatensystem.

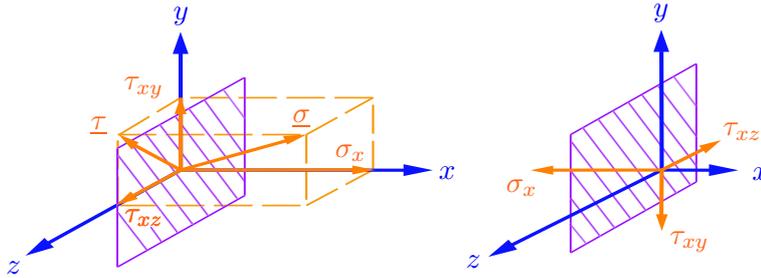


Abbildung 8.1: Definition der Spannungskomponenten inkl. Vorzeichen

Die Normalspannung wird nach der Koordinatenachse bezeichnet, die senkrecht zur Schnittfläche steht. Die beiden Komponenten der Schubspannung werden nach dieser Normalen (erster Index) und zusätzlich nach der Koordinatenachse in der Schnittfläche (zweiter Index) benannt.

Da bei jedem Schnitt zwei Schnittufer entstehen und die Schnittkräfte an den beiden Schnittufern nach dem Gegenwirkungsprinzip („*actio = reactio*“) entgegengesetzt wirkend korrespondieren, führt man folgende **Vorzeichen-Konventionen** ein:

- 1) Dasjenige Schnittufer, bei dem die Koordinatenachse in Richtung der Flächennormalen *von der Materie weg* weist, wird als „positives“ (hier: „linkes“, vgl. Abbildung 8.1) Schnittufer, das gegenüberliegende als „negatives“ (hier: „rechtes“, vgl. Abbildung 8.1) Schnittufer bezeichnet.
- 2) Am positiven Schnittufer weisen positive Spannungskomponenten in Richtung der Koordinatenachsen, am negativen Schnittufer entsprechend in entgegengesetzte Richtung.

Im Folgenden wird an dieser Stelle nur noch die Normalspannung weiter behandelt. Die Eigenschaften der Schubspannung und deren Zusammenhang mit der Normalspannung werden in der Technischen Mechanik II ausgearbeitet.

Betrachtet man unendlich kleine (=infinitesimale) Schnittflächen, so lässt sich aufgrund der Stetigkeitshypothese (keine abrupten Änderungen der Beanspruchung sowie der physikalischen Eigenschaften) voraussetzen, dass die Spannungskomponenten innerhalb der Schnittflächen konstant sind, und dass die resultierenden Kräfte (=Spannung  $\times$  Fläche) im Flächenschwerpunkt angreifen.

Es soll hier die einfachste Theorie der Spannungsverteilung behandelt werden, die auf folgenden Voraussetzungen basiert:

Raum für Notizen

- es werden keine Volumenkräfte (Schwerkraft, magnetische Kraft, Zentrifugalkraft, usw.) berücksichtigt,
- Terme höherer Ordnung in den Abmessungen der Schnittflächen werden vernachlässigt.

## 8.2 Spannung-/Dehnungsbeziehungen

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung wird empirisch am einachsigen Zug/Druck-Versuch ermittelt.

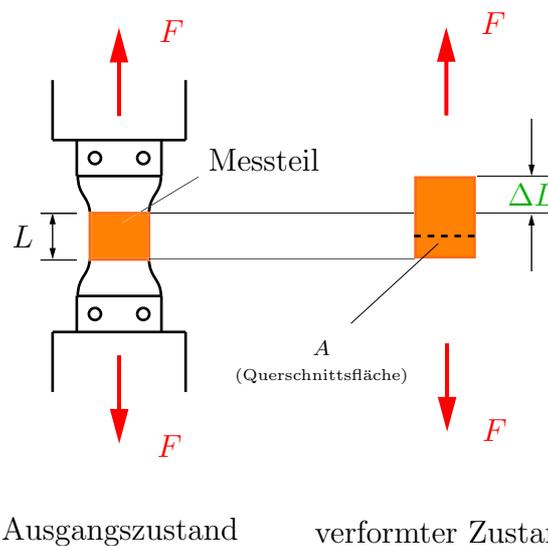


Abbildung 8.2: Einachsiger Zug/Druck-Versuch

Messgrößen sind dabei

- die Spannung  $\sigma = \frac{F}{A}$ ,
- die Dehnung  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ .

Als Dehnung wird dabei das Verhältnis aus absoluter Längenänderung und Länge des Probekörpers im unverformten Zustand verstanden. Die Dehnung ist damit eine dimensionslose Größe, welche in etwa der prozentualen Änderung einer Länge entspricht (Dehnung  $\epsilon = 0,002 = 0,2\%$  Längenänderung).

Aus den Messungen erhält man für typische linearelastische Werkstoffe der Konstruktion (Stahl, Eisen, Aluminium, Holz, Thermoplaste, usw.) in der Umgebung der Nullbelastung in etwa folgendes Verhalten: Typisch ist hier einerseits ein geradliniger Verlauf in der Umgebung des Nullpunkts, in dem das Material bei Entlastung wieder in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt (=elastischer Bereich). Typisch ist andererseits auch, dass ab einer

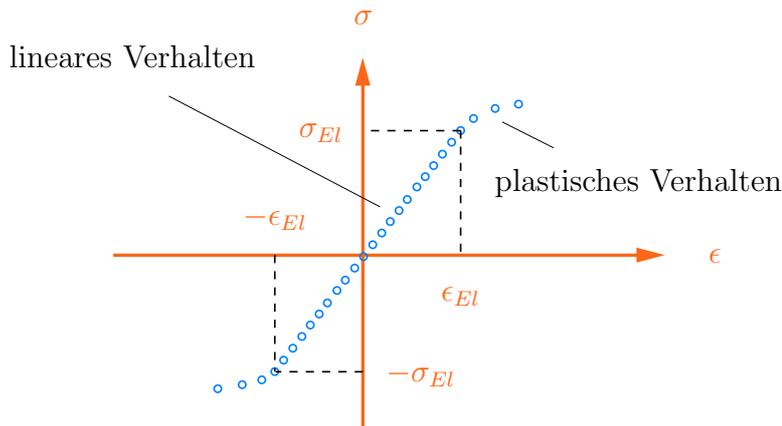


Abbildung 8.3: Prinzipieller Verlauf des Spannungs-/Dehnungsdiagramms für linearelastisches Material in der Umgebung der Nullbelastung

gewissen Grenzbelastung  $\sigma_{El}$  der lineare Verlauf in einen gekrümmten Verlauf übergeht, bei dem auch bei vollständiger Entlastung bleibende Verformungen auftreten (=plastischer Bereich), wobei der exakte Verlauf dieses plastischen Bereichs stark vom Material abhängt (siehe Werkstofftechnik).

Für "kleine" Verformungen und Belastungen kann somit eine lineare Beziehung zwischen Dehnung und Spannung angenommen werden, welche als

$$\boxed{\text{HOOKESches Gesetz} \quad \sigma = E \epsilon} \quad , \quad (8.2)$$

bezeichnet wird. Der Proportionalitätsfaktor  $E$  des HOOKESches Gesetzes wird in der deutschsprachigen Literatur als **Elastizitätsmodul** (engl.: *Young's modulus*) genannt. Für die physikalischen Einheiten gilt dabei

$$\underbrace{\frac{\sigma}{N}}_{\text{mm}^2} = \underbrace{\frac{E}{N}}_{\text{mm}^2} \cdot \underbrace{\epsilon}_{\text{dimensionslos}} .$$

Ein typischer Wert ist z.B.  $E_{\text{Stahl}} = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  .

### 8.3 Zug/Druck-Stäbe

Zur Veranschaulichung der Anwendung des einachsigen Spannungszustands betrachten wir zunächst gerade Stäbe, welche in Längsrichtung durch Zug- oder Druckkräfte belastet werden.

Aus den hergeleiteten Zusammenhängen folgen für einen Einzelstab die Beziehungen (vgl. Abbildung 8.4):

a) Spannung (Belastung)

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad (8.3)$$

Raum für Notizen

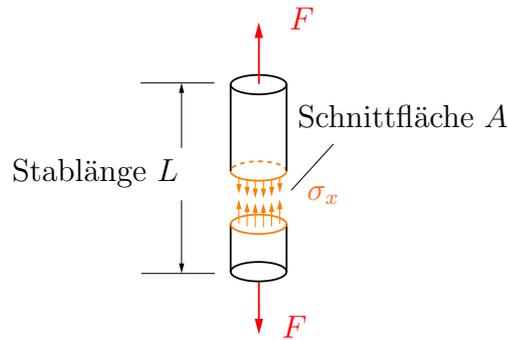


Abbildung 8.4: Zugbelastung am geraden Stab

b) HOOKEsches Gesetz (Material)

$$\sigma_x = E \epsilon_x, \tag{8.4}$$

c) Geometrie (Dehnung/Längenänderung)

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \tag{8.5}$$

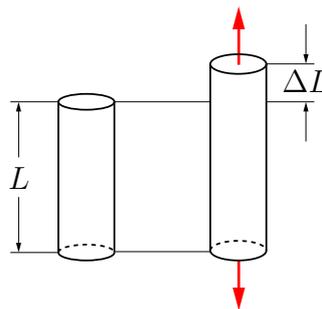


Abbildung 8.5: Längenveränderung am geraden Stab

Weiterhin kann für die in Abbildung 8.5 dargestellte Längenveränderung  $\Delta L$  durch Verwendung von (8.3) - (8.5) die Beziehung

$$\Delta L = L \epsilon_x = L \frac{\sigma_x}{E} = \frac{L}{AE} F$$

hergeleitet werden.

Auflösen nach  $F$  liefert dann

$$F = \underbrace{\frac{AE}{L}}_{\text{Federkonstante } k_{\text{Stab}}} \Delta L.$$

Das **Federgesetz** setzt die Längenänderung mit der resultierenden Federkraft in Beziehung. Es folgt eine einfache Formel für die Berechnung der resultierenden Federkonstante  $k_{\text{Stab}}$  für einen Zug-/Druckstab:

$$k_{\text{Stab}} = \frac{EA}{L}.$$

**Beachte:** mit gegebenem Verformungs-/Kraftgesetz lassen sich nun auch statisch überbestimmte Probleme der Statik lösen.

**Beispiel:** Man betrachte das in Abbildung 8.6 skizzierte Problem. Die verwendeten Stäbe haben dabei die Elastizitätsmoduln  $E_1$  bzw.  $E_2$ , die Querschnittsflächen  $A_1$  bzw.  $A_2$  sowie die Längen  $L_1$  bzw.  $L_2$ . Nur unter Verwendung der Stereostatik ist dieses Problem nicht lösbar.

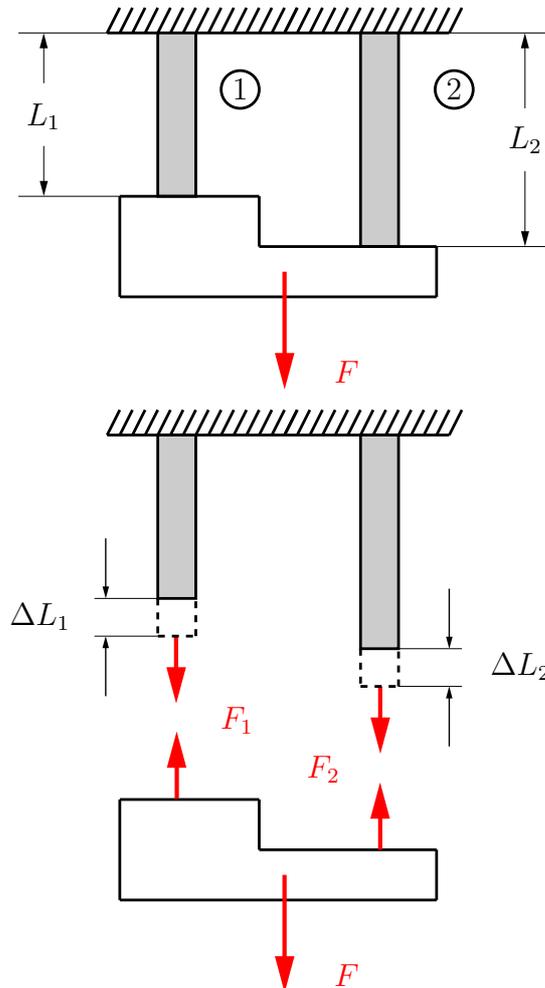


Abbildung 8.6: Beispiel eines statisch überbestimmten Stabsystems

### Lösungsweg:

- 1) Erstellen der Gleichgewichtsbedingungen, hier

$$F_1 + F_2 = F. \quad (1)$$

Da sich hier nur eine Gleichung ergibt, die jedoch zwei Unbekannte Größen enthält, ist das Problem einfach statisch überbestimmt.

- 2) Einsetzen der Kraft-/Verformungsgesetze (aus Betrachtungen der Zusammenhänge Spannung/Dehnung), hier

$$F_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \Delta L_1, \quad (2)$$

Raum für Notizen

$$F_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \Delta L_2. \tag{3}$$

Obwohl nun zwei zusätzliche Gleichungen eingeführt wurden, ist das Problem aufgrund von zwei weiteren Unbekannten ( $\Delta L_1, \Delta L_2$ ) nach wie vor bis zu dieser Stelle noch nicht lösbar.

- 3) Aufstellen der geometrischen Bedingungen (kinematische Zusammenhänge bzw. Kompatibilitätsbedingungen). Hier entsteht eine zusätzliche Gleichung

$$\Delta L_1 = \Delta L_2, \tag{4}$$

welche besagt, dass beide Stabverlängerungen gleich sein müssen (geometrische Kompatibilitätsbedingung). Mit dieser zusätzlichen Kompatibilitätsbedingung ist das Problem nun lösbar.

Einsetzen von (2) - (4) in (1) liefert

$$\frac{E_2 A_2}{L_2} \Delta L_1 + \frac{E_1 A_1}{L_1} \Delta L_1 = F$$

und daraus

$$\Delta L_1 = \frac{F}{\frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_1 A_1}{L_1}}.$$

Wegen (4) erhält man die gleiche Stabverlängerung für beide Stäbe. Die Verwendung der Abkürzung

$$k^* = \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_1 A_1}{L_1}$$

sowie Einsetzen des obigen Resultats in (2) und (3) liefert die Stabkräfte

$$F_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \frac{F}{k^*}, \quad F_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \frac{F}{k^*}.$$

**Beachte:** die Stabkräfte sind unterschiedlich groß! Eine Interpretation des Ergebnisses liefern die in Tabelle 8.2 dargestellten Zusammenhänge.

Stabkraft groß	Stabkraft klein
$E_i$ groß	$E_i$ klein
$A_i$ groß	$A_i$ klein
$L_i$ klein	$L_i$ groß

Tabelle 8.2: Zusammenhänge zwischen Stabeigenschaften und -kraft

## 8.4 Technische Biegelehre

Eine zweite Anwendung des einachsigen Spannungszustandes ergibt sich erstaunlicherweise aber auch für die Berechnung der Durchbiegung eines (schlanken) Balkens, wie im Folgenden dargestellt wird.

Hierbei sollen folgende Voraussetzungen erfüllt sein (sogenannter "Bernoulli"-Balken):

- 1) Die betrachteten Balkenteile sind gerade und sehr schlank, das heißt im Verhältnis zur Länge ist die Dicke des Balkens klein, in Formeln

$$h \ll L \quad \equiv \quad \frac{h}{L} \ll 1 \quad (\text{vgl. Abbildung 8.7}).$$

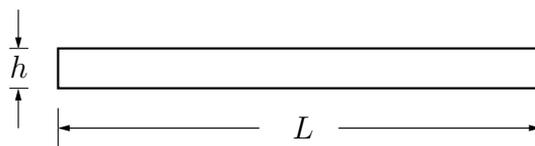


Abbildung 8.7: Geometrische Größen am Balken

- 2) Schubspannungen sind vernachlässigbar, das heißt die in Abbildung 8.8 skizzierte Situation, in der Kräfte quer zur Balkenachse in geringen Abstand zueinander entgegengesetzt wirken, wird **nicht** betrachtet.

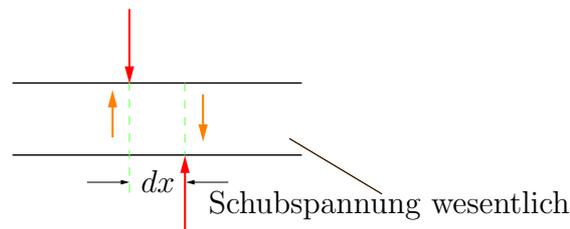


Abbildung 8.8: Schubspannungen im Balken

- 3) Die Balkenquerschnitte bleiben eben (*BERNOULLI-Hypothese*).

### 8.4.1 Belastungen durch ein reines Moment

Dieser Belastungsfall ist der einfachste, der auftreten kann. Man belastet einen geraden Balkenteil durch ein reines Momentenpaar an beiden Enden. Dieses Moment wirkt nun an jeder Stelle gleich, so dass sich überall die gleiche Belastung und damit auch die gleiche relative Verformung ergibt.

Für die Dehnungen und Spannungen kann man also an irgendeiner Stelle des Balkens ein infinitesimales Balkenteilchen ausschneiden (siehe Abbildung 8.10) und die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen aufstellen.

Raum für Notizen

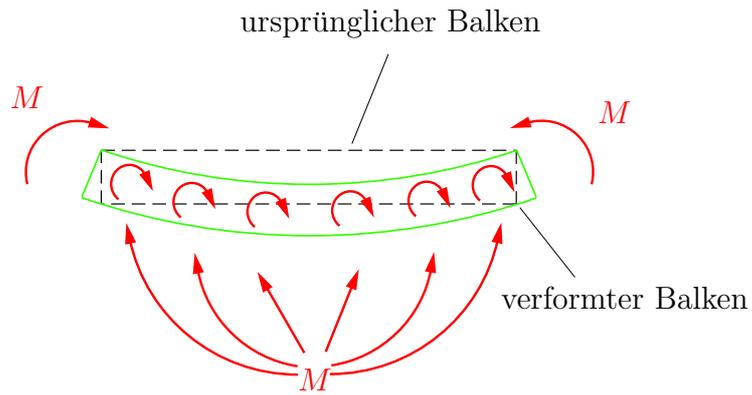


Abbildung 8.9: Belastung durch ein reines Moment

Aufgrund der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, ist der Verlauf der Dehnung und damit (aufgrund des HOOKEschen Gesetzes) auch der Verlauf der Spannung entlang der Querrichtung linear. Mit der maximalen Zugspannung  $\sigma_0$  und der maximalen positiven Dehnung  $\epsilon_0$  am unteren Rand des Balkens ergibt sich damit für die Spannungsverteilung entlang der Querachse

$$\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{z_0} z \quad , \quad (1a)$$

und analog für die Dehnungsverteilung

$$\epsilon(z) = \frac{\epsilon_0}{z_0} z \quad . \quad (1b)$$

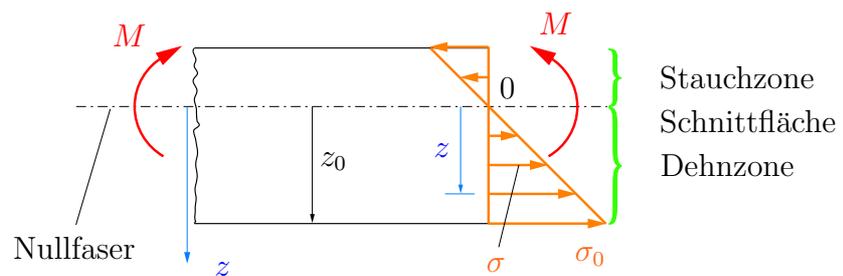


Abbildung 8.10: Belastungen im Balkenquerschnitt

Wichtig ist hier auch die Feststellung, dass an einem bestimmten Punkt des Balkenquerschnitts sowohl Dehnung als auch Spannung verschwinden. Da die Lage dieses Punktes innerhalb des Querschnittes überall gleich entlang des Balkens ist, erhält man so eine Linie entlang des Balkens, auf der sowohl Spannung als auch Dehnung verschwinden. Diese Linie wird auch *Nullfaser* oder *Nullinie* des Balkens genannt. Ihre Lage ist, wie wir weiter unten sehen werden, allein eine Funktion der Geometrie des Querschnittes, d. h. die Lage der Nullfaser hängt nicht von der Belastung ab.

Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen liefert zwei Gleichungen: ein Kräftegleichgewicht in Balkenachsrichtung (erste Gleichung) und ein Momentengleichgewicht um den Punkt 0 (zweite Gleichung) (vgl. Bild 8.11).

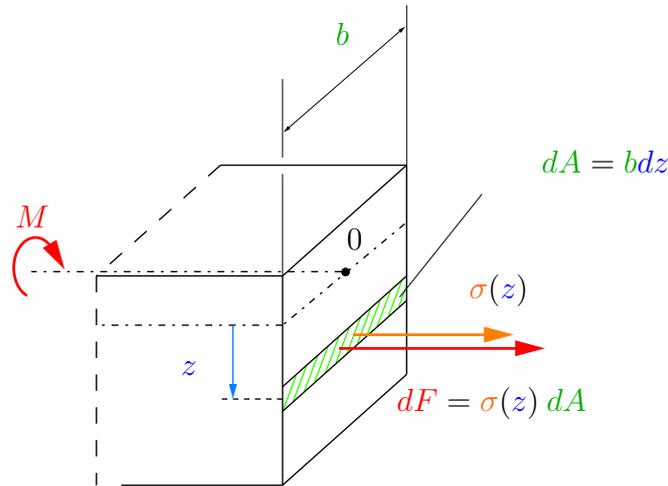


Abbildung 8.11: Gleichgewichtsbedingungen am Balkenquerschnitt

In beiden Fällen müssen die infinitesimalen Beiträge entlang der Querschnittsfläche über die Spannung und der Fläche eines infinitesimalen Streifens auf einer Höhe  $z$  zusammengetragen werden, was zu entsprechenden Integralen führt:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\implies \int_A dF = \int_A \sigma(z) dA = 0, \\ \sum M_0 = 0 &\implies -M + \int z dF = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht in (2) ergibt sich zunächst

$$\frac{\sigma_0}{z_0} \int_A z dA = \frac{\sigma_0}{z_0} z_S A = 0,$$

wobei  $z_S$  den Schwerpunkt der Querschnittsfläche bezeichnet. Diese Beziehung kann für nichtverschwindende Spannungen nur dann erfüllt werden, wenn

$$z_S = 0$$

gilt, das heißt, wenn der Schwerpunkt der Querschnittsfläche genau auf der Nullfaser liegt. Damit verläuft die Nullfaser eines Balkens *immer* durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche. Die Lage der Nullfaser ist somit, wie oben bereits erwähnt, nur von der Querschnittsgeometrie, nicht aber von der Belastung abhängig. Einige Beispiele sind in Abbildung 8.12 dargestellt.

Aus dem Momentengleichgewicht folgt andererseits zunächst

$$\int_A z \sigma(z) dA = M. \quad (3)$$

Raum für Notizen

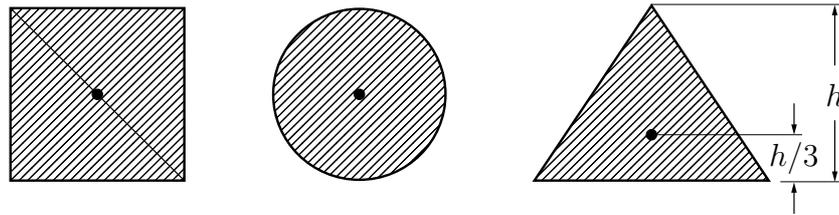


Abbildung 8.12: Beispiele zur Lage der Nullfaser

woraus nach Einsetzen von (1a) der Zusammenhang

$$M = \frac{\sigma_0}{z_0} \int_A z^2 dA = I_z \frac{\sigma_0}{z_0} \quad \text{mit} \quad I_z = \int_A z^2 dA$$

folgt. hier bezeichnet  $I_z$  das sogenannte **Flächenträgheitsmoment**. Neben dem Flächenträgheitsmoment wird auch das **Widerstandsmoment**

$$W_z = \frac{I_z}{z_0} \quad (8.6)$$

eingeführt. Dieses stellt den Proportionalitätsfaktor zwischen angreifendem äußeren Moment  $M$  und der maximalen Spannung  $\sigma_0$  an der Randfaser des Balkens dar, wie man aus der Umformung

$$\sigma_0 = \sigma_{\max} = \frac{M z_0}{I_z} = \frac{M}{W_z} \quad (8.7)$$

erkennen kann. Im allgemeinen erhält man Flächenträgheits- und Widerstandsmomente für allgemeine Querschnitte aus Tabellenwerken.

Die rechnerische Ermittlung des Flächenträgheits- und Widerstandsmoments soll im Folgenden anhand der beiden einfachen Geometrien

- a) ein Rechteckprofil,
- b) einen Kreisquerschnitt.

veranschaulicht werden.

a) Rechteckprofil

Gegeben sei der in Abbildung 8.13 skizzierte Rechtecksquerschnitt. Für infinitesimal dünne Streifen  $dA = b dz$  haben alle Punkte dieses Streifens den

gleichen Abstand  $z$  von der Nulllinie, somit gilt

$$\begin{aligned} \int_A z^2 dA &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b dz \\ &= \frac{b}{3} [z^3]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} - \left( -\frac{h^3}{8} \right) \right] \\ &= \frac{1}{12} b h^3, \end{aligned}$$

also

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3.$$

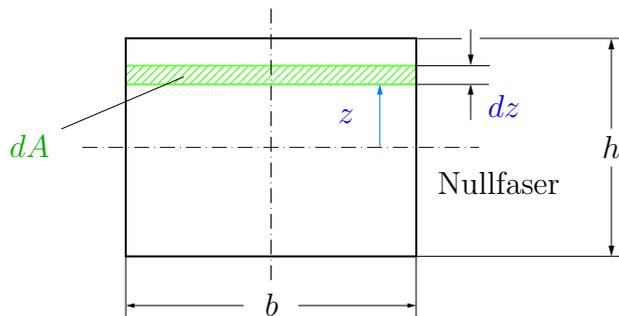


Abbildung 8.13: Zum Flächenträgheitsmoment des Rechteckprofils

Für das Widerstandsmoment ergibt sich mit  $z_0 = h/2$

$$W_z = \frac{I_z}{z_0} = \frac{1}{6} b h^2 .$$

Da die Höhe des Querschnitts quadratisch in das Widerstandsmoment eingeht, ist diese für eine Vergrößerung des Widerstandsmomentes viel signifikanter als die Breite. Bei gleicher Querschnittsfläche sind daher hochkant ausgerichtete Profile widerstandsfähiger als horizontal verlaufende Querschnittsprofile.

b) Kreisquerschnitt

Gegeben sei der in Abbildung 8.14 dargestellte Kreisquerschnitt.

Für horizontale Flächenstreifen  $dA$  gilt

$$dA = 2b(z)dz = 2\sqrt{R^2 - z^2} dz .$$

Raum für Notizen

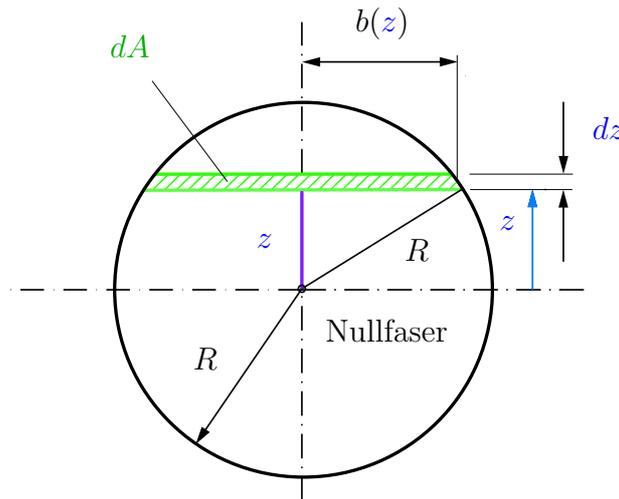


Abbildung 8.14: Zum Flächenträgheitsmoment des Kreisquerschnitts

Somit erhält man aus der Integration

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_A z^2 dA \\
 &= 2 \int_0^R 2z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz \\
 &= 4 \left[ -\frac{z}{4} \sqrt{(R^2 - z^2)^3} + \frac{R^2}{8} \left( z \sqrt{R^2 - z^2} + R^2 \arcsin \frac{z}{R} \right) \right]_0^R .
 \end{aligned}$$

Auswertung an den Grenzen liefert für das Flächenträgheitsmoment

$$I_z = 4 \frac{R^4}{8} \underbrace{\arcsin \frac{R}{R}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} R^4 .$$

Für das Widerstandsmoment erhält man mit  $z_0 = R$

$$W_z = \frac{\pi}{4} R^3 .$$

### 8.4.2 Biegelinie bei geraden Balken

Bei allgemeinen Belastungen von Trägern treten als Haupt-Schnittgrößen Querkräfte und Momente auf (Balkenstatik). Da Momentenverläufe zumindest abschnittsweise kontinuierlich sind, lassen sich die im Abschnitt 8.4.1 entwickelten Formeln auf kleine Balkenabschnitte übertragen. Daraus lässt sich die **Durchbiegung**  $w(x)$  (Abbildung 8.15) bestimmen, wie im Folgenden dargestellt wird.

Man betrachte hierzu wieder ein infinitesimales Balkenstück (vgl. Abbildung 8.16).

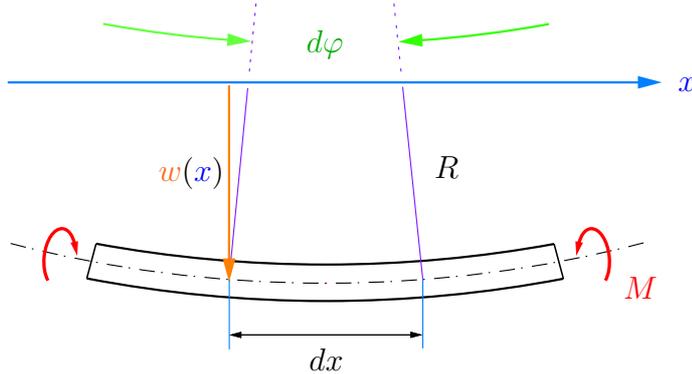


Abbildung 8.15: Betrachtungen am infinitesimalen Balkenstück

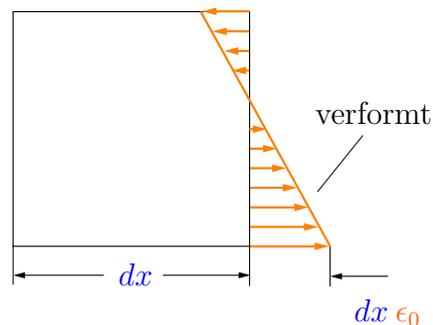


Abbildung 8.16: Dehnung am infinitesimalen Balkenstück

Für die absolute Verlängerung der unteren Randfaser erhält man, je nachdem, ob man die Dehnung oder den Drehwinkel der Querschnittsfläche nimmt, zwei Ausdrucksformen, welche übereinstimmen müssen:

$$\epsilon_0 dx = z_0 d\varphi \quad . \quad (8.8)$$

Daraus folgt

$$\epsilon_0 = z_0 \frac{d\varphi}{dx} \quad . \quad (8.9)$$

Setzt man hier den Zusammenhang zwischen Bogenlänge  $dx$  des Balkenstückchens und dem (noch unbekanntem) Radius  $R$  der Biegelinie an der Stelle  $x$

$$dx = R d\varphi \quad (8.10)$$

ein, so folgt kurz

$$\epsilon_0 = z_0 \frac{1}{R} \quad . \quad (8.11)$$

Zwischen dem lokalen Biegeradius  $R$  der Biegelinie und dem Verlauf der Durchbiegung  $w(x)$  gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{R} = \frac{-w''(x)}{\sqrt{1 + w'(x)^2}} \quad . \quad (8.12)$$

Raum für Notizen

Setzt man hier kleine Durchbiegungen  $w(x) \ll 1$  voraus, so gilt  $w'(x)^2 \approx 0$ , und man erhält

$$\frac{1}{R} = -w''(x) \quad . \quad (8.13)$$

Unter Verwendung von (8.7) sowie des HOOKEschen Gesetzes folgt nun

$$\begin{aligned} M &= W_z \sigma_0 \\ &= W_z E \epsilon_0 \\ &= \frac{I_z}{z_0} E \epsilon_0 \quad , \end{aligned}$$

woraus man schließlich

$$M = E I_z \frac{1}{R} \quad . \quad (8.14)$$

erhält. Das Moment ist somit umgekehrt proportional zum Krümmungsradius, wobei man den Proportionalitätsfaktor  $E I_z$  zwischen Krümmung und Biegemoment auch als **Biegesteifigkeit** bezeichnet.

Einsetzen der Beziehung (8.13) in (8.14) liefert schließlich die Definitionsgleichung für die **Biegelinie**

$$E I_z w''(x) = -M(x) \quad ,$$

was eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Bestimmung der Biegelinie  $w(x)$  darstellt. Diese läßt sich durch zweimaliges Integrieren des Momentenverlaufs unter Berücksichtigung der sogenannten Randbedingungen (Durchbiegung und/oder Steigung an vorgegebenen Stellen des Balkens) lösen. Entsprechende Beispiele werden in der Übung vorgetragen.